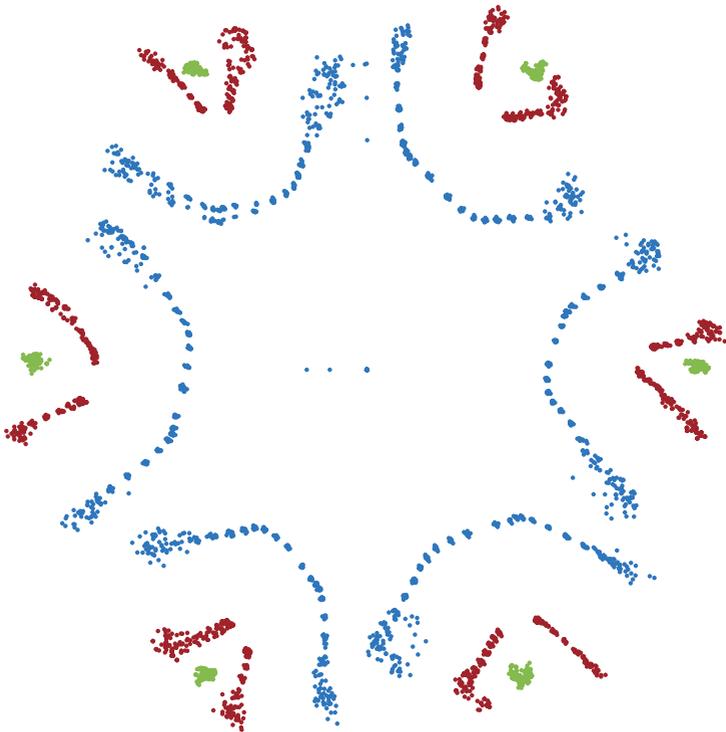


Andreas Liske

---

Neue Methode zur Bestimmung und Beschreibung  
der taktfrequenten Stromsteigungen  
in Drehstromsynchronmaschinen

---





Andreas Liske

Neue Methode zur Bestimmung und  
Beschreibung der taktfrequenten Stromsteigungen  
in Drehstromsynchronmaschinen



# Neue Methode zur Bestimmung und Beschreibung der taktfrequenten Stromsteigungen in Drehstromsynchronmaschinen

von  
Andreas Liske

Karlsruher Institut für Technologie  
Elektrotechnisches Institut (ETI)



Neue Methode zur Bestimmung und Beschreibung der  
taktfrequenten Stromsteigungen in Drehstromsynchronmaschinen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs  
von der KIT-Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik des  
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT) genehmigte Dissertation  
von Dipl.-Ing. Andreas Liske

Tag der mündlichen Prüfung: 17. Juni 2020  
Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. Michael Braun  
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Mario Pacas (Universität Siegen)

#### Impressum



Karlsruher Institut für Technologie (KIT)  
KIT Scientific Publishing  
Straße am Forum 2  
D-76131 Karlsruhe

KIT Scientific Publishing is a registered trademark  
of Karlsruhe Institute of Technology.  
Reprint using the book cover is not allowed.

[www.ksp.kit.edu](http://www.ksp.kit.edu)



*This document – excluding parts marked otherwise, the cover, pictures and graphs –  
is licensed under a Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0 International License  
(CC BY-SA 4.0): <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.en>*



*The cover page is licensed under a Creative Commons  
Attribution-No Derivatives 4.0 International License (CC BY-ND 4.0):  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/deed.en>*

Print on Demand 2022 – Gedruckt auf FSC-zertifiziertem Papier

ISBN 978-3-7315-1093-2  
DOI 10.5445/KSP/1000130835





# Vorwort

*“Gäbe es die letzte Minute nicht, so würde niemals etwas fertig.”*

Mark Twain, US-amerikanischer Schriftsteller

Die Idee zu meiner Forschungsarbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Elektrotechnischen Institut (ETI) am Karlsruher Institut für Technologie (KIT). Am Ende der Vorarbeit in diesem Gebiet [1] wurde die Frage aufgeworfen, ob das darin entwickelte Verfahren der Adaptiven Direkten Stromregelung auch für die speziell im Bereich der Elektromobilität zunehmend verwendeten magnetisch anisotropen Synchronmaschinen anwendbar wäre. Die Beantwortung dieser Frage konnte ich nur durch die vielseitige und tatkräftige Unterstützung aus dem privaten und beruflichen Umfeld erfolgreich abschließen, wofür ich mich bei allen Beteiligten herzlich bedanke.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Michael Braun danke ich für das entgegengebrachte Vertrauen und die Möglichkeit dieses Thema mit großer Freiheit zu bearbeiten. Meinem Korreferenten Herr Prof. Dr.-Ing. Mario Pacas danke ich für das Interesse an der Arbeit und die Bereitschaft, das Korreferat zu übernehmen. Prof. Dr.-Ing. Marc Hiller möchte ich danken, dass er mir durch das gemeinsame, aktive Umgestalten der ETI-internen Verwaltungsaufgaben erst ermöglicht hat, meine Arbeit am Prüfstand zu realisieren und die vorliegende Dissertationsschrift zu verfassen. In diesem Zusammenhang möchte ich auch unseren Damen in der Administration, Anna Czapnik und Ramona Riffel sowie Regina Labisch im Projektmanagement und meinen Kollegen Matthias Brodatzki, Lukas Stefanski und Stefan Mersche meinen Dank aussprechen.

Ein besonderer Dank gilt Herrn Dr.-Ing. Gerhard Clos, der mich durch seine anschauliche, physikalisch begründete und schnörkellos zielorientierte Herangehensweise an wissenschaftliche Fragestellungen stark geprägt hat.

Es ist meine feste Überzeugung, dass der offene, ehrliche, konstruktive und von gegenseitigem Respekt geprägte Umgang und der fachliche Austausch zwischen den Kolleginnen und Kollegen am ETI entscheidend und gewinnbringend für meine Arbeit war. Darum möchte ich an dieser Stelle nicht versäumen, allen meinen Kolleginnen und Kollegen für dieses gute Betriebsklima zu danken! Hervorheben möchte ich dabei meinen Vorreiter Dr.-Ing. Frank Becker, der die Arbeit mit initiiert und mir seine Ergebnisse bereitwillig und vollständig übergeben hat. Zu meinen langjährigen Kollegen Dr.-Ing. Alexander Schmitt, Dr.-Ing. Tobias Gemaßmer, Dr.-Ing. Philip Grabherr und Dr.-Ing. Alexander Stahl entstand ein über das Berufliche hinausgehendes, enges freundschaftliches Verhältnis, das mich immer motiviert hat. Auch meinen Kollegen M.Sc. Simon Decker, M.Sc. Christoph Rollbühler, M.Sc. Matthias Brodatzki, M.Sc. Lukas Stefanski, M.Sc. Fabian Stamer und Dr.-Ing. Matthias Schnarrenberger möchte ich für die zahlreichen interessanten und gewinnbringenden Gespräche, das Mitdenken und die konstruktive Zusammenarbeit danken. Den Studierenden, die im Rahmen meiner Forschungen ihre Abschlussarbeit angefertigt haben, gilt für Ihre Unterstützung ebenfalls mein Dank. Weiterhin haben auch die Kollegen der Werkstatt des ETI meine Arbeit durch unkomplizierte und kompetente Hilfe maßgeblich unterstützt.

Mein ganz besonderer Dank gilt meiner Frau Claudia und unseren beiden Kindern Sophie und Jakob! Für ihre Geduld, Liebe und Ausdauer und die gemeinsame Zeit. Sie holten mich immer wieder aus meiner Elektrotechnik-Welt in das reale Leben zurück und waren mir stets Rückhalt, Zuhause und der Ausgleich, den ich brauchte. Es war durchaus auch lehrreich, die wissenschaftlichen Sachverhalte, an denen ich gerade arbeitete, so erklären zu müssen, dass ein fünfjähriges Kind keine weiteren Fragen mehr stellt, sondern sich zufrieden trollt und seine eigenen Skizzen und Lego-Konstruktionen mit „Strom“ anfertigt.

Andreas Liske

Wöschbach, im Juli 2020

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b> . . . . .	<b>i</b>
<b>1 Einleitung</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Forschungsimpulse durch neue Messverfahren . . . . .	2
1.2 Stand der Technik . . . . .	6
1.2.1 Regelungsverfahren elektrischer Antriebe . . . . .	6
1.2.2 Prädiktive Regelungsverfahren . . . . .	8
1.2.3 Methoden zur Identifikation der taktfrequenten Stromsteigungen . . . . .	15
1.3 Zielstellung und Gliederung der Arbeit . . . . .	21
<b>2 Grundlagen</b> . . . . .	<b>25</b>
2.1 Das Adaptive Direkte Stromregelverfahren . . . . .	26
2.1.1 Das Adaptive Direkte Stromregelverfahren am Beispiel eines Tiefsetzstellers . . . . .	28
2.1.2 Einordnung des Regelungsverfahrens der Adaptiven Direkten Stromregelung . . . . .	34
2.2 Grundlagen für die Anwendung der Adaptiven Direkten Stromregelung . . . . .	36
2.2.1 Stellglied Drehstrombrückenschaltung . . . . .	36
2.2.2 Einstellung der Ausgangsspannung der Drehstrombrückenschaltung . . . . .	40
2.2.3 Schaltzustände der Drehstrombrückenschaltung . . . . .	42
2.2.4 Raumzeigermodulation . . . . .	47
<b>3 Allgemeine Darstellung der Stromänderungsparameter bei Synchronmaschinen</b> . . . . .	<b>55</b>
3.1 Modellbildung der permanentmagneterregten Synchronmaschine	57

- 3.2 Stromänderungsparameter bei isotropen Synchronmaschinen . . . 68
  - 3.2.1 Regelungskonzept der Adaptiven Direkten  
Stromregelung einer isotropen Synchronmaschine . . . . . 74
  - 3.2.2 Identifikation des Rotorlagewinkels aus dem  
Freilaufparameter . . . . . 75
  - 3.2.3 Berechnung des Freilaufparameters aus den aktiven  
Stromänderungsparametern . . . . . 75
- 3.3 Stromänderungsparameter bei anisotropen Synchronmaschinen . 81
  - 3.3.1 Regelungskonzept der Adaptiven Direkten  
Stromregelung bei anisotropen Synchronmaschinen . . . 91
  - 3.3.2 Berechnung aller sechs aktiven  
Stromänderungsparameter in jedem Takt . . . . . 94
  - 3.3.3 Berechnung des Freilaufparameters aus den aktiven  
Stromänderungsparametern . . . . . 96
  - 3.3.4 Berechnung des Mittelpunkt- und Radiusraumzeigers . . 100
- 3.4 Verwendung der allgemeinen Beschreibung der  
Stromänderungsparameter . . . . . 104
  - 3.4.1 Identifikation des Rotorlagewinkels durch Auswertung  
der Stromänderungsparameter . . . . . 104
  - 3.4.2 Berechnung der Stromänderungsparameter mit Hilfe des  
Rotorlagewinkels . . . . . 105
- 3.5 Betriebsbereiche für die Identifikation . . . . . 107
- 3.6 Bewertung der verallgemeinerten Darstellungsform der  
Stromänderungsparameter . . . . . 109

**4 Eine neue effiziente Methode zur Bestimmung der  
Stromsteigungen . . . . . 113**

- 4.1 Das allgemeine Least-Squares-Schätzer-Verfahren . . . . . 113
- 4.2 Neue effiziente Methode zur Implementierung eines  
Least-Squares-Filters . . . . . 129
  - 4.2.1 Anwendung des Least-Squares-Verfahrens zur Messung  
von Strömen in Stromrichterschaltungen . . . . . 129
  - 4.2.2 Analyse der Pseudoinversen der Beobachtermatrix . . . . 143
  - 4.2.3 Quantisierungsfehler . . . . . 157

4.2.4 Alternative Implementierung ohne Lookup-Tabelle . . . . .	163
4.3 Einordnung des Verfahrens . . . . .	165
4.3.1 Vergleich mit dem Savitzky-Golay-Filter . . . . .	165
4.3.2 Vergleich mit rekursiven LS-Verfahren . . . . .	166
<b>5 Realisierung der Verfahren am Prüfstand . . . . .</b>	<b>167</b>
5.1 Prüfstands Aufbau . . . . .	167
5.1.1 Leistungsteil . . . . .	168
5.1.2 Signalverarbeitung und Prüfstandssteuerung . . . . .	172
5.1.3 Messwerterfassung . . . . .	176
5.2 „Timing“ – Zeitliche Ablaufsteuerung . . . . .	180
5.2.1 Zeitbasen . . . . .	180
5.2.2 Latenz . . . . .	182
5.2.3 Messwertindex . . . . .	185
5.2.4 Synchronisierung der Messwerte mit den Schaltzuständen	186
5.3 Realisierung des Algorithmus im FPGA . . . . .	187
5.3.1 Beginn der Taktperiode – Vorbereitungszeit $T_V$ . . . . .	188
5.3.2 Identifikationsphase $T_I$ . . . . .	193
5.3.3 Aufbereitung der geschätzten Steigungen und Endwerte – Auswertephase $T_R$ . . . . .	195
<b>6 Messergebnisse . . . . .</b>	<b>199</b>
6.1 Messungen der Stromsteigungen und Endwerte des LS-Schätzers	199
6.1.1 Validierung der Steigungsidentifikation des LS-Verfahrens	200
6.1.2 Validierung der Berechnung der Endwerte des LS-Verfahrens . . . . .	204
6.2 Messungen der Stromänderungsparameter . . . . .	205
<b>7 Zusammenfassung und Ausblick . . . . .</b>	<b>211</b>
<b>A Herleitungen . . . . .</b>	<b>217</b>
A.1 Detaillierte Herleitung der Stromänderungsparameter anisotroper Synchronmaschinen . . . . .	217
A.1.1 Berechnung von $\frac{d}{dt}i_\alpha$ (siehe Seite 84) . . . . .	217

A.1.2 Berechnung von $\frac{d}{dt}i_\beta$ bei einer anisotropen PSM . . . . .	223
A.1.3 Berechnung des aktiven Stromänderungsparameters . . . . .	229
<b>Symbolverzeichnis . . . . .</b>	<b>233</b>
<b>Abbildungsverzeichnis . . . . .</b>	<b>249</b>
<b>Tabellenverzeichnis . . . . .</b>	<b>253</b>
<b>Literaturverzeichnis . . . . .</b>	<b>255</b>

# 1

## Einleitung

*“Eine Regelung sollte sich nur mit dem Notwendigen befassen, aber nicht mit dem Erläßlichen.”*

Petrus Abaelardus (1079 - 1142), frz. Theologe und Philosoph

In modernen elektrischen Antrieben werden die als elektromechanische Energiewandler verwendeten elektrischen Maschinen mit Umrichtern gespeist. Mit diesen müssen die Maschinenströme möglichst schnell und exakt eingestellt werden, um das benötigte Drehmoment der elektrischen Maschine zu erzeugen. Bei den üblicherweise verwendeten Pulswechselrichtern wird hierzu schnell zwischen den verschiedenen möglichen Schaltzuständen des Umrichters umgeschaltet und dadurch jeweils eine dem Schaltzustand zugehörige Spannung an die Klemmen der Maschine angelegt. Die Wicklungen der Maschine wirken dabei in guter Näherung als Induktivitäten, in denen der Strom dann gemäß

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int u_L(t) dt \quad (1.1)$$

bei positiver angelegter Spannung ansteigt und bei negativer Spannung wieder fällt. Durch schnelle Wechsel zwischen den verschiedenen möglichen Schaltzuständen, beispielsweise mittels Pulsweitenmodulation (PWM), und damit zwischen den zugehörigen Spannungen, kann der Strom im Mittel auf einen gegebenen Sollwert  $i_w$  eingestellt werden (siehe Abbildung 1.1).

Wie stark der Strom sich in den jeweiligen Schaltzuständen ändert, hängt dabei nicht nur von der diesem Schaltzustand zugehörigen Spannung, sondern auch vom aktuellen Rotorlagewinkel der Maschine und der im jeweiligen Betriebspunkt wirksamen Induktivität ab.

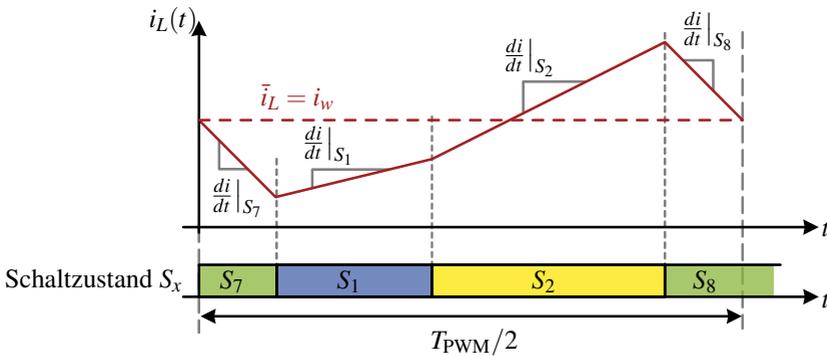


Abbildung 1.1: Idealer Kurvenverlauf des Stroms einer Phase einer Drehstrommaschine während der 4 Schaltzustände einer halben PWM-Taktperiode

## 1.1 Forschungsimpulse durch neue Messverfahren

Der Analyse dieser schaltzustandsabhängigen Stromsteigungen elektrischer Maschinen während eines jeden Schaltzustands eines Stromrichters wird in Fachkreisen in den letzten Jahren zunehmend mehr Beachtung geschenkt. Der Grund für dieses gesteigerte Interesse liegt einerseits in den verschiedenen Anwendungen, für die eine Kenntnis der taktfrequenten Stromsteigungen wichtig ist und andererseits in der stark gestiegenen Leistungsfähigkeit aktueller Messtechnik und der digitalen Signalverarbeitung. So ist es heute mit gängiger Hardware leicht möglich, physikalische Effekte zu messen, die noch vor einigen Jahren zwar im Labor messbar, aber für eine realistische Implementierung in einer Anwendung schlicht zu aufwändig und zu teuer waren. Speziell die Möglichkeiten der digitalen Signalverarbeitung stellen hierbei eine Schlüsselrolle dar. Auf immer leistungsfähigeren Signalverarbeitungs-Bausteinen können immer bessere Filter und Algorithmen parallel zur normalen Messung implementiert werden und einen Mehrwert an Wissen über das System erzeugen.

Insbesondere die Messung der Stromsteigungen rückt dabei in Bereiche vor, in denen kaum zusätzliche Hardware nötig ist, um neben dem zu messenden

Strom auch noch die Stromsteigung messen zu können [E1, S1]. Der in dieser Arbeit vorgestellte Least-Squares-Algorithmus (LS-Algorithmus) ist nur ein Beispiel. Auch bei den Sensoren ermöglichen fortschrittliche Technologien in der Leiterplattentechnik die Integration von Sensorspulen in der Leiterplatte selbst [2–6, E2, S2]. Neben einer notwendigen, kleinen Operationsverstärkerschaltung verursacht ein so aufgebauter Sensor kaum Mehrkosten.

Die Anwendungen, die von einer Kenntnis der Stromsteigungen profitieren sind vielfältig. Beispielsweise erlaubt die Kenntnis der Stromsteigungen die Identifikation des Rotorlagewinkels einer Maschine, was elementarer Bestandteil in einigen geberlosen Regelungsverfahren ist. Vor allem können dadurch Identifikationsverfahren realisiert werden, die den Rotorlagewinkel bereits im Stillstand und bei niedrigen Drehzahlen zuverlässig identifizieren [7–13].

Ein weiteres, großes Anwendungsgebiet für die Auswertung der Stromsteigungen ist die Vermessung der Maschinenparameter im Betrieb (Online-Parameteridentifikation). Durch die hohen Anforderungen an die Leistungsdichte von elektrischen Antrieben für die Elektromobilität werden die Maschinen magnetisch immer stärker beansprucht. Dadurch wirken sich Sättigungseffekte zunehmend im gesamten Betriebsbereich auf die Maschinenparameter aus. Auch der Wunsch der Motorenhersteller, aufwändige und teure individuelle Vermessungen der Parameter der einzelnen Maschinen zu vermeiden, mündet in den verstärkten Bestrebungen, die Maschinenparameter im Betrieb direkt ausmessen zu können und die Regelung entsprechend anzupassen. In diesem Forschungsbereich stellt die Identifikation der Stromsteigungen eine zunehmend wichtige Größe dar, da sie als zusätzliche Messgröße das Lösen ansonsten unterbestimmter Gleichungssysteme ermöglicht [E1, E2, 14, 15, E3–E5]. Die Online-Parameter-Identifikation wird neben der Verwendung in Regelungsverfahren aber auch zur Fehlererkennung und zur Schätzung der Rortemperatur im Betrieb verwendet [16, 17].

Und letztlich werden gradientenbasierte Regelungsverfahren, wie die in dieser Arbeit vorgestellte Adaptive Direkte Stromregelung (ADSR), durch eine solide Messung der Stromsteigung überhaupt erst ermöglicht [1, E1, 18–23, E6–E8]. In diesem Regelungsverfahren wird die Strecke in jedem PWM-Takt durch die Messung der Stromsteigung implizit neu identifiziert.

Das Verfahren benötigt außer der gemessenen Stromsteigung keine weiteren Streckenparameter und ist somit vollständig adaptiv.

Die Adaptive Direkte Stromregelung ist am Elektrotechnischen Institut in mehreren Vorarbeiten zu dieser Arbeit entwickelt worden. Zunächst für die Stromregelung eines Tiefsetzstellers [24], dann für eine Gleichstrommaschine und schließlich für eine isotrope Synchronmaschine [1, 18–21]. In diesen Arbeiten wurde das Verfahren so weit entwickelt, dass neben dem grundsätzlichen Prinzip auch das wichtige Konzept der Stromänderungsparameter eingeführt wurde.

Die Anwendung der ADSR bei magnetisch anisotropen Synchronmaschinen ist mit der Darstellung der Stromänderungen aus den genannten Vorarbeiten allerdings nicht möglich. Die magnetische Anisotropie sorgt für eine Verzerrung und eine zeitliche Veränderlichkeit der Stromänderungsparameter, die zunächst lediglich als noch ungelöste Aufgabe identifiziert wurde. Auch die Implementierung der Steigungsmessung mit dem verwendeten LS-Schätzer ist nach dem Stand der Vorarbeiten nur in speziell darauf zugeschnittener Signalverarbeitungs-Hardware mit sehr niedriger PWM-Taktfrequenz (2,5 kHz) und mit einem großen, externen Speicher möglich. Darin ist zudem die Regelung mit der Pulsgenerierung so verwoben, dass die Stromsteigungsidentifikation nicht unabhängig davon auch in anderen Regelungsumgebungen, beispielsweise zur Online-Parameter-Identifikation genutzt werden kann.

Im Verlauf der vorliegenden Arbeit wurden zunächst simulativ [S3, S4] und analytisch [E6–E8] die Zusammenhänge und Eigenschaften der Stromänderungsparameter bei der anisotropen Synchronmaschine erforscht und beschrieben. Parallel dazu wurde an verschiedenen Verfahren zur Bestimmung der Stromsteigungen geforscht. Hierbei wurde auch der in dieser Arbeit vorgestellte, effiziente und ressourcensparende LS-Schätzer entwickelt [E3, S5–S7]. Wie alle LS-Verfahren, basiert auch er auf einer starken Überabtastung des Strommesssignals. Speziell bei hohen PWM-Taktfrequenzen wird die Realisierung der Überabtastung allerdings immer schwieriger. Dazu

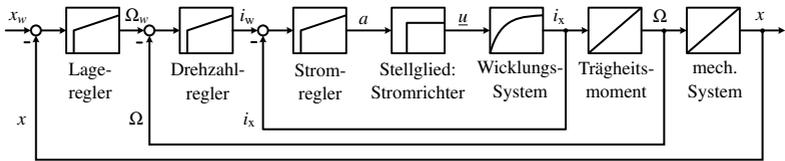


Abbildung 1.2: Konventionelle Antriebsregelung in Kaskadenstruktur

kommt noch, dass mit steigender Taktfrequenz die Leistung eines Umrichters normalerweise abnimmt und damit auch die Forderung nach geringen Kosten der Schaltung zunimmt. Ein schneller Analog-Digital-Wandler (auch als „A/D-Wandler“ oder noch kürzer als „ADC“ bezeichnet) und leistungsfähige Signalverarbeitungs-Hardware (beispielsweise Field Programmable Gate Arrays (FPGA) oder Digitale Signal Prozessoren (DSP)) werden hier, wenn möglich, vermieden.

Für diese Anwendungen wurde darum ein weiteres Verfahren, die sogenannte „Easy Current Slope Detection“ entwickelt, das speziell für die Messung der Stromsteigungen bei DC/DC-Stellen und hohen Taktfrequenzen mit normaler, günstiger Messtechnik sehr gut funktioniert [E1, S1, S8, S9]. Das Grundprinzip dieses Verfahrens wird auf Seite 20 kurz beschrieben. Darüber hinaus wurden auch Prototypen und eigene Stromsteigungssensoren untersucht.

Mit der Implementierung des in dieser Arbeit vorgestellten LS-Schätzers im FPGA eines Antriebsprüfstands konnte letztlich die Identifikation der schaltzustandsabhängigen Stromsteigungen einer anisotropen Synchronmaschine bei einer PWM-Taktfrequenz von 8 kHz gemessen und mit den Erkenntnissen aus der mathematischen Analyse der Maschinenströme so aufbereitet werden, dass sie als Stromänderungsparameter für die ADSR verwendbar sind.

## 1.2 Stand der Technik

### 1.2.1 Regelungsverfahren elektrischer Antriebe

Zur Regelung der Drehzahl oder auch der Lage eines elektrischen Antriebs werden häufig kaskadierte Regelungsstrukturen verwendet (siehe Abbildung 1.2). Diese Struktur bietet sich in der Antriebstechnik deshalb besonders an, weil sowohl die mechanischen, als auch die elektrischen Zeitkonstanten der einzelnen Teile der Kaskade physikalisch bedingt von außen nach innen kleiner werden, was eine Voraussetzung für Kaskadenregelungen darstellt. Um beispielsweise eine vorgegebene Drehzahl einstellen zu können, muss zunächst ein inneres Drehmoment in der Maschine erzeugt werden, um die Maschine gegen ihre eigene mechanische Trägheit und gegen eine anliegende mechanische Last zu beschleunigen und die gewünschte Drehzahl konstant zu halten. Bevor die Maschine überhaupt beschleunigen kann, muss ein Drehmoment aufgebaut worden sein. Die Zeitkonstante des zu beschleunigenden mechanischen Teilsystems ist schon alleine deshalb größer als die Zeitkonstante des elektrischen Teilsystems, das das Drehmoment erzeugt.

Die Erzeugung des inneren Drehmoments erfolgt in einer elektrischen Maschine durch das Einprägen eines Drehmoment bildenden Stromes in den Wicklungen der Maschine. Der Sollwert des Stromregelkreises ist daher direkt vom geforderten inneren Drehmoment der Maschine abhängig, dessen Sollwert wiederum vom Drehzahlregler berechnet wird.

Wegen der stufenweisen Zunahme der Zeitkonstanten in der Kaskadenstruktur von innen nach außen können die einzelnen Teilregelkreise unabhängig voneinander entworfen und in Betrieb genommen werden können. Dies stellt eine wesentliche Vereinfachung für den Entwurf des Gesamtsystems dar. Die erreichbare Dynamik des gesamten Antriebs hängt dabei wesentlich von der Dynamik des innersten Stromregelkreises ab. Je schneller ein Strom eingepreßt werden kann, also das zugehörige innere Drehmoment aufgebaut ist, desto eher wird das nachgelagerte mechanische Teilsystem beschleunigen und damit die Solldrehzahl erreichen können.

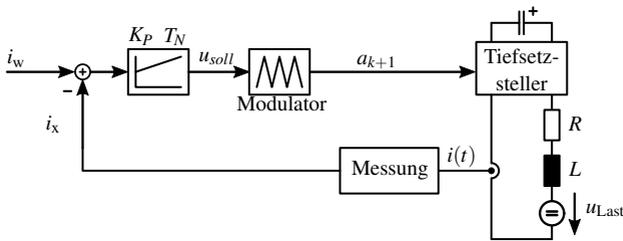


Abbildung 1.3: Blockschaltbild einer konventionellen linearen Stromregelung mit PI-Regler für einen Tiefsetzsteller

Als Regler des Stromregelkreises werden häufig lineare Regler, wie beispielsweise ein Proportional-Integral-Regler (PI-Regler) eingesetzt. Das Blockschaltbild eines solchen Stromregelkreises ist in Abbildung 1.3 dargestellt. Diese Regler habe einen einfachen Entwurfsprozess und die erforderlichen Reglerparameter können nach bekannten Einstellregeln berechnet werden [25–28]. Hierfür müssen allerdings die Parameter der Strecke bekannt sein, was eine vorausgehende Vermessung der Maschine notwendig macht. Bei der klassischen rotororientierten Regelung einer permanentmagneterregten Synchronmaschine sind dies beispielsweise der Wicklungswiderstand und die Induktivitäten in Richtung des Rotorflusses ( $L_d$ ) und senkrecht dazu ( $L_q$ ). Diese Maschinenparameter sind allerdings in realen Maschinen nicht konstant, sondern hängen vom aktuellen Betriebspunkt, den Strömen und der Temperatur ab. Besonders bei modernen, hoch ausgenutzten Synchronmaschinen führen Sättigungseffekte zu einer so großen Veränderlichkeit der Parameter über den Betriebsbereich, dass eine einfache Regelung mit der Annahme konstanter Parameter nicht möglich ist. Um dieses Problem zu lösen, werden unter anderem Kennfeld-basierte Regler eingesetzt, die die Strecken-Parameter jeweils zu dem aktuellen Betriebspunkt aus abgespeicherten Lookup-Tabellen entnehmen und die Regler-Parameter damit dynamisch anpassen, beziehungsweise den zu erwartenden Fehler vorsteuern [29–32].

Darüber hinaus existieren etliche weitere Regelungsmethoden für die Regelung umrichterbetriebener Antriebe, die von P. Cortés et al. in [33] wie in Abbildung 1.4 dargestellt, klassifiziert wurden. Zu den jeweiligen Verfahren sind

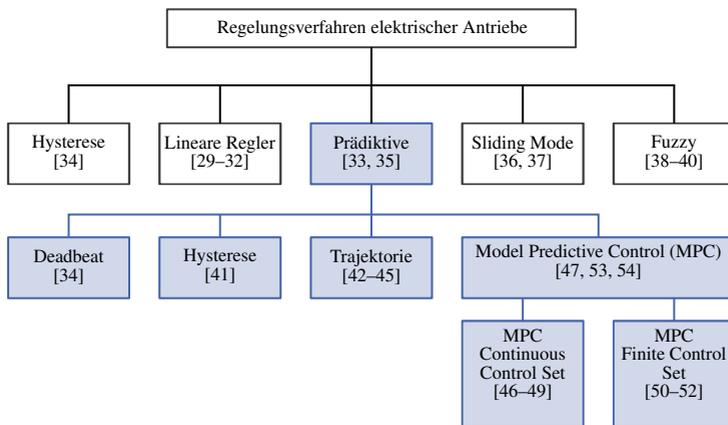


Abbildung 1.4: Klassifizierung verschiedener Arten von Regelverfahren für mit Umrichtern betriebene Antriebe. Die Familie der prädiktiven Regelungen ist blau dargestellt.

in den Kästchen in Abbildung 1.4 eine Auswahl von Veröffentlichungen angegeben. Da das in dieser Arbeit behandelte Verfahren der Adaptiven Direkten Stromregelung zu den prädiktiven Regelungsverfahren zählt, werden im nächsten Abschnitt die in der elektrischen Antriebstechnik verwendeten prädiktiven Regelungsverfahren nach der Einteilung von [33] in ihrer prinzipiellen Funktionsweise vorgestellt und die wesentlichen Eigenschaften benannt, nach denen eine Einordnung der ADSR anhand der Struktur aus Abbildung 1.4 erfolgen kann. Die Einordnung selbst erfolgt dann nach der Vorstellung der ADSR in Abschnitt 2.1.2.

## 1.2.2 Prädiktive Regelungsverfahren

Das Hauptmerkmal eines prädiktiven Reglers ist die Vorhersage des zukünftigen Verhaltens der Regelgröße und eine durch diese Information beeinflusste Berechnung der Stellgröße. Wie die Vorhersage getroffen wird und wie die Vorhersage den Regelalgorithmus beeinflusst, hängt von der Art des prädiktiven Reglers ab. Üblicherweise wird ein zuvor definiertes Optimierungskriterium zur Berechnung der bestmöglichen Systemantwort verwendet.

Bei Hysterese-Reglern wäre beispielsweise das Optimierungskriterium, dass die Regelgröße innerhalb eines zuvor definierten Toleranzbandes, beziehungsweise eines Toleranzbereichs bleibt. Bei den Trajektorienreglern soll hingegen die Regelgröße einer zuvor ausgewählten Trajektorie folgen. Bei Deadbeat-Reglern besteht das Optimum darin, die Stellgröße so auszuwählen, dass der Regelfehler im nächsten Takt bereits stationär genau Null ist. Bei Modellprädiktiven Regelungen (MPC) kann das Optimierungskriterium etwas flexibler gestaltet werden, da hier ein meist aufwändiges und damit auch sehr genaues Modell der Strecke vorliegt, das die Anwendung von Optimierungsrechnungen mit zuvor definierten Kostenfunktionen gestattet. Damit kann die Regelung beispielsweise hinsichtlich minimaler Verluste, maximaler Dynamik, geringster Geräuschemissionen des Antriebs, etc. durch die Auswahl einer entsprechenden Kostenfunktion optimiert werden.

Ein häufig anzutreffendes Kriterium zur Klassifizierung der Verfahren ist die Verwendung einer festgelegten Taktfrequenz. Die Deadbeat-Regler und auch die MPC mit Continuous Control Set berechnen jeweils den Aussteuergrad für den nächsten Takt, der dann in einem Modulator mit Trägersignal und fester Taktfrequenz in die entsprechenden Schaltsignale übersetzt wird.

Bei den Hysterese- und Trajektorienreglern und bei der MPC mit Finite Control Set werden hingegen die Schaltsignale unabhängig von einem festen Takt, dafür aber optimal für das zugrunde liegende Optimierungskriterium berechnet und direkt zum Schalten der Leistungshalbleiter verwendet. Ein Trägersignal fester Frequenz wird hierbei nicht verwendet, so dass die Schaltfrequenz variabel gestaltet werden kann.

Je nach Verfahren wird das künftige Verhalten der Strecke über einen oder mehrere Abtastschritte prädiziert. Dieser Zeitraum wird Prädiktionshorizont genannt und ist ein weiteres Klassifizierungsmerkmal prädiktiver Regelungen.

### **Deadbeat-Regler**

In Deadbeat-Reglern wird mit Hilfe eines Modells der Regelstrecke die notwendige Spannung berechnet, die gestellt werden muss, um den Sollwert des zu regelnden Stroms innerhalb des nächsten Taktes stationär genau zu erreichen. Der so berechnete Sollwert der zu stellenden Spannung wird dann mit

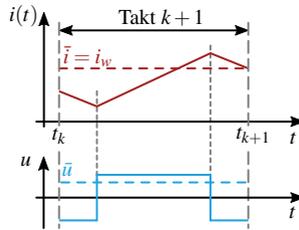


Abbildung 1.5: Prinzip der Deadbeat-Regelung

Hilfe eines Modulators mit fester Taktfrequenz des Trägersignals umgesetzt. Der Deadbeat-Regelung des Stroms einer ohmsch-induktiven Last mit Gegenspannung liegt folgende Gleichung zugrunde:

$$u = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + u_i \quad (1.2)$$

Dabei ist  $u$  die vom Umrichter gestellte Spannung,  $i$  der Strom,  $R$  und  $L$  die Parameter der ohmsch-induktiven Last und  $u_i$  die Gegenspannung. In Abbildung 1.5 ist das Prinzip der Deadbeat-Regelung dargestellt. Mit Kenntnis der Parameter  $L$  und  $R$ , sowie der Gegenspannung und der gewünschten Stromänderung

$$\frac{di}{dt} = \frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{i(t_{k+1}) - i(t_k)}{T_{\text{PWM}}} = \frac{i_w - i(t_k)}{T_{\text{PWM}}} \quad (1.3)$$

kann die notwendige im Takt  $k+1$  zu stellende Spannung  $\bar{u}$  berechnet werden. Was zunächst plausibel und einfach klingt, ist in der praktischen Umsetzung häufig recht heikel und fehleranfällig. Schon geringe Abweichungen der im Modell verwendeten Parameter von den physikalisch vorhandenen Werten, aber auch nicht exakt modellierte und vorgesteuerte Umschaltzeitpunkte und Totzeiten wirken sich stark auf die Stabilität und die Regelgüte der Deadbeat-Regelung aus. Auch ist die Berücksichtigung von Nichtlinearitäten und Begrenzungen schwierig.

Eine der größten Herausforderungen dieser Regelungsart sind in realen Systemen die Totzeiten, die sich durch die Messung und die anschließende

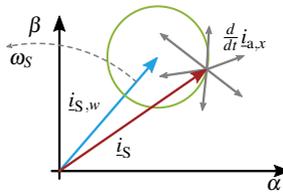


Abbildung 1.6: Veranschaulichung der prädiktiven Hystereseregung nach J. Holtz und Stadtfeld mit kreisförmigem Toleranzgebiet

Sollwertberechnung zwangsläufig ergeben. Der skizzierte prinzipielle Vorgang der Deadbeat-Regelung setzt voraus, dass der Wert des Stroms zum Zeitpunkt  $k$  exakt bekannt ist. Eine Messung in diesem Zeitpunkt liefert den Wert aber erst verzögert um die Latenz der Messung und A/D-Wandlung, also zeitlich nach  $t_k$ . Hinzu kommt die Rechenzeit für den Deadbeat-Algorithmus. Der Aussteuergrad für den Takt  $k+1$  muss aber bereits im Zeitpunkt  $t_k$  bekannt sein und wird darum im Takt  $k$  berechnet. Aus diesen Gründen wird der Wert  $i(t_k)$  durch Extrapolation aus dem Wert des Stroms aus dem Takt  $k-1$  berechnet. Geringe Ungenauigkeiten dieser Extrapolation führen aber schon zu deutlichen Abweichungen.

### Prädiktive Hystereseregler

Prädiktive Hystereseregler versuchen die Regelgröße innerhalb eines zuvor definierten Toleranzbereichs zu halten. Einfache Zweipunktregler tun das zwar auch, werden aber aufgrund der fehlenden Prädiktion des Systemverhaltens normalerweise nicht zu den prädiktiven Reglern gezählt. Eine Erweiterung eines Zweipunktreglers um eine Prädiktion stellt die von Holtz und Stadtfeld vorgestellte Regelung dar, die hier als Beispiel für einen prädiktiven Hystereseregler vorgestellt wird [41]. Dabei wird um den Stromsollwert in der komplexen Stromraumzeiger-Ebene ein Toleranzgebiet gelegt (siehe Abbildung 1.6). Solange der Stromraumzeiger  $i_S$  innerhalb des Toleranzgebiets bleibt, wird nicht umgeschaltet. Sobald er jedoch die Grenze des Toleranzgebiets berührt, wird der nächste Schaltzustand auf Basis einer Prädiktion und Optimierung geschaltet. Die Prädiktion berechnet hierbei für jeden möglichen

Schaltzustand die Zeit, wie lange der Stromraumzeiger wiederum im Toleranzgebiet um den (sich bewegenden) Sollwert verbleiben würde. Die Optimierung wählt dann denjenigen Schaltzustand aus, bei dem der Stromraumzeiger am längsten innerhalb des Toleranzgebiets verbleibt, um so die Anzahl der Schaltvorgänge und damit die Schaltverluste zu minimieren. Die Taktfrequenz ist dadurch nicht konstant und es wird auch kein dedizierter Modulator benötigt.

### **Prädiktive Trajektorienregler**

Bei den Trajektorienreglern werden die Systemvariablen auf im Voraus berechneten Trajektorien geführt. Zu diesen Verfahren zählt beispielsweise die Direkte Selbstregelung nach Depenbrock [42] oder auch die "Direct mean torque control"(DMTC) nach Flach [43]. Andere Regelungsverfahren, wie etwa die „Sliding Mode“ Regler [55, 56] oder auch die Direkte Selbstregelung nach Takhashi (Direct Torque Control - DTC) [44] sind Kombinationen aus Hysterese- und Trajektorienregelungen. Die Direkte Drehzahlregelung (Direct Speed Control - DSPC) nach Mutschler [45] zählt ebenfalls zu den Trajektorienregelungen und wird an dieser Stelle als Beispiel für diese Regelungsverfahren kurz vorgestellt. Bei der DSPC wird der Sollwert der Drehzahl direkt mit den Schaltzuständen in Zusammenhang gebracht. Diese werden nach ihrer Wirkung auf das Drehmoment in „Drehmoment erhöhende“ und „Drehmoment verringernde“ Schaltzustände eingeteilt. Für kurze Zeitabschnitte werden die resultierenden Drehmomente als konstant angenommen und das resultierende Systemverhalten kann durch liegende Parabeln in einem Koordinatensystem beschrieben werden, in dem die Beschleunigung  $\dot{\omega}$  über dem Drehzahlfehler  $\omega_e$  aufgetragen wird (siehe Abbildung 1.7). Ausgehend vom Punkt A wird der Drehmoment erhöhende Schaltzustand  $S_A$  geschaltet und der Betriebspunkt bewegt sich entlang der rot dargestellten Trajektorie bis zum Punkt B. Hier wird die Trajektorie des Drehmoment verringernden Schaltzustands  $S_B$  geschnitten. Diese führt schnellstmöglich durch den Punkt +H und wird darum als nächste Trajektorie nach dem Schaltzustand  $S_A$  durch Vorausberechnung ausgewählt und die Umschaltung in den Schaltzustand  $S_B$  im Punkt B veranlasst. Der Betriebspunkt wandert dann entlang der orangenen Trajektorie durch den Punkt +H bis in den Punkt C. Dort wird wiederum eine Umschal-

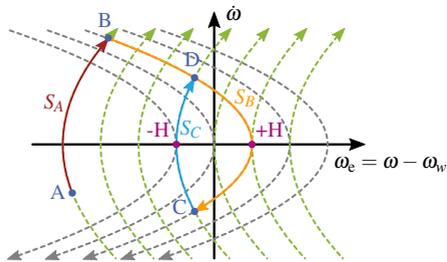


Abbildung 1.7: Veranschaulichung einer prädiktiven Trajektorienregelung

tion in den Drehmoment erhöhenden Schaltzustand  $S_C$  veranlasst. Entlang der hellblauen Trajektorie wandert der Betriebspunkt nun wieder in den Punkt D. Zwischen den Punkten D und C kann der Betriebspunkt nun durch abwechselndes Schalten der Schaltzustände  $S_B$  und  $S_C$  in einem Hystereseband, das durch die beiden Punkte  $+H$  und  $-H$  begrenzt ist, um den Sollwert herum stationär genau gehalten werden.

### Modellprädiktive Regler (MPC)

Bei den Modellprädiktiven Regelungen wird das Verhalten der Regelstrecke mit einem meist zeitdiskreten Modell der Regelstrecke in Abhängigkeit der unterschiedlichen Eingangsgrößen vorausberechnet. Dabei können hierbei auch mehrere Eingangsgrößen gleichzeitig berücksichtigt werden. Zur Vorausberechnung werden sowohl vergangene, als auch die vorgeschlagenen zukünftigen Eingangsgrößen verwendet. Die grundsätzliche Struktur einer MPC ist in Abbildung 1.8 dargestellt. Das vorausberechnete Systemverhalten kann mit Hilfe festzulegender Kostenfunktionen und gegebener Beschränkungen bewertet werden und somit eine optimale Betriebsstrategie realisiert werden.

Die Vorausberechnung ist dabei nicht auf den nächsten Abtastschritt beschränkt, sondern kann prinzipiell beliebig viele zukünftige Abtastschritte umfassen, wobei allerdings der Rechenaufwand sehr stark ansteigt. In elektrischen Antrieben beträgt der Prädiktionshorizont deshalb meist nur wenige Abtastschritte, da die bei Umrichtern relativ hohe Abtastfrequenz bei gleich-

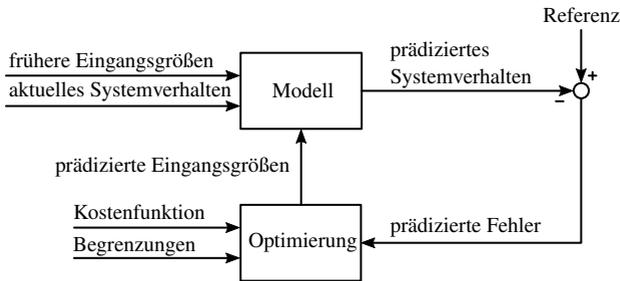


Abbildung 1.8: Grundsätzliche Struktur einer Modellprädiktiven Regelung

zeitig hohem Rechenaufwand eine längerfristige Prädiktion nicht zulässt. Dennoch hat die MPC mit der gestiegenen Leistungsfähigkeit der Signalverarbeitung in den letzten Jahren zunehmend Bedeutung in der Regelung von elektrischen Antrieben erlangt.

Die Familie der MPC-Regelungen werden abhängig von ihrer Reglerausgangsgröße in zwei Klassen eingeteilt. MPC-Regelungen, die direkt die Schaltzustände des Umrichters steuern, werden als MPC mit „Finite Control Set“ (MPC-FCS) bezeichnet. Diese Verfahren nutzen den Vorteil aus, dass ein Umrichter immer nur eine diskrete und vor allem begrenzte Zahl an Schaltzuständen besitzt. Damit werden die Möglichkeiten, die der Optimierer berechnen muss, deutlich eingegrenzt und Rechenkapazität kann eingespart werden. Da diese Verfahren direkt die Schaltzustände berechnen und auswählen, benötigen sie keinen Modulator und können auch die Taktfrequenz frei einstellen, beziehungsweise bei der Optimierung mit berücksichtigen und variabel gestalten.

MPC-Regelungen, die ein kontinuierliches Signal ausgeben, werden als MPC mit „Continuous Control Set“ (MPC-CCS) klassifiziert. Ein sehr häufiges kontinuierliches Ausgangssignal ist beispielsweise der zu stellende Mittelwert der Spannung im nächsten PWM-Takt. Dieser muss durch einen Modulator allerdings erst noch in die Schaltzustände und die Schaltzeitpunkte umgesetzt werden, weshalb ein Merkmal dieser Klasse die Verwendung eines Modulators ist. Die Taktfrequenz ist damit ebenfalls festgelegt.

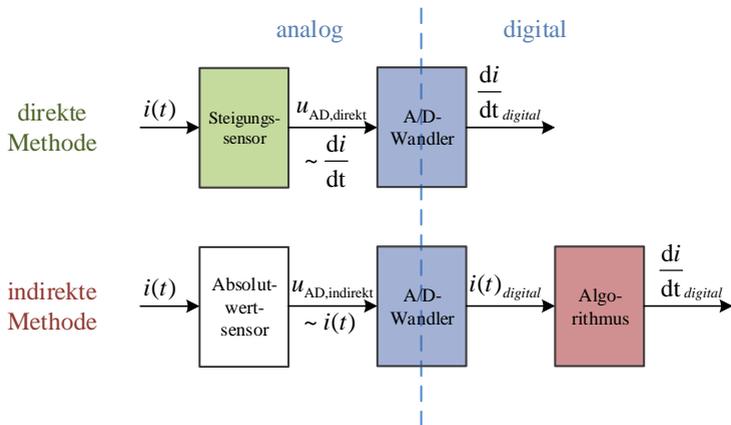


Abbildung 1.9: Unterschied zwischen direkter und der indirekter Messung der Stromsteigungen

### 1.2.3 Methoden zur Identifikation der taktfrequenten Stromsteigungen

Die Messung der schaltzustandsabhängigen Stromsteigungen kann auf sehr unterschiedliche Weise bewerkstelligt werden. Motiviert durch die Anwendung der Adaptiven Direkten Stromregelung, Verfahren zur Online Parameter-Identifikation und zur gerberlosen Regelung, werden am Elektrotechnischen Institut verschiedene unterschiedliche Ansätze untersucht. Der in dieser Arbeit vorgestellte LS-Schätzer ist nur eines dieser Verfahren. Ein Überblick über die verschiedenen Methoden ist in [E4] veröffentlicht. Darin werden die unterschiedlichen Verfahren in direkte und indirekte Verfahren zur Stromsteigungsmessung eingeteilt. Die Unterscheidung wird dabei an dem Signal festgemacht, das dem A/D-Wandler zur Digitalisierung übergeben wird (siehe Abbildung 1.9).

Kennzeichnend für die direkten Methoden zur Stromsteigungsidentifikation ist, dass dem A/D-Wandler ein Spannungssignal übergeben wird, das idealerweise direkt proportional zur Stromsteigung ist. Der Vorteil dieser Methoden liegt darin, dass in der digitalen Signalverarbeitung direkt das digitale Signal der Stromsteigung vorliegt. Voraussetzung ist allerdings, dass ein entsprechen-

der Sensor verwendet wird, der die Stromsteigung auch in ein entsprechendes stromsteigungsproportionales Signal für den A/D-Wandler übersetzen kann. Es wird also ein separater, spezieller Stromsteigungssensor benötigt.

Die indirekten Methoden hingegen benötigen keinen speziellen Sensor, sondern verwenden das Strommesssignal, das ohnehin in der Signalverarbeitung vorhanden ist. Der Vorteil ist demnach, dass keine zusätzliche Hardware in Form eines solchen Sensors benötigt wird. Um aus dem normalen Strommesssignal allerdings die Steigung zu ermitteln, muss dieses Signal mathematisch verarbeitet werden. Bei diesen Verfahren wird also zumindest freie Rechenkapazität in der Signalverarbeitung benötigt und oftmals auch eine hochfrequente Abtastung des Strommesssignals vorausgesetzt.

Die wichtigsten Herausforderungen an die Messung der Stromsteigungen sind

- Kurze Messintervalle

Speziell bei hohen PWM-Taktfrequenzen, aber auch bei sehr kurzen Aussteuergraden ist die Zeit eines Schaltzustands mitunter sehr kurz. In einer solch kurzen Zeit die Stromsteigung zuverlässig zu identifizieren stellt die größte Herausforderung an alle der genannten Messverfahren dar. Zudem ist das Signal in den kurzen Schaltzustandsintervallen auch noch stark von Störungen von den noch kurz zuvor stattgefundenen Schalthandlungen der Leistungshalbleiter überlagert.

- Überlagerte Störungen

Bei den modernen Leistungshalbleitern werden die Schaltzeiten immer kürzer und die durch die hohe Flankensteilheit hervorgerufenen Störungen immer stärker. Ein Strommesssignal in einem realen Umrichter ist daher immer stark von Störungen überlagert.

- Kostendruck

Dieser Aspekt spielt zwar in der Forschung zunächst eine eher untergeordnete Rolle, sollte aber immer als wichtiges Kriterium für eine realistische Implementierung mit berücksichtigt werden.

In den folgenden Unterabschnitten werden einige der Verfahren kurz beschrieben, um den Stand der Technik auch in diesem Themengebiet darzustellen.

## Direkte Methoden

Bei den direkten Methoden werden die Stromsteigungen direkt mit einem speziellen Sensor in ein stromsteigungsproportionales Signal umgesetzt. Hierfür werden beispielsweise Sensorspulen gegenüber der stromführenden Stromschiene innerhalb des Gehäuses des Sensors angebracht und das dadurch induzierte stromsteigungsproportionale Spannungssignal mit einer integrierten Verstärkerschaltung verstärkt und ausgegeben [E2, S2]. Die Dynamik dieser Methode hängt dabei wesentlich von der Eigeninduktivität der Sensorspule ab. Je größer diese ist, desto größer ist aber auch die durch die Stromänderung hervorgerufene induzierte Spannung und die nachgelagerte Verstärkung kann kleiner ausfallen, was üblicherweise auch in einem geringeren Rauschanteil des Ausgangssignals resultiert. Vergleichende Messungen mit einem Prototypen der Firma Sensitec und selbst aufgebauten Sensoren und Verstärkerschaltungen zeigen allerdings, dass es mit den aktuell am Markt verfügbaren Operationsverstärkern günstiger ist, eine große Verstärkung in der Verstärkerschaltung einzuplanen und die Eigeninduktivität der Sensorspule für eine hohe Dynamik gering zu halten [E2, S2, S10].

Dies führt zum nächsten Verfahren, bei welchem die Sensorspule nicht im Gehäuse des Stromsensors, sondern direkt in Zwischenlagen in der Leiterplatte selbst integriert wird (siehe Abbildung 1.10). Bei dieser Realisierung ist die Eigeninduktivität sehr gering, die erreichbare Dynamik deshalb sehr hoch. Durch die Integration in die Leiterplatte sind bei dieser Methode auch die Kosten des Stromsteigungssensors sehr gering, insbesondere wenn es gelingt ein Design zu finden, bei dem diese Art der Sensoren bereits auf der Leiterplatte des Umrichters selbst integriert werden kann. Erste Prototypen eines solchen Umrichters sind aktuell am Elektrotechnischen Institut in der Design-Phase.

Ebenfalls zu den direkten Methoden zählen analoge Differenziererschaltungen, die die Ableitung des analogen Strommesssignals berechnen [6]. Diese Schaltungen erledigen ihre Aufgabe der Differentiation sehr gut, sind aber gerade deshalb sehr sensitiv gegenüber der Signalqualität des vorgelagerten Stromwandlers. Außerdem haben auch diese Schaltungen immer eine Einschwingzeit, bis der Wert für die Steigung stationär genau am Ausgang an-

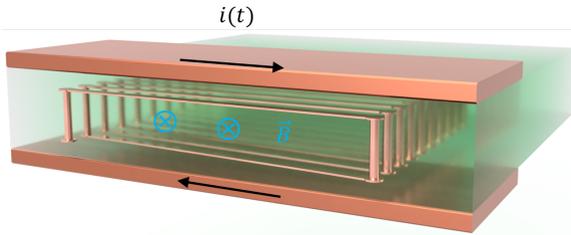


Abbildung 1.10: 3D-Skizze einer mittels Durchkontaktierungen und Leiterbahnen in den Mittenschichten einer gedruckten Leiterplatte integrierten, planaren Sensorspule (Quelle: [S10])

liegt, was wiederum bei kurzen Aussteuergraden und hohen Taktfrequenzen zu unbrauchbaren Messwerten führt.

### Indirekte Methoden

Die einfachste indirekte Methode zur Bestimmung der Stromsteigungen besteht darin, das Strommesssignal kurz nach Beginn eines Schaltzustands und ein zweites mal kurz vor dessen Ende abzutasten und über diese zwei Punkte mittels einer Geradengleichung die Steigung zu berechnen. Diese „2-Punkte-Methode“ funktioniert allerdings nur bei sehr glatten Signalen gut und ist damit für die Stromsteigungsidentifikation in realen Stromrichtern ungeeignet.

Eine weit verbreitete und sehr gut funktionierende Methode ist die Verwendung eines Least-Squares-Schätzers der das stark überabgetastete Strommesssignal filtert und neben der Steigung auch den Absolutwert des Stroms gefiltert zur Verfügung stellt. Damit dieses Verfahren angewendet werden kann, wird zwar kein besonderer Stromwandler benötigt. Allerdings wird eine hochfrequente Überabtastung des Strommesssignals und eine Signalverarbeitungs Umgebung, die die Implementierung des LS-Algorithmus ermöglicht, vorausgesetzt. Zur Berechnung des LS-Verfahrens existieren etliche Algorithmen, die teilweise recht umfangreiche mathematische Rechenoperationen erfordern, beispielsweise Verfahren zur QR-Faktorisierung und Singulärwertzerlegung, aber auch zur Matrizen-Konditionierung [E5, 57, 58], so dass die Implementierung in Echtzeitsystemen eine Herausforderung darstellt. Diese Verfahren besitzen

allerdings die Vorteile, dass sie allgemein gültig sind und auf sehr unterschiedliche Messdaten und deren Filterung angewendet werden können.

Die Identifikation der schaltzustandsabhängigen Stromsteigungen in Stromrichtern stellen jedoch einen Spezialfall dar, der die Verwendung von relativ einfachen LS-Verfahren erlaubt, wenn folgende Annahmen gelten:

1. Die Messwerte werden äquidistant abgetastet.
2. Die maximale Länge und damit die maximale Anzahl an Messwerten eines Messintervalls ist begrenzt.
3. Die Anzahl der Messwerte eines Messintervalls ist bereits vor Beginn der Messung bekannt.

In Stromrichteranwendungen sind diese Kriterien durch die Verwendung von A/D-Wandlern mit konstanter Abtastrate (Punkt 1), die Kenntnis der PWM-Periodendauer (Punkt 2) und das Wissen über die Aussteuergrade eines jeden Taktes bereits bei Taktbeginn (Punkt 3) alle erfüllt.

Dann kann ein LS-Verfahren angewendet werden, das letztlich nur aus einem reinen Skalarprodukt der Messwerte mit zuvor berechneten Konstanten besteht, so dass sich der Rechenaufwand im Betrieb auf eine Multiplikation und eine Addition pro Messwert beschränkt [1, 18, 19, 57–59]. Dieses Skalarprodukt wird darum auch direkt in Echtzeit mit der Abtast-Rate des A/D-Wandlers durchgeführt, so dass das vollständige Ergebnis in Form der Steigung und des Absolutwerts nur einen FPGA-Takt nach dem letzten Messwert vorliegt.

In bisherigen Implementierungen dieses LS-Verfahrens wurden die Konstanten mit komplexen Matrizenoperationen berechnet, was eine Berechnung in Echtzeit im Betrieb unmöglich machte. Sie wurden darum offline vorausberechnet und in einen Speicher abgelegt. Der Bedarf an Speicherzellen ist dadurch allerdings sehr groß und die Speicherung der Konstanten zusammen mit dem eigentlichen LS-Algorithmus in einem FPGA ist nicht möglich, so dass externe Speicherbausteine notwendig sind [1, 18, 19, 59].

Ein wesentlicher Beitrag der vorliegenden Arbeit besteht in der Vorstellung eines neuen, effizienten und ressourcensparenden Verfahrens zur Implementierung des LS-Algorithmus zur Identifikation der schaltzustandsabhängigen

Stromsteigungen (siehe Kapitel 4). Es wird in dieser Arbeit gezeigt, dass die Konstanten nicht mit komplexen Matrizenoperationen, sondern auch relativ einfach im Betrieb berechnet werden können [E3]. Dadurch wird die offline Vorausberechnung und die Verwendung externer Speicherbausteine hinfällig und der Algorithmus kann sehr platzsparend und effizient auf einem FPGA implementiert werden. Eine detaillierte Diskussion über das LS-Verfahren allgemein, sowie die vollständige Herleitung und Beschreibung des neuen Verfahrens ist in Kapitel 4 enthalten.

### „Easy Current Slope Detection“

Parallel zu dieser Arbeit wurde ein neues, indirektes Verfahren entwickelt, das die Identifikation der Stromsteigungen in DC/DC-Stellern mit einfachster Hardware (ein Mikrocontroller des Typs dsPIC30F3010 von Microchip) ermöglicht. Es ist damit möglich den DC/DC-Steller stabil und hochdynamisch mit Deadbeat-Verhalten bei einer Taktfrequenz von 100 kHz mit dem Prinzip der Adaptiven Direkten Stromregelung und ohne jegliche Parametrierung zu regeln [E1, S1].

Im ersten Versuch wurde hierfür die Implementierung einer Überabtastung versucht, was jedoch mit der Standard-Modulation nicht gut funktionierte [S8, S9]. Erst der Kunstgriff, eine symmetrische Dreiecksmodulation so zu verändern, dass der Aussteuergrad *innerhalb* eines PWM-Taktes nicht konstant ist, sondern während der steigenden Flanke des Dreieckssignals einen anderen Wert besitzt als während der fallenden Flanke, führte zum Erfolg. Es wird also künstlich ein Jitter implementiert, der dazu führt, dass die Steigung des Stromes durch alleinige Messung der Stromwerte im Maximum und im Minimum des PWM-Dreieckssignals berechenbar wird. Da diese Messzeitpunkte in den meisten Mikrocontrollern als Standardmesszeitpunkten vorgesehen sind, ist dieses Verfahren auch mit sehr günstiger Hardware realisierbar.

Dieses Verfahrens wird in der vorliegenden Arbeit nicht näher behandelt, da dessen Fokus auf hochfrequent getakteten DC/DC-Stellern liegt und zu weit weg vom Thema der Stromänderungsparameter in Drehstrommaschinen führt. Es wird darum an dieser Stelle lediglich auf die diesbezüglichen Veröffentlichungen hingewiesen [E1, S1].

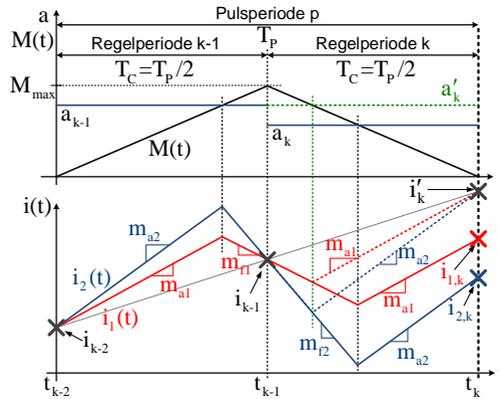


Abbildung 1.11: Prinzip der „Easy Current Slope Detection“ - Durch die Variation des Aussteuergrades *innerhalb* einer PWM-Taktperiode von der steigenden zur fallenden Flanke des PWM-Trägersignals wird bei unterschiedlichen Stromsteigungen der Schaltzustände auch ein unterschiedlicher Wert  $i_k$  bewirkt, der einen Rückschluss auf die Steigungen  $m_a$  und  $m_f$  der beiden Schaltzustände zulässt [E1].

### 1.3 Zielstellung und Gliederung der Arbeit

Die Ziele dieser Arbeit sind zum Einen das Prinzip der Adaptiven Direkten Stromregelung, das in [1] für die isotrope Synchronmaschine entwickelt wurde, auch für anisotrope Synchronmaschinen anwendbar zu machen. Zur Erreichung dieses Ziels wird eine neue, erweiterte und universelle Darstellung der Stromsteigungen in Drehstromsynchronmaschinen vorgestellt, die sowohl die Stromänderungen in anisotropen und in isotropen Synchronmaschinen abdeckt und komplett geschlossen analytisch beschreibbar macht.

Zum Anderen soll die Ertüchtigung des Verfahrens für in modernen elektrischen Antrieben übliche PWM-Taktfrequenzen und mit gängiger Signalverarbeitungs-Hardware erreicht werden. Hierzu wird die Abtastrate des A/D-Wandlers erhöht, um in der Antriebstechnik gebräuchliche PWM-Taktfrequenzen verwenden zu können und dennoch eine deutliche Überabtastung des Strommesssignals zu gewährleisten. Außerdem soll sowohl der LS-Schätzer, als auch der vollständige Algorithmus der neuen Darstellungsform der Stromänderungsparameter kompatibel zu bestehenden Umrichter-

Steuerungen neu in einem FPGA implementiert werden. Als Schnittstelle zur Regelung sollen lediglich die drei Halbbrücken-Aussteuergrade dienen, so dass die Stromsteigungsidentifikation im FPGA der Signalverarbeitungsplattform parallel zu bestehenden Regelungen und auch unabhängig von der Modulation betrieben werden kann. Damit dies ermöglicht werden kann, wird eine neue effiziente Methode zur Implementierung eines Least-Squares-Schätzers zur Berechnung der schaltzustandsabhängigen Stromsteigungen entwickelt und vorgestellt.

Die Funktion des neuen LS-Schätzers und die Gültigkeit der Darstellungsform der Stromsteigungen sollen anhand von Messungen in einem Antriebsprüfstand unter Beweis gestellt werden.

Der strukturelle Aufbau der vorliegenden Arbeit ist in Abbildung 1.12 dargestellt. In Kapitel 2 werden die theoretischen Grundlagen für das Verständnis der Adaptiven Direkten Stromregelung und der Anwendung derselben in einem umrichter gesteuerten Antrieb gelegt. In Kapitel 3 wird dann die neue Darstellungsform der Stromänderungsparameter für Drehstromsynchronmaschinen hergeleitet und vorgestellt. Das neue Verfahren zur Stromsteigungsidentifikation wird daran anschließend in Kapitel 4 entwickelt. Die Realisierung dieses neuen Verfahrens in dem FPGA der Signalverarbeitung eines Maschinenprüfstands wird in Kapitel 5 vorgestellt. Die Messungen der Stromänderungsparameter nach der in Kapitel 3 vorgestellten Methode und der Steigungsidentifikation des LS-Schätzers nach Kapitel 4 werden in Kapitel 6 beschrieben. Eine Zusammenfassung und ein Ausblick in Kapitel 7 schließen dieses Buch ab.

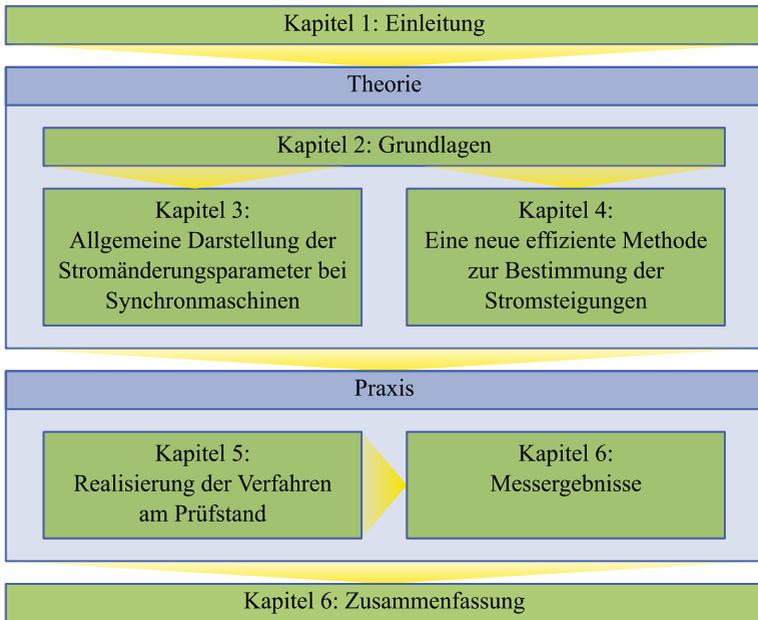


Abbildung 1.12: Struktureller Aufbau dieses Buches



# 2

## Grundlagen

*“Wenn über das Grundsätzliche keine Einigkeit besteht, ist es sinnlos, miteinander Pläne zu machen.”*

Konfuzius, chinesischer Philosoph

Die beiden zentralen Inhalte der vorliegenden Arbeit sind zum Einen die Anwendbarkeit des Regelungsverfahrens der „Adaptiven Direkten Stromregelung“ (ADSR) für magnetisch anisotrope Synchronmaschinen und zum Anderen ein neues, effizientes Verfahren zur Identifikation der Stromsteigungen in Drehstromanwendungen. Für die Herleitung und Beschreibung dieser Inhalte werden in diesem Kapitel die Grundlagen gelegt und etliche benötigte Begriffe definiert und besprochen.

Im ersten Abschnitt wird das Verfahren der Adaptiven Direkten Stromregelung vorgestellt und am Beispiel eines Tiefsetzstellers erläutert und das zentrale Konzept der „Stromänderungsparameter“ eingeführt. Das neuartige Regelungsverfahren der Adaptiven Direkten Stromregelung ist Motivation, Klammer und Ausrichtung für dieser Arbeit. Alle Aspekte, die in dieser Arbeit entwickelt werden, haben stets die Anwendbarkeit der ADSR bei realen Taktfrequenzen, üblicher Messtechnik im Zusammenspiel mit gängigen Signalverarbeitungssystemen, sowie anisotroper Synchronmaschinen im Blick. Im zweiten Abschnitt werden Begriffe und Verfahren eines umrichter gesteuerten Drehstromsystems eingeführt, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit immer wieder benötigt werden. Die in diesem Abschnitt beschriebene Drehstrombrückenschaltung, das Modulationsverfahren und alle Begrifflichkeiten wurden letztlich genau so auch im Prüfstand umgesetzt, so dass das Kapitel 5 und die vorgestellten Messergebnisse direkt auf diesem Grundlagenkapitel aufbauen.

## 2.1 Das Adaptive Direkte Stromregelverfahren

Die grundlegende Idee der Adaptiven Direkten Stromregelung besteht darin, die zu regelnden Ströme nicht über den Umweg eines Modells der zu regelnden Strecke und die an die Strecke anzulegende Spannung einzustellen, sondern direkt die Änderung des Stromes in Zusammenhang zu den Eingriffsmöglichkeiten des verwendeten Stellgliedes zu setzen.

In getakteten Stromrichterschaltungen besteht das Stellglied immer aus einem oder mehreren Leistungshalbleitern, und die Eingriffsmöglichkeiten bestehen ausschließlich darin, diese entweder ein- oder auszuschalten. Je nach Schaltzustand der einzelnen Leistungshalbleiterschalter und der Topologie des Stromrichters, wird dadurch eine spezifische, schaltzustandsabhängige Spannung an die Strecke angelegt. Daraus resultiert dann für jeden Schaltzustand eine individuelle Änderungsrate des Stromes, die von der geschalteten schaltzustandsabhängigen Spannung und der Strecke im aktuellen Betriebspunkt abhängt. Üblicherweise erfolgt das abwechselnde Schalten der möglichen Schaltzustände in festen Zeitintervallen, die als Taktperioden bezeichnet werden. Innerhalb eines Taktes können dann die möglichen Schaltzustände anteilig geschaltet werden. Mit der Kenntnis des Istwerts des Stromes zu Beginn einer Taktperiode und der schaltzustandsabhängigen Stromänderungsrate kann dann die notwendige Dauer der einzelnen Schaltzustände berechnet werden, um einen vorgegebenen Stromsollwert innerhalb dieses Taktes zu erreichen. Dieses Verfahren wurde erstmals am Elektrotechnischen Institut für die adaptive Regelung eines Tiefsetzstellers entwickelt und vorgestellt [24]. Die Anwendung dieser Idee auf eine isotrope Synchronmaschine erfolgte in [18] und [19]. Darin wurden bereits zwei mögliche Regelungsverfahren, ein PI-Regler und ein P-Regler, vorgestellt. In [1, 20] sowie in [21, 59] wurde das Verfahren weiterentwickelt und das wichtige Konzept der sogenannten Stromänderungsparameter für die Anwendung in Drehstromsystemen, speziell für die Regelung einer isotropen Synchronmaschine eingeführt.

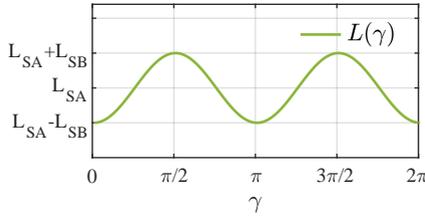


Abbildung 2.1: Prinzipielle Darstellung der Winkelabhängigkeit der Luftspaltfeldinduktivität einer magnetisch anisotropen Synchronmaschine

In der vorliegenden Arbeit wird eine erweiterte Beschreibung der Stromänderungsparameter vorgestellt, die auch magnetisch anisotrope Synchronmaschinen abdeckt. Damit wird auch die Anwendung der ADSR für anisotrope Synchronmaschinen möglich, was mit der Beschreibung der Stromänderungsparameter aus [1] nicht möglich ist. Bei diesen Maschinen sind die resultierenden Induktivitäten richtungsabhängig von dem Rotorlagewinkel

$$\gamma = p \cdot \beta \quad (2.1)$$

der Maschine. Bei einer einpoligen Maschine mit der Polpaarzahl  $p = 1$  entspricht er gerade dem mechanischen Rotorlagewinkel  $\beta$ . Eine detaillierte Beschreibung dieser Winkelabhängigkeit erfolgt in Kapitel 3. Grundsätzlich kann diese Winkelabhängigkeit der Luftspaltfeldinduktivität für die erste Harmonische als Überlagerung eines konstanten Anteils  $L_{SA}$  und einen sinusförmigen Wechselanteils  $L_{SB}$  beschrieben werden (siehe Abbildung 2.1)[60–64]. Diese Winkelabhängigkeit führt dazu, dass die Stromänderungen wegen

$$\frac{di}{dt} = \frac{u}{L(\gamma)} \quad (2.2)$$

ebenfalls richtungsabhängig vom Rotorwinkel der Maschine sind. Die genaue Analyse der Stromänderungsparameter in Kapitel 3 führt auf eine mathematische Beschreibung, die zum Einen die Stromänderungsparameter der anisotropen Synchronmaschine analytisch darstellt und zum Anderen die Stromänderungsparameter der isotropen Synchronmaschine ebenfalls mit

abdeckt. Sie stellt gewissermaßen eine allgemeinere Beschreibung der Stromänderungsparameter dar, die bei Einsetzen der Maschinenparameter der isotropen Synchronmaschine (oder auch der Asynchronmaschine) wieder der Beschreibung der Stromänderungsparameter der rein isotropen Synchronmaschine entspricht.

### 2.1.1 Das Adaptive Direkte Stromregelverfahren am Beispiel eines Tiefsetzstellers

Das grundsätzliche Prinzip der ADSR kann am besten mit einem einfachen Tiefsetzsteller erläutert werden. Die zugrunde liegende Schaltung ist in Abbildung 2.2 abgebildet. Direkt darunter ist ein typischer Kurvenverlauf des Stromes während zweier aufeinanderfolgender Takte dargestellt. Der Leistungshalbleiter  $S$  wird in jedem Takt für eine bestimmte Zeitdauer eingeschaltet, die von 0 bis zur vollständigen Periodendauer  $T_{\text{PWM}}$  eingestellt werden kann. Diese Art der Modulation der Einschaltdauer der Leistungshalbleiter ist unter dem Namen PWM in der Leistungselektronik bekannt.

Mit dem Kehrwert der Periodendauer ergibt sich die verwendete Taktfrequenz der PWM

$$f_{\text{PWM}} = \frac{1}{T_{\text{PWM}}} \quad (2.3)$$

Die Einschaltdauer des Schalters  $T_a$  während eines Taktes wird üblicherweise nicht absolut angegeben, sondern auf die Periodendauer  $T_{\text{PWM}}$  der PWM bezogen und als relative Einschaltdauer  $a$  bezeichnet:

$$a = \frac{T_a}{T_{\text{PWM}}} \in \{0 \dots 1\} \quad (2.4)$$

Diese Größe wird auch als Aussteuergrad oder Tastverhältnis bezeichnet. Da in einem Takt der PWM die maximale realisierbare Einschaltzeit gerade der Periodendauer selbst entspricht, liegt  $a$  immer zwischen 0 und 1. Aus diesem Grund wird der Aussteuergrad auch häufig in Prozent angegeben. Bei großen Sollwertsprüngen oder auch bei abrupten Lastwechseln oder Störgrö-

Benaufschaltungen liegt der Sollwert oftmals außerhalb des in einem Takt erreichbaren Bereichs. Dann wird der Regelalgorithmus in der Regel einen größeren Wert als 1 für den Aussteuergrad des nächsten Taktes fordern. Da dies physikalisch nicht möglich ist, muss dieser dann auf den maximal möglichen Wert begrenzt werden oder die Periodendauer dynamisch angepasst werden. Meist wird die Periodendauer allerdings nicht verändert, so dass die Begrenzung auf den maximal möglichen Aussteuergrad wirksam wird. Das Verhalten der Schaltung und der Regelung in einem solchen Fall wird auch als Großsignalverhalten bezeichnet, wogegen das Verhalten mit nicht begrenzten Aussteuergraden, in denen die Begrenzung nicht aktiv wird, als Kleinsignalverhalten bezeichnet wird. Um ausschließlich den eigentlichen Regler charakterisieren zu können sind also unbedingt nur Kleinsignalsprünge des Sollwerts zulässig. Die Charakterisierung des Reglers im Zusammenspiel mit der Begrenzung kann hingegen nur mit Großsignalsprüngen untersucht werden. Für die korrekte Inbetriebnahme der Schaltung ist natürlich aber ein funktionierender Betrieb in beiden Fällen unerlässlich.

Wird nun in der Schaltung aus Abbildung 2.2 der Schalter im Takt  $k$  mit dem Aussteuergrad  $a_k$  betrieben, so wird für die Zeit

$$T_{a,k} = a_k \cdot T_{\text{PWM}} \quad (2.5)$$

die Eingangsspannung  $u_{\text{DC}}$  an die RL-Last angeschlossen. Da in diesem Schaltzustand die Eingangsspannung durch den Leistungshalbleiter *aktiv* an die Strecke angeschlossen wird, wird dieser Schaltzustand auch als *aktiver Schaltzustand* bezeichnet und allgemein mit dem Index „a“ referenziert. Die an der Drossel wirksame Spannung ist dann die Differenz zwischen der Eingangsspannung  $u_{\text{DC}}$  und der Gegenspannung  $u_{\text{g}}$  und die resultierende Stromänderung ist damit:

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{a,k} = \frac{u_L}{L} \Big|_{a,k} = \frac{u_{\text{DC}} - u_{\text{g}}}{L} = \frac{u_{\text{DC}}}{L} - \frac{u_{\text{g}}}{L} \quad (2.6)$$

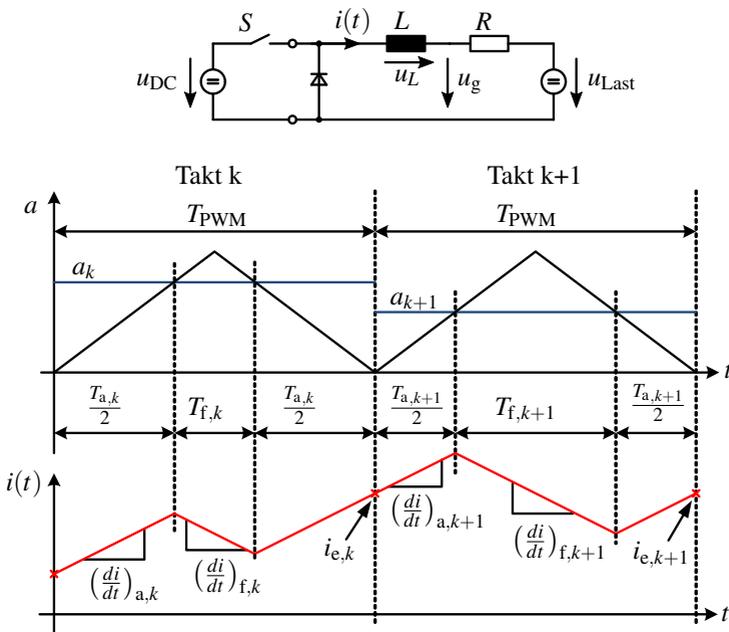


Abbildung 2.2: Prinzip der Adaptiven Direkten Stromregelung

Mit der Gegenspannung  $u_g$  wird die betriebspunktabhängige Spannung der Last beschrieben. Mit ihr werden sowohl der Spannungsabfall am Widerstand  $R$ , als auch die Spannung der Last  $u_{Last}$  zusammengefasst. Im Beispiel mit dem Tiefsetzsteller ist die Eingangsspannung immer größer als die Gegenspannung, so dass in eingeschaltetem Zustand die Spannung über der Drossel ebenfalls größer als Null ist und der Strom  $i(t)$  ansteigt. Für die restliche Zeit der Taktperiode

$$T_{f,k} = (1 - a_k) \cdot T_{PWM} \quad (2.7)$$

ist der Schalter geöffnet und der von der Induktivität getriebene Strom fließt durch die Freilaufdiode. Dieser Schaltzustand wird deshalb auch als *Freilauf* bezeichnet und allgemein mit dem Index „f“ referenziert. Auch hier wird für

das restliche Beispiel des Tiefsetzsteller der Index „off“ beibehalten. Die Spannung über der Induktivität entspricht in diesem Schaltzustand der negativen Gegenspannung. Der Spannungsabfall über der Freilaufdiode und über dem Leistungshalbleiter wird dabei vernachlässigt, da er in sehr vielen Anwendungen deutlich kleiner als die geschaltete Spannung ist.

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{f,k} = \frac{u_L}{L}\Big|_{\text{off},k} = -\frac{u_g}{L} \quad (2.8)$$

Der Strom  $i(t)$  wird entsprechend während der Ausschaltzeit des Schalters wieder kleiner. Üblicherweise ist in leistungselektronischen Schaltungen die Zeitkonstante der RL-Last deutlich größer als die Periodendauer der verwendeten PWM. Der Widerstand in Abbildung 2.2 ist lediglich der parasitäre Widerstand der Zuleitungen und der ohmsche Anteil der Drossel. Mit

$$\tau_{Last} = \frac{L}{R} \gg T_{PWM} \quad (2.9)$$

ist die Stromänderung während der einzelnen Schaltzustände des Stellglieds in guter Näherung linear ansteigend, beziehungsweise linear fallend. Durch Variation des Aussteuergrades ist dann die gezielte Veränderung des Strommittelwerts über einen Takt möglich.

Unter der Voraussetzung einer ausreichend hohen Taktfrequenz kann nun die weitere Annahme getroffen werden, dass sich während zwei aufeinanderfolgenden Takten weder die von außen angelegte Spannung  $u_{DC}$ , noch die Induktivität  $L$ , der Widerstand  $R$  oder die Gegenspannung  $u_{ind}$  signifikant ändern. Dann werden aber auch die Stromänderungen während eines jeden Schaltzustands von zwei aufeinanderfolgenden Takten in guter Näherung gleich groß sein:

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{a,k} \approx \left(\frac{di}{dt}\right)_{a,k+1} \quad (2.10)$$

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{f,k} \approx \left(\frac{di}{dt}\right)_{f,k+1} \quad (2.11)$$

Sind die Steigungen der Ströme für jeden Schaltzustand aus Takt  $k$  bekannt, so kann unter dieser Voraussetzung die notwendige Einschaltdauer der jeweiligen Schaltzustände für Takt  $k + 1$  mittels einer einfachen Geradengleichung berechnet werden. Auf Basis des Istwerts am Ende des Taktes  $k$  wird dadurch der Geradenzug der Stromkurven der einzelnen Schaltzustände beschrieben, wodurch ein geforderter Sollwert  $i_{e,k+1}$  am Ende des Taktes  $k + 1$  erreicht wird (siehe Abbildung 2.2):

$$i_{e,k+1} = i_{e,k} + T_{a,k+1} \cdot \left(\frac{di}{dt}\right)_{a,k} + T_{f,k+1} \cdot \left(\frac{di}{dt}\right)_{f,k} \quad (2.12)$$

Mit Gleichung (2.5) und (2.7) wird die absolute Ein- und Ausschaltzeit durch den Aussteuergrad ersetzt:

$$i_{e,k+1} = i_{e,k} + a_{k+1} \cdot \left(\frac{di}{dt}\right)_{a,k} \cdot T_{\text{PWM}} + (1 - a_{k+1}) \cdot \left(\frac{di}{dt}\right)_{f,k} \cdot T_{\text{PWM}} \quad (2.13)$$

Die einzige Unbekannte in dieser Gleichung ist nur noch der Aussteuergrad  $a_{k+1}$ , der im Takt  $k + 1$  gestellt werden muss, um den Sollwert  $i_{e,k+1}$  zu erreichen. Umstellen von Gleichung (2.13) nach  $a_{k+1}$  ergibt für ihn direkt:

$$a_{k+1} = \frac{i_{e,k+1} - i_{e,k} - \left(\frac{di}{dt}\right)_{f,k} \cdot T_{\text{PWM}}}{\left[\left(\frac{di}{dt}\right)_{a,k} - \left(\frac{di}{dt}\right)_{f,k}\right] \cdot T_{\text{PWM}}} \quad (2.14)$$

Dabei sind die Produkte aus den schaltzustandsabhängigen Stromsteigungen und der PWM-Periodendauer eine charakteristische Größe des jeweiligen Schaltzustands. Sie werden nach [21] als „**Stromänderungsparameter**“  $\Delta i_f$  für die Freilauf-Schaltzustände, beziehungsweise  $\Delta i_a$  für die aktiven Schaltzustände bezeichnet. Der darin enthaltene Begriff „Parameter“ entspricht dabei nicht den üblichen Maschinenparametern, die in vielen Regelungsverfahren benötigt werden. Bei der ADSR werden die neuen Aussteuergrade in jedem Takt jedoch alleine auf Basis der Stromänderungsparameter berechnet. Insofern stellen sie die einzigen Streckenparameter dar, die letztlich auch alle physikalisch vorhandenen Maschinen- und Stromrichterparameter in ihrer Auswirkung auf die schaltzustandsabhängige Stromänderung enthalten.

Der **Freilaufparameter**  $\Delta i_f$  ist also das Produkt aus der Steigung des Stroms im Freilauf und der PWM-Periodendauer:

$$\Delta i_{f,k} = \left( \frac{di}{dt} \right)_{f,k} \cdot T_{\text{PWM}} \quad (2.15)$$

Der Freilaufparameter entspricht durch diese Definition gerade derjenigen Stromänderung, die eintritt, wenn für einen ganzen Takt nur der Freilauf geschaltet wird.

Im aktiven Schaltzustand ist nach Gleichung (2.6) sowohl die angelegte Eingangsspannung  $u_{\text{DC}}$ , als auch die betriebspunktabhängige Gegenspannung  $u_g$  wirksam. Die Differenz aus beiden ergibt die resultierende, die Stromänderung bewirkende Spannung  $u_L$ . Die Stromänderung im aktiven Schaltzustand ist also immer auch von der gerade vorhandenen Gegenspannung und damit vom aktuellen Betriebspunkt abhängig.

Um zu einer Beschreibung der Stromänderung im aktiven Schaltzustand zu gelangen, die unabhängig von der Gegenspannung des jeweiligen Betriebspunkts ist, wird deren Einfluss auf die Stromänderung durch Subtraktion der Stromsteigung im Freilauf von der Stromsteigung im aktiven Schaltzustand herausgerechnet. Dies führt zu folgender Definition der **aktiven Stromänderungsparameter**:

$$\Delta i_{a,k} = \left[ \left( \frac{di}{dt} \right)_{a,k} - \left( \frac{di}{dt} \right)_{f,k} \right] \cdot T_{\text{PWM}} \quad (2.16)$$

$$= \left( \frac{di}{dt} \right)_{a,k} \cdot T_{\text{PWM}} - \Delta i_{f,k} \quad (2.17)$$

Auch der aktive Stromänderungsparameter stellt diejenige Änderung des Stromes dar, die sich ergeben würde, wenn für eine ganze Taktperiode alleine der jeweilige Schaltzustand und die dazu gehörende Spannung an der Induktivität wirksam wäre. Die aktiven Stromänderungsparameter können durch die Subtraktion der Stromsteigung im Freilauf auch so interpretiert werden, als wäre das die Änderung alleine aufgrund der Eingangsspannung bei nicht vor-

handener Gegenspannung. Insbesondere bei der Adaption des Konzepts der Stromänderungsparameter für Drehstromsysteme erweist sich diese Darstellung als besonders günstig, ergibt einfache, geometrische Zusammenhänge und vereinfacht die Berechnung erheblich (siehe Kapitel 3).

Die Stromänderungsparameter können, ebenso wie die Stromsteigungen selbst, aufgrund der oben gemachten Annahmen als im jeweiligen Betriebspunkt näherungsweise konstant über mehrere aufeinander folgende Takte betrachtet werden (siehe Gleichung (2.10) und (2.11)). Die Gleichung (2.14) kann daher auch mit den Stromänderungsparametern geschrieben werden und ist dann direkt die Rechenvorschrift der direkten Stromregelung, die die Stromänderung ohne Umweg über ein Modell der zu stellenden Spannungen in direkte Beziehung zum Aussteuergrad der einzelnen Schaltzustände setzt:

$$a_{k+1} = \frac{i_{e,k+1} - i_{e,k} - \Delta i_{f,k}}{\Delta i_{a,k}} \quad (2.18)$$

### 2.1.2 Einordnung des Regelungsverfahrens der Adaptiven Direkten Stromregelung

Die Umsetzung der Berechnung der Aussteuergrade nach Gleichung (2.18) ist in Abbildung 2.3 als Blockschaltbild dargestellt. Im Vergleich zu einer linearen Stromregelung mit PI-Regler (siehe Abbildung 1.3) ist bei dem Verfahren der Adaptiven Direkten Stromregelung keine Kenntnis der Streckenparameter, wie beispielsweise der Induktivität, des Widerstands oder der Gegenspannung

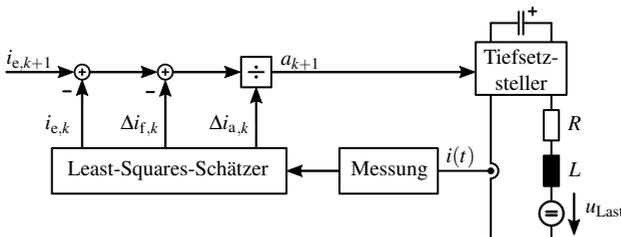


Abbildung 2.3: Blockschaltbild der Adaptiven Direkten Stromregelung für einen Tiefsetzsteller mit Vorgabe des Endwerts eines PWM-Taktes als Sollwert.

notwendig, da keine Reglerparameter  $K_P$  und  $T_N$  berechnet werden müssen. Die Aussteuergrade für den nächsten Takt werden rein auf Basis der gemessenen Stromsteigungen des aktuellen Taktes berechnet. Der Umweg über die Berechnung eines Streckenmodells und einer an die Strecke anzulegenden Spannung entfällt. Der Modulator erzeugt die Taktsignale direkt gemäß dem nach Gleichung (2.18) berechneten Aussteuergrad. Die Strecke wird durch die Stromsteigungsmessung in jedem Takt neu identifiziert und die Regelung daran implizit angepasst. Damit entfällt auch die Notwendigkeit, Kennfelder über den gesamten Betriebsbereich als Lookup-Tabellen zu speichern. Die Regelung passt sich permanent dem aktuellen Betriebspunkt an.

In klassischen Deadbeat-Regelungen sind exakt bestimmte Parameter für eine korrekt funktionierende Regelung unerlässlich. Schon geringe Abweichungen führen zu Regelabweichungen. Mit der ADSR wird bei korrekter Steigungsmessung hingegen Deadbeat-Verhalten erreicht, ohne dass Streckenparameter notwendig sind [1, S1, 18, 19]. Auch ist bei der ADSR im Unterschied zu Deadbeat-Reglern keine Umrechnung der zu stellenden Spannung in einen Aussteuergrad notwendig.

Der Rechenaufwand des Algorithmus der ADSR hält sich in engen Grenzen. Speziell für das Beispiel der Regelung eines Tiefsetzstellers ist der Rechenaufwand sehr gering und beschränkt sich mit Gleichung (2.18) auf zwei Additionen und eine Division. Der in [1] vorgestellte Algorithmus für die Regelung einer isotropen Synchronmaschine mit der ADSR ist ebenfalls recht einfach in der Realisierung. Wie in Kapitel 3 gezeigt wird, ist der Rechenaufwand zur Berechnung der Stromänderungsparameter der anisotropen Synchronmaschine zwar aufwändiger als bei der isotropen Synchronmaschine. Dennoch ist auch dieser Rechenaufwand noch gering und kann gut in einem FPGA implementiert werden (siehe Kapitel 6). Komplexe, parameterabhängige Modelle der Strecke oder Optimierungsalgorithmen wie bei der MPC müssen bei der ADSR nicht berechnet werden.

Die ADSR unterscheidet sich demnach in unterschiedlichen Punkten von den in Abbildung 1.4 dargestellten Regelungsverfahren und kann nicht eindeutig einem der existierenden Verfahren zugeordnet werden. Die ADSR kann als

gradientenbasiertes, adaptives und maschinenparameterfreies Regelverfahren mit Deadbeat-Charakteristik und einem Prädiktionshorizont von genau einem Abtastschritt bezeichnet werden.

## **2.2 Grundlagen für die Anwendung der Adaptiven Direkten Stromregelung in Drehstromsystemen**

Das Konzept der Adaptiven Direkten Stromregelung kann wie bereits in [1] vorgestellt, durch Anwendung des Konzepts der Stromänderungsparameter auch für Drehstromanwendungen nutzbar gemacht werden. Wie bereits beschrieben, werden bei der direkten Stromregelung im Gegensatz zu anderen Regelverfahren die Stromänderungen in direkte Beziehung zu den Aussteuergraden des Stellglieds gesetzt. Es ist daher essentiell, die Architektur und die Eingriffsmöglichkeiten des Stellglieds genau zu kennen.

In diesem Abschnitt wird das in dieser Arbeit für die Drehstromanwendungen verwendete Stellglied genauer vorgestellt und die Begriffe definiert, die für die weiteren Kapitel als Grundlage wichtig sind.

### **2.2.1 Stellglied Drehstrombrückenschaltung**

Die Drehstrombrückenschaltung ist eine der am häufigsten eingesetzten Wechselrichterschaltungen der Leistungselektronik. In Abbildung 2.4 ist die Drehstrombrückenschaltung (beiger Bereich) zusammen mit der eingangsseitigen Gleichspannungsversorgung und einer ausgangsseitigen Drehstromlast dargestellt. Sie besteht aus den drei parallelen Halbbrücken  $B_1$ ,  $B_2$  und  $B_3$  (in Abbildung 2.4 dunkelgrün unterlegt), deren jeweilige Ausgangsklemme L1, L2 und L3 einen der drei Anschlüsse für eine dreiphasige Last darstellt. Als aktive Leistungshalbleiter werden in dieser Arbeit „Insulated Gate Bipolar Transistors“ (IGBTs) verwendet, zu denen jeweils eine anti-parallel geschaltete Freilaufdiode gehört.

Eingangsseitig wird die Drehstrombrückenschaltung aus einem Gleichspannungs-Zwischenkreis versorgt. Aus diesem Grund wird die Eingangsgleichspannung der Drehstrombrückenschaltung auch in dieser Arbeit als Zwischenkreisspannung bezeichnet. Vom englischen Begriff für Gleichspannung („direct voltage“) her, hat sich der Index  $d$  für die Gleichspannung des Zwischenkreises in der Fachliteratur etabliert. Sie wird darum auch in dieser Arbeit als  $U_d$  referenziert. Die Zwischenkreisspannung wird normalerweise mit ausreichend groß dimensionierten Zwischenkreiskondensatoren gestützt, so dass sie als konstant angenommen werden kann. Dies erlaubt aus regelungstechnischer Sicht eine Entkopplung des eingangsseitigen Gleichrichters und der Drehstrombrückenschaltung selbst.

Für die Verwendung der Drehstrombrückenschaltung als Wechselrichterschaltung für Drehstrommaschinen ist außerdem die Definition eines Bezugspunktes 0 bei der halben Zwischenkreisspannung zweckmäßig. Die ausgangsseitigen Spannungen  $u_{10}$ ,  $u_{20}$  und  $u_{30}$  zwischen den Klemmen L1, L2 und L3 und dem Bezugspunkt 0 können dann sowohl den positiven Wert  $+U_d/2$ , als auch den negativen Wert  $-U_d/2$  annehmen, was die Darstellung eines symmetrischen Drehstromsystems ohne Gleichanteil deutlich vereinfacht.

Gleichzeitiges Einschalten beider IGBTs einer Halbbrücke würde den Zwischenkreis kurzschließen und zur Zerstörung der Drehstrombrückenschaltung führen. Dieser Schaltzustand muss deshalb unbedingt vermieden werden, was zur Einhaltung einer kurzen Pause zwischen dem Ausschalten des gerade noch leitenden Schalters und dem Einschalten des komplementären Schalters innerhalb einer Halbbrücke führt. Diese sogenannte Verriegelungszeit ist in der Ansteuerungslogik der Drehstrombrückenschaltung fest implementiert.

Aus diesem Grund ergeben sich für jede Halbbrücke nur drei zulässige Schaltzustände, nämlich

1. beide Schalter AUS
2. oberer Schalter EIN und unterer Schalter AUS
3. oberer Schalter AUS und unterer Schalter EIN

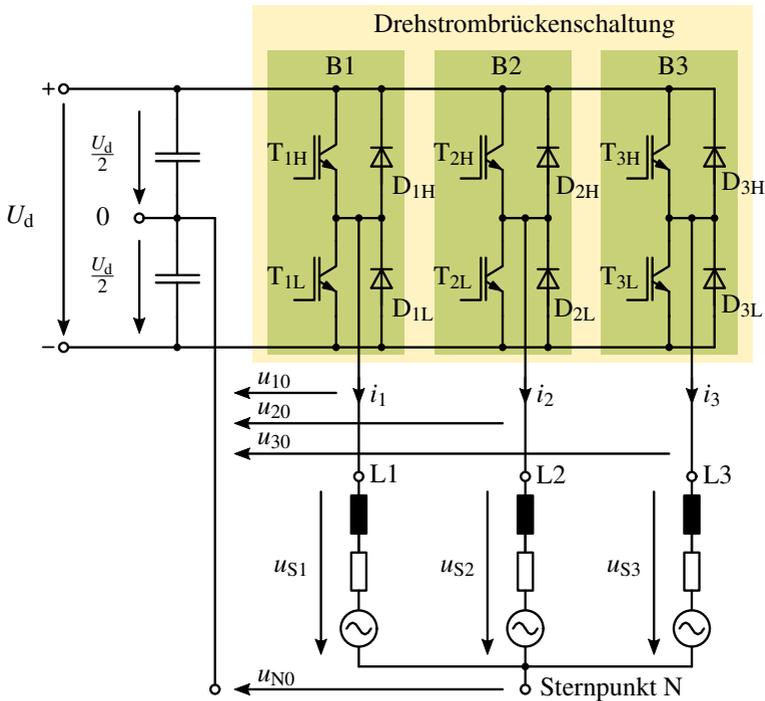


Abbildung 2.4: Drehstrombrückenschaltung mit IGBTs, eingangsseitiger Gleichspannung und angeschlossener symmetrischer RL-Drehstromlast mit Gegenspannung

Wird der obere Leistungshalbleiter eingeschaltet, liegt an der Ausgangsklemme  $+U_d/2$  an. Wird dagegen der untere eingeschaltet, liegt  $-U_d/2$  an der Ausgangsklemme an. Während der Verriegelungszeit hängt das Potential an der Ausgangsklemme von der Stromrichtung des Ausgangsstromes ab. Ist der Ausgangsstrom gemäß der Zählpfeilkonvention aus Abbildung 2.4 positiv, leitet die untere Freilaufdiode und das Potential an der Ausgangsklemme ist  $-U_d/2$ . Ist er dagegen negativ, leitet die obere Freilaufdiode und das Potential der Ausgangsklemme ist  $+U_d/2$ .

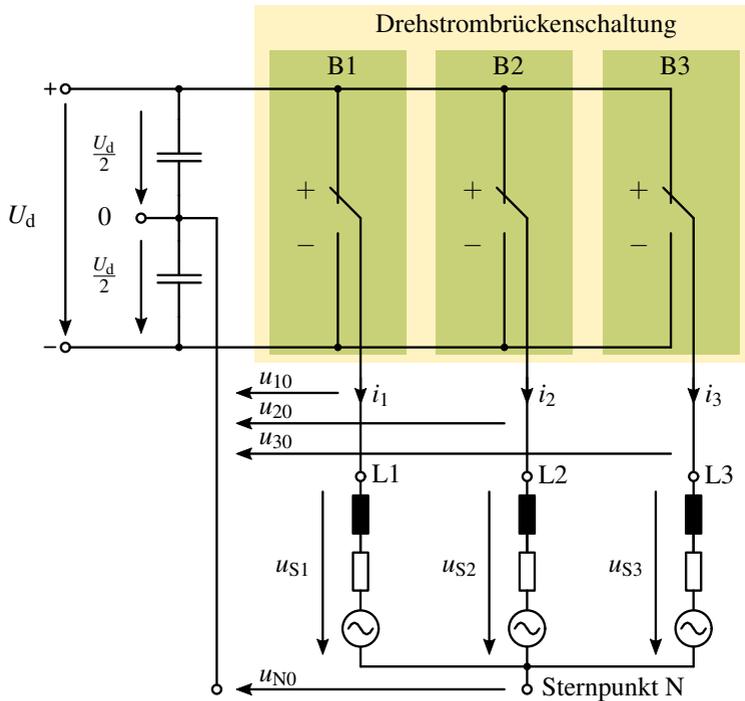


Abbildung 2.5: Drehstrombrückenschaltung mit idealen Wechselschaltern, eingangsseitiger Gleichspannung und angeschlossener symmetrischer RL-Drehstromlast mit Gegenspannung

Mit jeder der drei Halbbrücken der Drehstrombrückenschaltung kann also letztlich genau entweder  $+U_d/2$  oder  $-U_d/2$  an die zugehörige Ausgangsklemme geschaltet werden. Sie können daher auch als Wechselschalter zwischen dem positiven und dem negativen Zwischenkreispotential verstanden werden. In Abbildung 2.5 ist die Drehstrombrückenschaltung mit idealen Wechselschaltern dargestellt.

## 2.2.2 Einstellung der Ausgangsspannung der Drehstrombrückenschaltung

Um nun die Ausgangsspannung für die Drehstromlast frei einstellbar zu machen, wird die Drehstrombrückenschaltung wie auch schon der Tiefsetzsteller aus Abschnitt 2.1.1 mit einer Pulsweitenmodulation betrieben. Dazu wird häufig ein Trägerverfahren zur Modulation eingesetzt. In diesem wird ein Trägersignal mit einem Referenz-Wert verglichen und in Abhängigkeit dieses Vergleichs die Halbbrücke umgeschaltet. Die Frequenz des Trägersignals wird auch als PWM-Taktfrequenz  $T_{\text{PWM}}$  bezeichnet und liegt in sehr vielen Anwendungen deutlich über der Grundschiebungsfrequenz der Ausgangsspannung. Solche Verhältnisse liegen auch in dieser Arbeit vor.

Für Drehstromanwendungen ist die Wahl eines Dreiecksignals als Trägersignal vorteilhaft, da sich dadurch ein zur Taktmitte hin symmetrisches Schaltspiel ergibt. Dadurch entspricht der Wert der Ströme in der Taktmitte immer dem Mittelwert über eine PWM-Periode. Dies gilt insbesondere auch nicht nur im stationären Betrieb, sondern auch für dynamische Betriebspunktänderungen [E9], sofern die Stromsteigungen innerhalb eines PWM-Taktes als näherungsweise konstant angenommen werden können. Die Messung des Mittelwerts des Stromes kann dadurch sehr einfach durch Triggern einer Messung in der Taktmitte erfolgen. Viele Controller-Bausteine für Drehstromanwendungen haben solche Funktionen bereits fest integriert und werben damit [D1].

Als Referenzsignal wird der Aussteuergrad verwendet, der in dieser Schaltung allerdings nicht wie in Abschnitt 2.1.1 beim Tiefsetzsteller beschrieben, die jeweilige relative Einschaltdauer eines Einzelhalbleiters während eines PWM-Taktes repräsentiert. Vielmehr wird hier für jede der drei Halbbrücken ein eigener „Halbbrückenaussteuergrad“  $b_1$ ,  $b_2$  und  $b_3$  verwendet, der der relativen Schaltzeit des positiven Zwischenkreispotentials am Ausgang während einer PWM-Periode entspricht (siehe Abbildung 2.6). Damit entspricht der Halbbrückenaussteuergrad dem Mittelwert, der von dieser Halbbrücke gestellten Spannung während einer PWM-Periode, abzüglich eines Offsets in Höhe der halben Zwischenkreisspannung.

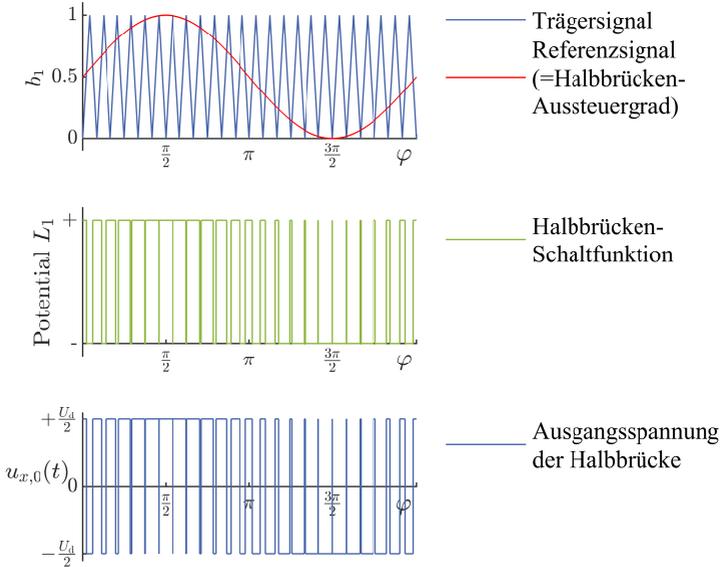


Abbildung 2.6: Prinzipielle Darstellung der Pulsweitenmodulation einer Halbbrücke

Ist der Halbbrückenaussteuergrad Eins, so wird für einen ganzen Takt das positive Zwischenkreispotential an die Ausgangsklemme geschaltet. Ist er hingegen Null, so liegt für einen ganzen Takt das negative Zwischenkreispotential am Ausgang an. Soll im Mittel über eine Periode die Spannung 0 V gestellt werden, dann muss der Halbbrückenaussteuergrad gerade 0,5 sein, damit genauso lange positives wie negatives Potential an den Ausgang geschaltet wird. Damit dieses Verständnis des Aussteuergrades gewährleistet ist, gilt für den Vergleich des Referenzsignals mit dem Trägersignal folgender logischer Zusammenhang:

$$u_{x0} = \begin{cases} +U_d/2 & \text{für Referenzsignal} > \text{Trägersignal} \\ -U_d/2 & \text{für Referenzsignal} < \text{Trägersignal} \end{cases} \quad \text{mit } x = 1,2,3 \quad (2.19)$$

Der mathematische Zusammenhang zwischen den Halbbrückenaussteuergraden und der im Mittel über eine Periode gestellten Spannung ist:

$$\overline{u_{x0}} = b_x \cdot \frac{U_d}{2} - (1 - b_x) \cdot \frac{U_d}{2} = \frac{U_d}{2} \cdot (2b_x - 1) \quad (2.20)$$

$$= b_x \cdot U_d - \frac{U_d}{2} \quad (2.21)$$

Die Übersetzung der Aussteuergrade in Schaltzeitpunkte innerhalb der PWM-Periode, insbesondere in die komplementäre Ansteuerung der einzelnen Leistungshalbleiter, die Einhaltung der notwendigen Verriegelungszeit sowie weitere Sicherheits- und Komfortfunktionen werden auf Basis der Halbbrückenaussteuergrade von einem Zustands-Automaten, dem Modulator des Stromrichters, realisiert. Für jeden PWM-Takt müssen dem Modulator von der Regelung daher die drei Halbbrückenaussteuergrade  $b_1$ ,  $b_2$  und  $b_3$  übergeben werden. Von vielen gängigen Stromregelungsalgorithmen wird letztlich eine notwendige mittlere Spannung für den nächsten PWM-Takt berechnet, die zur gewünschten Stromänderung führt. Über den Zusammenhang aus Gleichung (2.20) werden daraus dann die drei Halbbrückenaussteuergrade berechnet und dem Modulator für den nächsten Takt übergeben.

In der direkten Stromregelung für Drehstromanwendungen soll dieser Umweg über die zu stellende mittlere Spannung abgekürzt und die Halbbrückenaussteuergrade in direkte Beziehung zu den Stromänderungen gesetzt werden. Hierzu muss das Zusammenspiel der drei Halbbrücken innerhalb eines PWM-Taktes zunächst noch etwas näher definiert werden.

### 2.2.3 Schaltzustände der Drehstrombrückenschaltung

Wie aus dem Vorangegangenen und in Abbildung 2.5 ersichtlich, können die drei Halbbrücken jeweils nur die beiden diskreten Zustände + oder – annehmen. Die möglichen Kombinationen der drei Halbbrücken ergeben somit  $2^3 = 8$  Schaltzustände  $S_x$  mit  $x \in \{1 \dots 8\}$  der Drehstrombrückenschaltung. Diese sind in Tabelle 2.1 in der ersten Spalte eingetragen. In der zweiten bis vierten Spalte sind die dazu gehörenden Schaltzustände der Halbbrücken  $B_1$ ,

SZ	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$u_{10}$	$u_{20}$	$u_{30}$	$u_{N0}$	$u_{S1}$	$u_{S2}$	$u_{S3}$
$S_1$	+	-	-	$+\frac{U_d}{2}$	$-\frac{U_d}{2}$	$-\frac{U_d}{2}$	$-\frac{U_d}{6}$	$+\frac{2}{3}U_d$	$-\frac{1}{3}U_d$	$-\frac{1}{3}U_d$
$S_2$	+	+	-	$+\frac{U_d}{2}$	$+\frac{U_d}{2}$	$-\frac{U_d}{2}$	$+\frac{U_d}{6}$	$+\frac{1}{3}U_d$	$+\frac{1}{3}U_d$	$-\frac{2}{3}U_d$
$S_3$	-	+	-	$-\frac{U_d}{2}$	$+\frac{U_d}{2}$	$-\frac{U_d}{2}$	$-\frac{U_d}{6}$	$-\frac{1}{3}U_d$	$+\frac{2}{3}U_d$	$-\frac{1}{3}U_d$
$S_4$	-	+	+	$-\frac{U_d}{2}$	$+\frac{U_d}{2}$	$+\frac{U_d}{2}$	$+\frac{U_d}{6}$	$-\frac{2}{3}U_d$	$+\frac{1}{3}U_d$	$+\frac{1}{3}U_d$
$S_5$	-	-	+	$-\frac{U_d}{2}$	$-\frac{U_d}{2}$	$+\frac{U_d}{2}$	$-\frac{U_d}{6}$	$-\frac{1}{3}U_d$	$-\frac{1}{3}U_d$	$+\frac{2}{3}U_d$
$S_6$	+	-	+	$+\frac{U_d}{2}$	$-\frac{U_d}{2}$	$+\frac{U_d}{2}$	$+\frac{U_d}{6}$	$+\frac{1}{3}U_d$	$-\frac{2}{3}U_d$	$+\frac{1}{3}U_d$
$S_7$	+	+	+	$+\frac{U_d}{2}$	$+\frac{U_d}{2}$	$+\frac{U_d}{2}$	$+\frac{U_d}{2}$	0	0	0
$S_8$	-	-	-	$-\frac{U_d}{2}$	$-\frac{U_d}{2}$	$-\frac{U_d}{2}$	$-\frac{U_d}{2}$	0	0	0

Tabelle 2.1: Schaltzustände der Drehstrombrückenschaltung

$B_2$  und  $B_3$  gemäß Abbildung 2.5 eingetragen. Die jeweiligen Spannungen  $u_{10}$ ,  $u_{20}$  und  $u_{30}$  an den drei Ausgangsklemmen sind in den folgenden drei Spalten aufgeführt. Die Gleichtaktspannung  $u_{N0}$  ist der arithmetische Mittelwert gemäß

$$u_{N0} = \frac{1}{3} (u_{10} + u_{20} + u_{30}) \quad (2.22)$$

und ist ebenfalls in Tabelle 2.1 eingetragen. Durch Subtraktion der Gleichtaktspannung von den Nullpunktspannungen erhält man die Sternspannungen  $u_{S1}$ ,  $u_{S2}$  und  $u_{S3}$

$$u_{S1} = u_{10} - u_{N0} \quad (2.23)$$

$$u_{S2} = u_{20} - u_{N0} \quad (2.24)$$

$$u_{S3} = u_{30} - u_{N0} \quad (2.25)$$

Sie sind in den letzten drei Spalten der Tabelle 2.1 notiert und es ist daraus direkt ersichtlich, dass die Schaltzustände 7 und 8 offenbar die Last kurzschließen. Beide Schaltzustände schließen alle drei Klemmen der Ausgangsseite kurz, entweder über die Zuleitung des positiven Zwischenkreispotentials, oder über die Zuleitung des negativen Zwischenkreispotentials. Dies ist auch direkt

in Abbildung 2.5 ersichtlich. In diesen beiden Zuständen ist die Last also frei vom Einfluss der Zwischenkreisspannung. Aus diesen Gründen heißen diese beiden Schaltzustände „Freilauf“-Schaltzustände und die Dioden werden als Freilaufdioden bezeichnet. Analog zu Abschnitt 2.1.1 werden auch bei Drehstromanwendungen die Freilauf-Schaltzustände mit dem Index „f“ referenziert. Im Gegensatz zu den Schaltzuständen 7 und 8 wird in den übrigen 6 Schaltzuständen die Eingangsspannung der Drehstrombrücke an die Maschine geschaltet und der Stromverlauf dadurch aktiv beeinflusst. Die Schaltzustände 1 bis 6 werden darum „aktive Schaltzustände“ genannt. Hierfür wird wieder der Index „a“ verwendet:

$$S_x = \begin{cases} S_{x,a} & \text{für } x \in \{1 \dots 6\} \\ S_{x,f} & \text{für } x \in \{7,8\} \end{cases} \quad (2.26)$$

### **Raumzeigerdarstellung der Schaltzustände der Drehstrombrückenschaltung**

Für die weitere Betrachtung des von der Drehstrombrückenschaltung gebildeten Drehstromsystems wird die Raumzeigerdarstellung gewählt. Durch die Raumzeigertransformation werden grundsätzlich drei skalare Zeitwerte auf einen Raumzeiger mit zwei orthogonalen Komponenten in der komplexen Zahlenebene  $\mathbb{C}$  und eine Nullkomponente abgebildet. Die Definition des Raumzeigers nach der in dieser Arbeit verwendeten Amplituden-invarianten Transformation lautet [65–68]:

$$\underline{u} = \frac{2}{3} (u_{S1} + \underline{a} \cdot u_{S2} + \underline{a}^2 \cdot u_{S3}) \quad (2.27)$$

mit dem Raumzeigeroperator

$$\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad (2.28)$$

Die Spannung  $u_{S1}$  wird üblicherweise der Phase 1 der Ständerwicklung einer Drehstrommaschine zugeordnet und daran auch gleichzeitig die reelle Achse der komplexen Zahlenebene des Raumzeigers orientiert. Diese Achse

SZ	$\varphi_x$	$\underline{S}_x$	$\underline{u}_x$
$S_1$	$0^\circ$	$\underline{S}_1 = e^{j0}$	$\underline{u}_1 = \frac{2}{3}U_d \cdot e^{j0}$
$S_2$	$60^\circ$	$\underline{S}_2 = e^{j\frac{\pi}{3}}$	$\underline{u}_2 = \frac{2}{3}U_d \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}$
$S_3$	$120^\circ$	$\underline{S}_3 = e^{j\frac{2\pi}{3}}$	$\underline{u}_3 = \frac{2}{3}U_d \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}}$
$S_4$	$180^\circ$	$\underline{S}_4 = e^{j\pi}$	$\underline{u}_4 = \frac{2}{3}U_d \cdot e^{j\pi}$
$S_5$	$240^\circ$	$\underline{S}_5 = e^{j\frac{4\pi}{3}}$	$\underline{u}_5 = \frac{2}{3}U_d \cdot e^{j\frac{4\pi}{3}}$
$S_6$	$300^\circ$	$\underline{S}_6 = e^{j\frac{5\pi}{3}}$	$\underline{u}_6 = \frac{2}{3}U_d \cdot e^{j\frac{5\pi}{3}}$
$S_7$	-	-	$\underline{u}_7 = 0$
$S_8$	-	-	$\underline{u}_8 = 0$

Tabelle 2.2: Tabelle der acht möglichen Raumzeiger der Drehstrombrückenschaltung

wird auch als  $\alpha$ -Achse bezeichnet. Die zugehörige imaginäre Achse wird entsprechend als  $\beta$ -Achse bezeichnet. Das gesamte Koordinatensystem des Raumzeigers, orientiert an der L1-Wicklung des Stators der Drehstrommaschine wird entsprechend als „statorfestes“  $\alpha\beta$ -Bezugssystem bezeichnet. Als Raumzeiger nach dieser Definition, entsprechen die gestellten Spannungen der sechs aktiven Schaltzustände der Drehstrombrückenschaltung Eckpunkten eines regelmäßigen Sechsecks in der statorfesten  $\alpha\beta$ -Ebene:

$$\underline{u}_x = \frac{2}{3}U_d \cdot e^{j(x-1)\frac{\pi}{3}} \quad \forall x \in \mathbb{N} \mid x \in \{1 \dots 6\} \quad (2.29)$$

Dies kann leicht nachvollzogen werden, wenn die Werte für  $u_{S1}$ ,  $u_{S2}$  und  $u_{S3}$  aus Tabelle 2.1 für alle Schaltzustände in Gleichung (2.27) eingesetzt werden. Sie sind in Tabelle 2.2 zusammen mit ihren zugehörigen Schaltzustandsraumzeigern

$$\underline{S}_x = \frac{\underline{u}_x}{|\underline{u}_x|} = \frac{\underline{u}_x}{\frac{2}{3}U_d} \quad (2.30)$$

eingetragen und in Abbildung 2.7 schwarz dargestellt. Die Schaltzustandsraumzeiger sind in Abbildung 2.7 blau dargestellt. Sie geben zwar lediglich

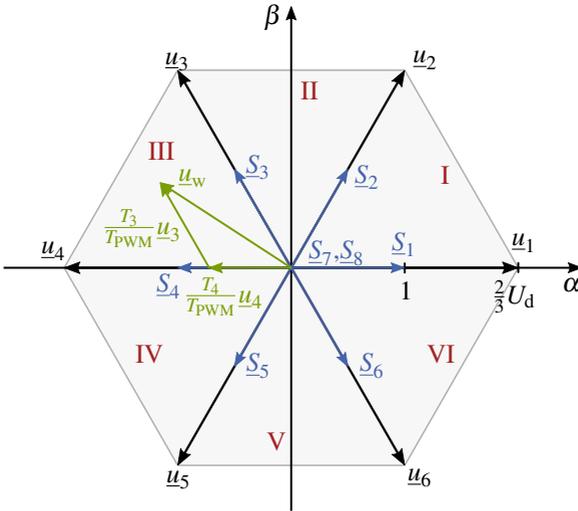


Abbildung 2.7: Raumzeiger der Schaltzustände der Drehstrombrückenschaltung  $\underline{u}_x$  (schwarz), Schaltzustandsraumzeiger  $\underline{S}_x$  (blau), Sektorindizes  $\sigma$  von I bis VI (rot) und ein beispielhafter Spannungsraumzeiger  $\underline{u}_w$  in Sektor III, zusammengesetzt aus den anteilig geschalteten Raumzeigern der Schaltzustände  $S_3$  und  $S_4$  (grün)

die Richtung der jeweiligen Raumzeiger des zugehörigen Schaltzustands in der  $\alpha\beta$ -Ebene an, erweisen sich aber in der späteren Betrachtung der Stromänderungsparameter in Drehstromsystemen als äußerst nützlich:

$$\underline{S}_x = e^{j\varphi_x} \quad \forall x \in \mathbb{N} \mid x \in \{1 \dots 6\} \quad (2.31)$$

mit dem zugehörigen Winkel

$$\varphi_x = (x - 1) \cdot 60^\circ \quad \forall x \in \mathbb{N} \mid x \in \{1 \dots 6\} \quad (2.32)$$

Die einzelnen Sektoren zwischen je zwei benachbarten Raumzeigern der aktiven Schaltzustände  $S_x$  mit  $x \in \{1 \dots 6\}$  sind in mathematisch positivem Sinn mit dem Sektorindex  $\sigma$  in römischen Zahlen durchnummeriert und ebenfalls in Abbildung 2.7 eingetragen.

## 2.2.4 Raumzeigermodulation

Die Pulsweitenmodulation einer einzelnen Halbbrücke wurde im vorigen Abschnitt bereits erläutert. Für die Drehstrombrückenschaltung müssen pro PWM-Takt alle drei Halbbrücken so angesteuert werden, dass sich im Mittel über die PWM-Periodendauer die gewünschte Spannung ergibt. Die Raumzeigerdarstellung ist für eine Berechnung der hierfür notwendigen Einschaltzeiten der einzelnen Schaltzustände bestens geeignet, da in dieser Darstellung die zu stellende mittlere Spannung eines Taktes als ein einzelner Raumzeiger dargestellt werden kann. Entspricht dieser Sollspannungs-Raumzeiger einem der acht Schaltzustände, so kann einfach dieser Schaltzustand für den ganzen Takt geschaltet werden. Ist der Sollspannungs-Raumzeiger kürzer als die Schaltzustands-Raumzeiger, kann durch anteiliges Schalten der Nullspannungs-Raumzeiger, also der Freilauf-Schaltzustände  $S_7$  und  $S_8$ , der Mittelwert der gestellten Spannung über eine Periode verringert und dadurch der kürzere Raumzeiger generiert werden.

Liegt der Sollspannungs-Raumzeiger nicht auf den Schaltzustands-Achsen, sondern dazwischen, kann durch anteiliges Schalten der beiden benachbarten aktiven Schaltzustände im Mittel auch ein Raumzeiger mit beliebiger Winkellage gestellt werden. Durch Kombination anteiligen Schaltens der beiden benachbarten aktiven und der Freilauf-Schaltzustände kann damit prinzipiell jeder beliebige Raumzeiger innerhalb des in Abbildung 2.7 dargestellten grau unterlegten Sechsecks gestellt werden.

Als Beispiel ist in Abbildung 2.7 in grün der zu stellende Spannungs-Raumzeiger  $\underline{u}_w$  abgebildet, der durch anteiliges Schalten der beiden benachbarten Schaltzustände  $S_3$  und  $S_4$ , sowie zusätzliche Freilauf-Schaltzustände gestellt wird. Die relativen Einschaltdauern (auch als „Aussteuergrad“ bezeichnet) der einzelnen Schaltzustände sind dabei

$$d_x = \frac{T_x}{T_{\text{PWM}}} \quad \text{mit } x \in \{1 \dots 8\} \quad (2.33)$$

Das anteilige Einschalten der entsprechenden Schaltzustände entspricht in der  $\alpha\beta$ -Ebene der vektoriellen Addition der Raumzeiger der einzelnen Schaltzu-

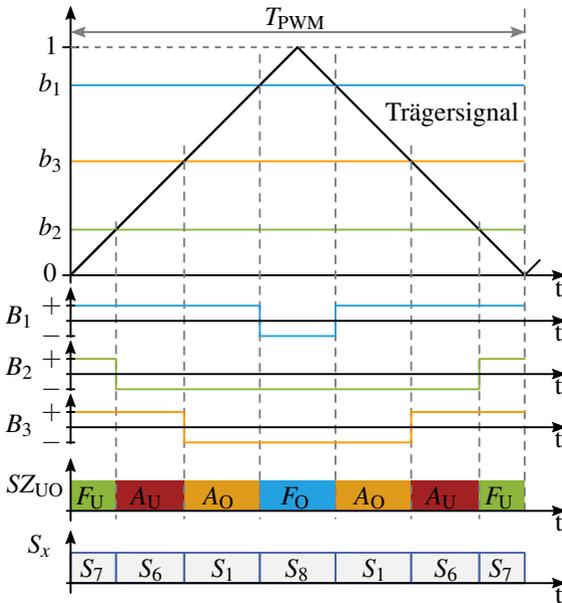


Abbildung 2.8: Raumzeigermodulation mit Trägerverfahren

stände, jeweils gewichtet mit dem zugehörigen Aussteuergrad. Dieses Verfahren wird als Raumzeigermodulation bezeichnet.

### Umsetzung der Raumzeiger-Modulation mittels Trägerverfahren

Die Umsetzung der Raumzeigermodulation erfolgt aufgrund der einfachen Realisierbarkeit ebenso wie die PWM des Tiefsetzstellers aus Abschnitt 2.1.1 meist mit einem Trägerverfahren. Letztlich entspricht die Raumzeigermodulation einer Pulsweitenmodulation von drei als Drehstrombrückenschaltung verschalteten Halbbrücken. Auch hierbei erweist sich ein Dreiecksignal als Trägersignal als vorteilhaft, da dann wieder ein zur Taktmitte hin symmetrisches Pulsmuster entsteht. In Abbildung 2.8 ist ein Takt einer solchen Raumzeigermodulation dargestellt. Darin sind die drei Halbbrückenaussteuergrade  $b_1, b_2$  und  $b_3$  zusammen mit dem PWM-Trägersignal und den zugehörigen Halbbrückenpolaritäten  $B_1, B_2$  und  $B_3$  dargestellt. Darunter

sind in der mit  $SZ_{UO}$  bezeichneten Achse die zugehörigen Schaltzustände eingetragen. Diese sind hierbei nicht mit den absoluten Schaltzustands-Indizes gemäß Abbildung 2.7, beziehungsweise Tabelle 2.2 eingetragen. Statt dessen werden in dieser Arbeit bei der Betrachtung der Schaltzustände innerhalb eines PWM-Taktes die Indizes „U“ und „O“ verwendet, die ihre relative Lage zum PWM-Trägersignal ausdrücken. „U“ bezeichnet jeweils den Freilaufzustand und aktiven Schaltzustand, die dem unteren Eckpunkt des Trägersignals benachbart sind. „O“ hingegen bezeichnet jeweils den Freilaufzustand und aktiven Schaltzustand, die dem oberen Eckpunkt des Trägersignals benachbart sind. Diese Darstellung bietet deutliche Vorteile bei der Implementierung der Identifikation der Stromsteigungen in einem FPGA (siehe Kapitel 5) und wird darum bereits an dieser Stelle eingeführt.

Aus Sicht eines in einem FPGA implementierten Codes besteht kein Unterschied, ob nun die aktiven Zustände gerade zu Sektor I oder zu Sektor IV gehören. Wichtig ist hierfür nur der Zusammenhang, dass die Stromsteigungen für die vier zu erwartenden Schaltzustände innerhalb eines PWM-Taktes zu bestimmen sind. Zu Beginn des Algorithmus wird deshalb der absolute Zusammenhang durch Extraktion des Sektorindex  $\sigma$  aufgelöst und während des Algorithmus im FPGA nur noch mit der relativen Zuordnung zum PWM-Trägersignal gearbeitet. Die Zuordnung zu den absoluten Schaltzuständen erfolgt darum im Anschluss an den Algorithmus des FPGA anhand des Sektorindex  $\sigma$ .

Die Wahl der Bezeichnung „oben“ und „unten“ kommt daher, dass der in Abschnitt 5 vorgestellte Algorithmus sowohl während der steigenden, als auch während der fallenden Flanke des PWM-Trägersignals die schaltzustandsabhängigen Steigungen der Ströme identifiziert. Eine Zuordnung durch einen Zahlenindex wäre nicht eindeutig, da beispielsweise der zeitlich zuerst auftretende aktive Schaltzustand während der steigenden Flanke des PWM-Trägersignals der „untere“ ist, in der fallenden Flanke jedoch der „obere“. Hinzu kommt, dass dadurch eine Verwechslung mit den nach Abbildung 2.7 in der  $\alpha\beta$ -Ebene durch die Zahlenindizes absolut angegebenen Schaltzuständen vermieden wird.

Sektor	verwendete Schaltzustände $S_x$							
	steigende Flanke				fallende Flanke			
	$F_U$	$A_U$	$A_O$	$F_O$	$F_O$	$A_O$	$A_U$	$F_U$
I	7	2	1	8	8	1	2	7
II	7	2	3	8	8	3	2	7
III	7	4	3	8	8	3	4	7
IV	7	4	5	8	8	5	4	7
V	7	6	5	8	8	5	6	7
VI	7	6	1	8	8	1	6	7

Tabelle 2.3: Schaltspiele in den einzelnen Sektoren gemäß der verwendeten Modulation

### Modulationsverfahren

Prinzipiell können die zu schaltenden Schaltzustände innerhalb einer PWM-Periode beliebig verteilt sein. Aus Rücksicht auf die zwangsläufig bei jeder Umschaltung einer Halbbrücke entstehenden Schaltverluste werden jedoch Verfahren angestrebt, bei denen die Umschaltvorgänge minimiert werden. Das führt dazu, dass beispielsweise direkt vor oder nach dem Freilauf-Schaltzustand  $S_7$ , in dem alle Halbbrücken an das positive Zwischenkreispotential angeschlossen sind (siehe Tabelle 2.2), nur ein solcher aktiver Zustand geschaltet wird, der dadurch gekennzeichnet ist, dass nur eine der drei Halbbrücken an das negative Zwischenkreispotential umgeschaltet werden muss, also  $S_2$ ,  $S_4$  oder  $S_6$  (siehe Tabelle 2.1). Direkt vor oder nach dem Freilauf  $S_8$  hingegen werden aus dem gleichen Grund nur die aktiven Schaltzustände  $S_1$ ,  $S_3$  und  $S_5$  verwendet. Darüber hinaus ist die zeitliche Verteilung der beiden Freilauf-Schaltzustände ebenfalls prinzipiell frei wählbar, da der Mittelwert des Raumzeigers über eine Taktperiode dadurch nicht beeinflusst wird [69]. Ein weit verbreitetes Modulationsverfahren ist die sogenannte Supersinusmodulation bei der die notwendige Freilauf-Zeit zu gleichen Teilen auf die beiden Freilauf-Schaltzustände  $F_U$  und  $F_O$  aufgeteilt werden, die zudem noch jeweils um die aktiven Schaltzustände herum angeordnet sind, so dass jeweils im Minimum und im Maximum des PWM-Trägersignals immer ein Freilauf geschaltet ist [70].

Mit der Logik nach (2.19) entspricht der Freilauf „unten“ ( $F_U$ ) immer dem Freilauf, bei dem alle drei Halbbrücken das positive Zwischenkreispotential an ihre Ausgänge schalten. Umgekehrt ist der „obere“ Freilauf  $F_O$  immer der, bei dem alle drei Halbbrücken das negative Zwischenkreispotential annehmen (siehe Abbildung 2.8).

Die Supersinusmodulation wird auch in der vorliegenden Arbeit verwendet. Die sich daraus ergebenden Schaltspiele in den einzelnen Sektoren sind in Tabelle 2.3 aufgelistet. Welchen absoluten aktiven Schaltzuständen die zwischen den Freiläufen liegenden aktiven Schaltzustände  $A_U$  und  $A_O$  entsprechen, hängt von der zeitlichen Reihenfolge der umzuschaltenden Halbbrücken ab. Wird von  $S_7$  ausgehend zunächst die erste Halbbrücke  $B_1$  umgeschaltet, so entsteht der Schaltzustand  $S_4$  (siehe Tabelle 2.1). Wird hingegen zuerst  $B_2$  umgeschaltet, entsteht  $S_6$ . In Abbildung 2.8 ist beispielsweise  $b_2 < b_3 < b_1$  und damit ist  $A_U=S_6$  und  $A_O=S_1$ . Der zugehörige Sektor ist damit Sektor VI.

Da die zeitliche Abfolge der Halbbrückenumschaltungen durch den Betrag der Halbbrückenaussteuergrade und den nachfolgenden Vergleich mit dem Dreieck-Trägersignal feststeht, kann über einen einfachen Vergleich der Halbbrückenaussteuergrade der jeweilige Sektor und die dadurch zu verwendenden absoluten Schaltzustände identifiziert werden. Die entsprechende Zuordnung ist in Tabelle 2.4 zusammengestellt. Die Ausnutzung dieser Zusammenhänge vereinfacht die Implementierung im FPGA deutlich (siehe Kapitel 5).

Bei der Betrachtung der Raumzeigermodulation soll an dieser Stelle der Unterschied zwischen den drei Halbbrückenaussteuergraden  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  und den Aussteuergraden der einzelnen Schaltzustände  $d_x$  mit  $x \in \{1 \dots 8\}$  (siehe Gleichung (2.33)) noch einmal betont werden: Von den Aussteuergraden der einzelnen Schaltzustände  $d_x$  werden pro PWM-Taktperiode  $T_{\text{PWM}}$  nur vier der acht möglichen, nämlich die beiden Freiläufe und die beiden Aktiven des aktuellen Sektors berechnet. Sie werden von der Regelung so berechnet, dass der als Sollwert vorgegebene Raumzeiger durch Vektoraddition der verwendeten vier Schaltzustände gestellt wird. Diese vier Schaltzustands-Aussteuergrade werden dann in die drei Halbbrückenaussteuergrade umgerechnet und dem

Sektor	$b_x$	$\leq$	$b_x$	$\leq$	$b_x$
I	$b_1$	$\leq$	$b_2$	$\leq$	$b_3$
II	$b_2$	$\leq$	$b_1$	$\leq$	$b_3$
III	$b_2$	$\leq$	$b_3$	$\leq$	$b_1$
IV	$b_3$	$\leq$	$b_2$	$\leq$	$b_1$
V	$b_3$	$\leq$	$b_1$	$\leq$	$b_2$
VI	$b_1$	$\leq$	$b_3$	$\leq$	$b_2$

Tabelle 2.4: Zusammenhang der Sektoren mit der Reihenfolge der Brückenumschaltungen

Modulator zur Verfügung gestellt. Dieser übersetzt diese Informationen in die richtigen Umschaltzeitpunkte der Halbbrücken und schaltet die zugehörigen Halbleiter unter Berücksichtigung der Verriegelungszeit, der Schaltverzögerung und der Mindesteinschaltzeit. Welchen zwei absoluten aktiven Schaltzuständen die beiden gestellten aktiven Schaltzustände dabei entsprechen, hängt von der Reihenfolge der drei Brückenumschaltungen gemäß Tabelle 2.4 ab.

### Benachbarte Raumzeiger

Zur effizienten Implementierung des in Kapitel 3 vorgestellten Algorithmus zur Identifikation der schaltzustandsabhängigen Stromsteigungen wird noch eine weitere Beschreibung der aktiven Schaltzustände eingeführt:

Vom Ursprung der  $\alpha\beta$ -Ebene aus gesehen, gibt es in jedem Sektor einen rechten und einen linken aktiven Schaltzustand,  $A_R$  und  $A_L$ . Da ein großer Teil der Implementierung des in Kapitel 3 vorgestellten Algorithmus aus geometrischen Operationen, wie beispielsweise Vektordrehungen um feste Winkel, besteht, kann bei Wahl der relativen Zuordnung der aktiven Schaltzustände auf die relative Winkellage (also rechts / links) die Rechenvorschrift in jedem Sektor gleich bleiben. Beispielsweise kann in jedem Sektor der rechte aktive Schaltzustand um  $-60^\circ$  und der linke aktive Schaltzustand um  $60^\circ$  gedreht werden, wodurch die in Abschnitt 3.2.3 vorgestellte Berechnung der Freilaufparameter aus den aktiven Stromänderungsparametern merklich vereinfacht wird. Wie schon weiter oben, bei der relativen Zuordnung zum PWM-Trägersignal, wird zunächst die Absolutlage durch Extraktion des Sektorindex wirkungslos gemacht. Die Zuordnung der gemessenen Werte erfolgt

Sektor	$A_L$	$A_R$	$A_U$		$A_O$	
I	$S_2$	$S_1$	$S_2$	$A_L$	$S_1$	$A_R$
II	$S_3$	$S_2$	$S_2$	$A_R$	$S_3$	$A_L$
III	$S_4$	$S_3$	$S_4$	$A_L$	$S_3$	$A_R$
IV	$S_5$	$S_4$	$S_4$	$A_R$	$S_5$	$A_L$
V	$S_6$	$S_5$	$S_6$	$A_L$	$S_5$	$A_R$
VI	$S_1$	$S_6$	$S_6$	$A_R$	$S_1$	$A_L$

Tabelle 2.5: Zuordnung der absoluten Schaltzustände zu den relativen Schaltzuständen  $SZ_{UO}$  und  $SZ_{RL}$

dann gemäß Tabelle 2.5 zur relativen Lage sowohl zum PWM-Trägersignal, als auch zur relativen Lage zum Raumzeiger. Nach Abschluss des Algorithmus wird mit Hilfe des Sektorindex dann wieder die Absolutlage rekonstruiert.



# 3

## Allgemeine Darstellung der Stromänderungsparameter bei Synchronmaschinen

*“Wer die Geometrie begreift, vermag in dieser Welt alles zu verstehen.”*

Galileo Galilei

Das Grundprinzip des in Abschnitt 2.1.1 vorgestellten Stromregelungsverfahrens der direkten Stromregelung besteht in der Steuerung des Stromverlaufs für den nächsten Takt auf Basis der im vergangenen Takt gemessenen, als linear und konstant über einige Takte angenommenen Stromsteigungen. Für den Tiefsetzsteller ergaben sich dabei lineare Gleichungen, die einfach und vor allem eindeutig lösbar sind. Um das Verfahren der Direkten Stromregelung auch bei der Stromregelung von Drehstrommaschinen anwenden zu können, müssen, wie auch beim Tiefsetzsteller, zwei Grundlagen erfüllt sein:

Zunächst ist es unbedingt notwendig, dass die Stromsteigungen eines jeden Schaltzustands einer PWM-Taktperiode zuverlässig gemessen werden können. Wie dies mit Hilfe eines neuen, ressourcensparenden Least-Squares-Schätzer-Algorithmus erfolgen kann ist in Kapitel 4 ausgeführt.

Darüber hinaus müssen die gemessenen Stromsteigungen benutzt werden können, um daraus die für eine gewünschte Stromänderung notwendigen Aussteuergrade für die zukünftige Pulsperiode zu berechnen. Hierzu müssen die schaltzustandsabhängigen Stromänderungen mathematisch in Abhängigkeit des verwendeten Schaltzustands beschrieben werden. Diese Beschreibung

der Stromänderungen aufgrund des Schaltzustands wird in diesem Kapitel in einer allgemeingültigen, geschlossenen, analytischen und geometrisch anschaulichen Form für die isotrope Synchronmaschine und die anisotrope Synchronmaschine hergeleitet.

Die in dieser Arbeit entwickelte Darstellungsform der Stromänderungsparameter bietet gegenüber einer reinen Angabe der gemessenen Stromsteigung zwei wesentliche Vorteile für die Adaptive Direkte Stromregelung:

1. Sie beschreibt das Verhalten der Stromänderungen beider erwähnten Synchronmaschinentypen. Mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren können also ohne Änderung des Algorithmus die Stromänderungsparameter sowohl der magnetisch anisotropen Synchronmaschine, als auch der magnetisch isotropen Synchronmaschine ermittelt werden. Damit ist es möglich mit der ADSR beide Maschinentypen zu betreiben.
2. Eine Schwierigkeit bei der Ermittlung der schaltzustandsabhängigen Stromsteigungen stellen bei allen bekannten Verfahren [E2] der Steigungsmessung kurze Schaltzustandsdauern dar. Hierzu wurden auch im Rahmen dieser Arbeit diverse Interpolationsmechanismen getestet. Eine weitaus besser funktionierende Methode ist durch Verwendung des Rotorlagewinkels auf sehr einfache Weise mit der in diesem Kapitel vorgestellten Darstellung der Stromänderungsparameter möglich. Dadurch sind unabhängig von der aktuellen Dauer der aktiven Schaltzustände wirklich in jedem Takt die Stromänderungsparameter eines jeden Schaltzustands bekannt.

Grundlage für die jeweilige Betrachtung sind die vereinfachten Modellgleichungen der Synchronmaschine, die jeweils nach den Strömen aufgelöst und deren Ableitung berechnet wird. Aus den Ableitungen der Maschinenströme werden in Analogie zu Abschnitt 2.1.1 und Gleichung (2.16) und (2.15) wieder die von der Rotorposition abhängigen Stromänderungsparameter der einzelnen Schaltzustände berechnet, die zur Stromregelung benötigt werden.

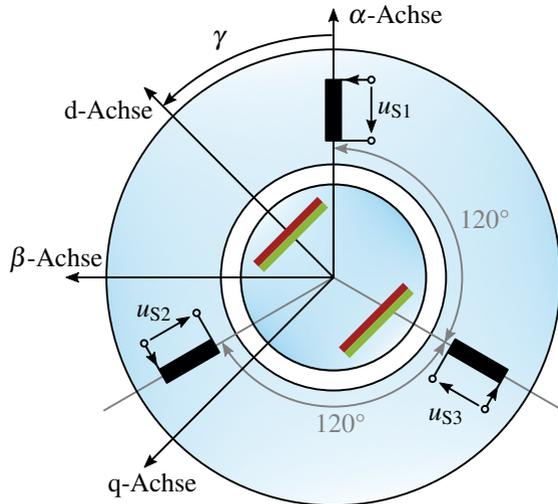


Abbildung 3.1: Wicklungsanordnung und Bezugssysteme einer permanentmagneterregten Synchronmaschine

### 3.1 Modellbildung der permanentmagneterregten Synchronmaschine

Eine permanentmagneterregte Synchronmaschine (PSM) besitzt im Stator eine Drehstromwicklung, die aus drei geometrisch um  $120^\circ$  (elektrisch, pro Pol) versetzten Wicklungen für die drei Phasen des speisenden Drehstromnetzes besteht. In Abbildung 3.1 sind die Wicklungsanordnung und die Bezugssysteme einer zweipoligen Synchronmaschine skizziert. Durch diese Spulenanordnung wird durch die Statorströme in den Statorwicklungen im Luftspalt der Maschine ein Magnetfeld erzeugt, das mit der Frequenz des Drehstromsystems des Stators umläuft. Es wird daher auch magnetisches Drehfeld genannt. Im Rotor der PSM befinden sich Permanentmagnete, wodurch der gesamte Rotor wie ein einziger Magnet verstanden werden kann, der durch das vom Stator erzeugte Magnetfeld ausgerichtet wird und darum im stationären Fall dem Drehfeld mit gleicher Frequenz folgt.

Das statorfeste  $\alpha\beta$ -Koordinatensystem wird dabei an der ersten Wicklung der Maschine orientiert, indem der  $\alpha$ -Achse dieselbe Orientierung wie dem magnetischen Fluss gegeben wird, der durch diese Wicklung erzeugt wird. Das rotorfeste dq-Bezugssystem wird an der Richtung des Permanentmagnetflusses festgemacht. Die d-Achse zeigt daher in Richtung des Permanentmagnetflusses  $\Psi_{PM}$ . Der Winkel, der zwischen diesen beiden Bezugssystemen durch die Drehung des Rotors existiert, ist der Rotorlagewinkel  $\gamma$ .

Aus elektrischer Sicht besteht eine PSM also im Wesentlichen aus den Statorwicklungen zur Erzeugung des Drehfeldes. Diese können als Reihenschaltung einer Induktivität und eines Widerstandes, der dem ohmschen Anteil der Kupferleitungen entspricht, modelliert werden. Hinzu kommt noch die Wirkung des Permanentmagneten im Rotor auf die Statorwicklungen. Das von ihm erzeugte Magnetfeld wird dem magnetischen Stator Drehfeld überlagert. Dies führt zu einer Änderung des verketteten Flusses im Stator, was nach dem Induktionsgesetz wiederum einer induzierten Spannung in den Statorwicklungen entspricht. Dieser Zusammenhang wird im Ersatzschaltbild als Spannungsquelle berücksichtigt.

Im Folgenden werden für die Modellbildung folgende Annahmen getroffen:

- Die Maschine ist in ihren drei Wicklungen exakt symmetrisch aufgebaut.
- Das speisende Drehspannungssystem ist symmetrisch, starr und enthält keine Nullkomponente.
- Stromverdrängungseffekte werden vernachlässigt.
- Eisenverluste werden vernachlässigt.
- Die magnetische Streuung wird vernachlässigt.
- Die Induktivitäten können in Längs- und Querrichtung verschieden sein.
- Es wird nur die Grundwelle betrachtet.
- Der Permanentmagnetfluss ist konstant.

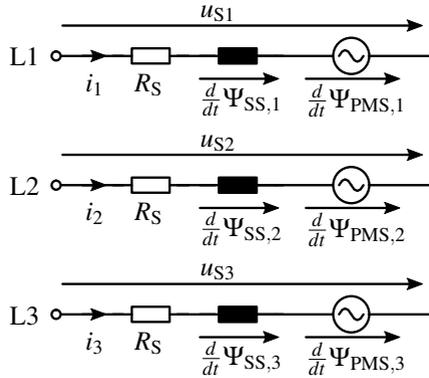


Abbildung 3.2: Ersatzschaltbild einer symmetrischen PSM

Das unter diesen Voraussetzungen gültige Ersatzschaltbild der Synchronmaschine ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Aufgrund der getroffenen Annahmen sind die drei ohmschen Widerstände und die Induktivitäten in allen drei Wicklungen identisch. Das Spannungsgleichungssystem für die drei Statorspannungen ist in Matrixnotation:

$$\mathbf{u}_S = \mathbf{R}_S \mathbf{i}_S + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\Psi}_S \quad (3.1)$$

mit

$$\mathbf{u}_S = \begin{pmatrix} u_{S1} \\ u_{S2} \\ u_{S3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{i}_S = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Dies sind die von der Drehstrombrückenschaltung gestellten Momentanwerte der Spannungen und Ströme. Ihre Zeitabhängigkeit wird in dieser Modellbildung zur besseren Lesbarkeit der Gleichungen nicht explizit dargestellt, sondern lediglich durch die Verwendung von Kleinbuchstaben ausgedrückt.

Unter der getroffenen Annahme, dass die drei Wicklungen elektrisch identisch sind, gilt

$$R_S = R_{S1} = R_{S2} = R_{S3} \quad (3.3)$$

Darüber hinaus sind die drei Stränge durch die Wicklungsisolation galvanisch nur am Sternpunkt verbunden und die Widerstandsmatrix darum nur in der Hauptdiagonalen besetzt:

$$\mathbf{R}_S = \begin{pmatrix} R_S & 0 & 0 \\ 0 & R_S & 0 \\ 0 & 0 & R_S \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

In der Statorflussmatrix werden die sich überlagernden Flüsse der Statorströme  $\Psi_{SS}$  und des Permanentmagnet-erregten Rotors  $\Psi_{PMS}$  zusammengefasst:

$$\Psi_S = \Psi_{SS} + \Psi_{PMS} \quad (3.5)$$

Dabei stellt die Matrix  $\Psi_{PMS}$  die Rückwirkung des permanentmagneterregten Rotors auf den Statorfluss dar:

$$\Psi_{PMS} = \Psi_{PM} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\gamma) \\ \cos(\gamma - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\gamma - \frac{4\pi}{3}) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Die Matrix  $\Psi_{SS}$  wiederum beschreibt die Rückwirkung der Statorströme auf den Statorfluss und wird deshalb als Produkt der Statorinduktivitäten mit den Statorströmen beschrieben:

$$\Psi_{SS} = \mathbf{L}_{SS} \cdot \mathbf{i}_S \quad (3.7)$$

Die Induktivität hängt allgemein gemäß

$$L = \frac{\Psi}{i} = \frac{w \cdot \Phi}{\frac{\Theta}{w}} = \frac{\Phi}{\Theta} \cdot w^2 = \lambda \cdot w^2 \quad (3.8)$$

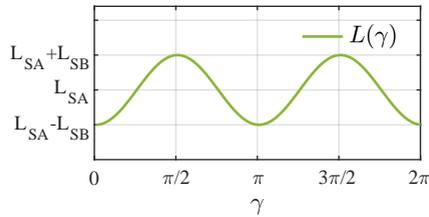


Abbildung 3.3: Prinzipielle Darstellung der Winkelabhängigkeit der Luftspaltfeldinduktivität einer magnetisch anisotropen Synchronmaschine

vom magnetischen Leitwert  $\lambda$  ab [60, 61, E10, 71–73]. Der magnetische Leitwert wiederum hängt sehr stark von der Größe des Luftspalts ab. Dies liegt an der deutlich kleineren magnetischen Permeabilität der Luft  $\mu_{r,\text{Luft}} \approx 1$  verglichen mit der Permeabilität von Eisen  $\mu_{r,\text{Eisen}} \approx 300 \dots 10000$ . Der magnetische Leitwert ist daher im Luftspalt um den Faktor  $\frac{\mu_{r,\text{Luft}}}{\mu_{r,\text{Eisen}}}$  kleiner, als im das Eisenblech des restlichen Aufbaus der Maschine. Es hängt nun stark von der Bauform und der Bauart des Rotors der Maschine ab, wie der Luftspalt über den Polumfang gestaltet ist. Neben dem eigentlichen Luftspalt haben auch alle andere Materialien im magnetischen Kreis Einfluss auf den magnetischen Leitwert. Besonders sind hierbei die Permanentmagnete mit ihrer spezifischen Permeabilität und ihrer geometrischen Anordnung auf, oder auch im Rotor zu erwähnen. In Summe wird daher der magnetische Leitwert nicht konstant über den Umfang des Luftspalts sein und damit auch die Induktivitäten einen winkelabhängigen Anteil besitzen. Die Induktivitätsmatrix  $\mathbf{L}_{SS}$  wird daher in einen konstanten Anteil  $\mathbf{L}_{SA}$  und einen winkelabhängigen Anteil  $\mathbf{L}_{SB}$  aufgeteilt [63]. Dabei wird der winkelabhängige Anteil als sinusförmig über den

Umfang angenommen und entsprechend modelliert (siehe hierzu auch Abbildung 3.3)[61–64]:

$$\mathbf{L}_{SS} = \mathbf{L}_{SA} + \mathbf{L}_{SB} \quad (3.9)$$

$$L_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 + \sigma_{S,ii} & -\frac{1}{2} + \sigma_{S,ik} & -\frac{1}{2} + \sigma_{S,ik} \\ -\frac{1}{2} + \sigma_{S,ik} & 1 + \sigma_{S,ii} & -\frac{1}{2} + \sigma_{S,ik} \\ -\frac{1}{2} + \sigma_{S,ik} & -\frac{1}{2} + \sigma_{S,ik} & 1 + \sigma_{S,ii} \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}_{SA}} \quad (3.10)$$

$$+ L_B \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(2\gamma) & \cos(2\gamma - \frac{2\pi}{3}) & \cos(2\gamma - \frac{4\pi}{3}) \\ \cos(2\gamma - \frac{2\pi}{3}) & \cos(2\gamma - \frac{4\pi}{3}) & \cos(2\gamma) \\ \cos(2\gamma - \frac{4\pi}{3}) & \cos(2\gamma) & \cos(2\gamma - \frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}_{SB}} \quad (3.11)$$

Aufgrund der Vernachlässigung von Streueffekten werden die in dieser Definition enthaltenen Streuterme  $\sigma_{S,ii}$  und  $\sigma_{S,ik}$  für die weitere Herleitung zu Null gesetzt und die Induktivitätsmatrix wird dadurch zu

$$\mathbf{L}_{SS} = L_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}_{SA}} \quad (3.12)$$

$$+ L_B \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(2\gamma) & \cos(2\gamma - \frac{2\pi}{3}) & \cos(2\gamma - \frac{4\pi}{3}) \\ \cos(2\gamma - \frac{2\pi}{3}) & \cos(2\gamma - \frac{4\pi}{3}) & \cos(2\gamma) \\ \cos(2\gamma - \frac{4\pi}{3}) & \cos(2\gamma) & \cos(2\gamma - \frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}_{SB}} \quad (3.13)$$

Die beiden Faktoren  $L_A$  und  $L_B$  stammen von der Berechnung der Luftspaltfeld-Wechselinduktivitäten, bei der der Luftspaltfeldverlauf als sinusförmig über den Bohrungsumfang mit einem konstanten Gleichanteil angenommen wird. Über einen Faktor, der sich aus Maschinenkonstruktionsparametern zusammensetzt, aber im Betrieb konstant ist, ist  $L_A$  direkt proportional zum Gleichanteil, während  $L_B$  direkt proportional zum Wechselanteil ist [63]. Deutlich wird das auch, wenn beide durch die üblicherweise verwendeten Induktivitäten in Richtung der beiden am Rotorfluss orientierten Achsen  $L_d$  und  $L_q$  ausgedrückt werden:

$$L_A = \frac{1}{3} (L_d + L_q) \quad (3.14)$$

$$L_B = \frac{1}{3} (L_d - L_q) \quad (3.15)$$

Für magnetisch isotrope Maschinen ist die Induktivität über den ganzen Umfang des Luftspalts gleich groß. Dann ist auch  $L_d = L_q$  woraus sofort ersichtlich ist, dass dann auch  $L_B = L_{SB} = 0$  gilt. Es bleibt nur noch der Gleichanteil, repräsentiert durch  $L_A$  und  $L_{SA}$  als winkelunabhängiger Term in der Induktivitätsmatrix stehen.

Die so gewonnen Zusammenhänge aus Gleichungen (3.5) und (3.7) werden nun benutzt, um das ursprüngliche Spannungsgleichungssystem aus Gleichung (3.1) umzuschreiben:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_S &= \mathbf{R}_S \mathbf{i}_S + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\Psi}_S \\ &= \mathbf{R}_S \mathbf{i}_S + \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\Psi}_{SS} + \boldsymbol{\Psi}_{PMS}) = \mathbf{R}_S \mathbf{i}_S + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\Psi}_{SS} + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\Psi}_{PMS} \\ \mathbf{u}_S &= \mathbf{R}_S \mathbf{i}_S + \frac{d}{dt} (\mathbf{L}_{SS} \cdot \mathbf{i}_S) + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\Psi}_{PMS} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Mit der Raumzeigertransformation nach Clarke wird Gleichung (3.16) von der dreiphasigen Darstellung in das statorfeste  $\alpha\beta$ -Koordinatensystem transfor-

miert. Die zugehörige Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  vom Dreiphasensystem in das statorfeste  $\alpha\beta$ -Koordinatensystem ist gemäß [65–68]:

$$\mathbf{T} = \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

mit der zugehörigen Inversen  $\mathbf{T}^{-1}$  für die Rücktransformation vom  $\alpha\beta$ -Koordinatensystem in das Dreiphasensystem

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Diese Transformation entspricht exakt der Amplituden-invarianten Raumzeigertransformation aus Gleichung (2.27) [68], erweitert um die Nullkomponente, die in Gleichung (2.27) nicht mit berücksichtigt wird. In das statorfeste  $\alpha\beta$ -Bezugssystem transformierte Größen sind in dieser Arbeit durch eine Tilde über dem Formelzeichen gekennzeichnet. Die transformierten Spannungen und Ströme erhält man gemäß

$$\tilde{\mathbf{u}}_S = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_S \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{i}}_S = \mathbf{T} \cdot \mathbf{i}_S \quad (3.19)$$

und die Rücktransformation erfolgt gemäß

$$\mathbf{u}_S = \mathbf{T}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_S \quad \text{und} \quad \mathbf{i}_S = \mathbf{T}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{i}}_S \quad (3.20)$$

Die Gleichungen aus (3.20) werden nun in Gleichung (3.16) eingesetzt:

$$\mathbf{T}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_S = \mathbf{R}_S \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{i}}_S + \frac{d}{dt} \left( \mathbf{L}_{SS} \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{i}}_S \right) + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\Psi}_{PMS} \quad (3.21)$$

Um die Gleichung nach  $\tilde{\mathbf{u}}_S$  aufzulösen wird dieser Term zunächst neutral durch eine Multiplikation mit  $\mathbf{T}$  von links und Einfügen der Einheitsmatrix  $\mathbf{E}$  erweitert:

$$\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_S = \mathbf{T}\mathbf{R}_S\mathbf{T}^{-1}\tilde{\mathbf{i}}_S + \mathbf{T} \frac{d}{dt} \left( \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}}_{\mathbf{E}} \mathbf{L}_{SS}\mathbf{T}^{-1}\tilde{\mathbf{i}}_S \right) + \mathbf{T} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\Psi}_{PMS} \quad (3.22)$$

Die Multiplikation der Widerstandsmatrix  $\mathbf{R}_S$  und der Induktivitätsmatrix  $\mathbf{L}_{SS}$  mit  $\mathbf{T}$  von links und mit  $\mathbf{T}^{-1}$  von rechts wird als transformierte Widerstandsmatrix  $\tilde{\mathbf{R}}_S$  und als transformierte Induktivitätsmatrix  $\tilde{\mathbf{L}}_{SS}$  definiert:

$$\underbrace{\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}}_{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_S = \underbrace{\mathbf{T}\mathbf{R}_S\mathbf{T}^{-1}}_{\tilde{\mathbf{R}}_S} \tilde{\mathbf{i}}_S + \mathbf{T} \frac{d}{dt} \left( \mathbf{T}^{-1} \underbrace{\mathbf{T}\mathbf{L}_{SS}\mathbf{T}^{-1}}_{\tilde{\mathbf{L}}_{SS}} \tilde{\mathbf{i}}_S \right) + \mathbf{T} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\Psi}_{PMS} \quad (3.23)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_S = \tilde{\mathbf{R}}_S \tilde{\mathbf{i}}_S + \mathbf{T} \frac{d}{dt} \left( \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{L}}_{SS} \tilde{\mathbf{i}}_S \right) + \mathbf{T} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\Psi}_{PMS} \quad (3.24)$$

Der Ausdruck in der Klammer wird nach der Kettenregel abgeleitet. Die zeitliche Ableitung der konstanten Transformationsmatrix ist Null, wodurch der zugehörige Term verschwindet.

$$\tilde{\mathbf{u}}_S = \tilde{\mathbf{R}}_S \tilde{\mathbf{i}}_S + \mathbf{T} \underbrace{\frac{d\mathbf{T}^{-1}}{dt}}_{=0} \cdot \tilde{\mathbf{L}}_{SS} \tilde{\mathbf{i}}_S + \underbrace{\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}}_{\mathbf{E}} \frac{d}{dt} (\tilde{\mathbf{L}}_{SS} \tilde{\mathbf{i}}_S) + \frac{d}{dt} \mathbf{T} \boldsymbol{\Psi}_{PMS} \quad (3.25)$$

Mit

$$\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{PMS} = \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Psi}_{PMS} \quad (3.26)$$

lautet das resultierende transformierte Spannungsgleichungssystem der permanentmagneterregten Synchronmaschine im statorfesten  $\alpha\beta$ -Bezugssystem:

$$\tilde{\mathbf{u}}_S = \tilde{\mathbf{R}}_S \tilde{\mathbf{i}}_S + \frac{d}{dt} (\tilde{\mathbf{L}}_{SS} \tilde{\mathbf{i}}_S) + \frac{d}{dt} \tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{PMS} \quad (3.27)$$

Die transformierten Spannungen und Ströme wurden bereits in Gleichung (3.19) definiert. Ausgeschrieben enthalten die Raumzeiger im komplexen  $\alpha\beta$ -

Bezugssystem jeweils die  $\alpha$ -Komponente als Realteil, die  $\beta$ -Komponente als zugehörigen Imaginärteil und die Nullkomponente als skalaren Gleichanteil.

$$\tilde{\mathbf{u}}_S = \begin{pmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \\ u_0 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} u_{S1} \\ u_{S2} \\ u_{S3} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

$$\tilde{\mathbf{i}}_S = \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Die transformierte Widerstandsmatrix und die transformierte Induktivitätsmatrix wurden in Gleichung (3.23) definiert und jeweils mit der Mathematik-Software Maple berechnet. Für die Widerstandsmatrix ergibt die Transformation aufgrund des symmetrischen Aufbaus und der identischen Einträge in der Hauptdiagonalen keine Änderung

$$\tilde{\mathbf{R}}_S = \mathbf{T}\mathbf{R}_S\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} R_S & 0 & 0 \\ 0 & R_S & 0 \\ 0 & 0 & R_S \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Die Transformation der Induktivitätsmatrix kann als Summe der Transformation der beiden Matrizen  $\mathbf{L}_{SA}$  und  $\mathbf{L}_{SB}$  separat berechnet werden:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}_{SS} &= \mathbf{T}\mathbf{L}_{SS}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}(\mathbf{L}_{SA} + \mathbf{L}_{SB})\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}\mathbf{L}_{SA}\mathbf{T}^{-1} + \mathbf{T}\mathbf{L}_{SB}\mathbf{T}^{-1} \\ &= \tilde{\mathbf{L}}_{SA} + \tilde{\mathbf{L}}_{SB} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Auch diese Berechnungen wurden mit Maple durchgeführt und liefern als Ergebnis

$$\tilde{\mathbf{L}}_{SA} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}L_A & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}L_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}L_A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

für den winkelunabhängigen Anteil der Induktivität und

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{L}}_{\text{SB}} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}L_{\text{B}} \cos(2\gamma) & \frac{3}{2}L_{\text{B}} \sin(2\gamma) & 0 \\ \frac{3}{2}L_{\text{B}} \sin(2\gamma) & -\frac{3}{2}L_{\text{B}} \cos(2\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{3}{2}L_{\text{B}} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\gamma) & \sin(2\gamma) & 0 \\ \sin(2\gamma) & -\cos(2\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (3.33)$$

für den winkelabhängigen Anteil. Aufgrund der Vernachlässigung der Streuterme existiert bei der Transformation ins statorfeste Bezugssystem keine Nullkomponente der Induktivitäten.

Die Transformation der Flussmatrix  $\Psi_{\text{PMS}}$  (siehe Gleichung (3.6)) ergibt

$$\tilde{\Psi}_{\text{PMS}} = \mathbf{T} \cdot \Psi_{\text{PMS}} = \Psi_{\text{PM}} \cdot \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \\ 0 \end{pmatrix}\quad (3.34)$$

Dieses Ergebnis ist auch physikalisch sofort nachvollziehbar. Wenn der Rotorlagewinkel  $\gamma = 0$  ist, dann zeigt das Polrad gerade in die  $\alpha$ -Achse des statorfesten Bezugssystems (siehe Abbildung 3.1). Der Fluss des Rotors ist also vollständig auf die reelle Achse orientiert und wird maximal ( $\cos(0) = 1$ ), während der Anteil in  $\beta$ -Achse gerade null ist ( $\sin(0) = 0$ ).

Damit sind alle Matrizen auch mit ihren Elementen bekannt. In Gleichung (3.27) wird nun die Klammer mit der Kettenregel abgeleitet und dann die Zusammenhänge aus den Gleichungen (3.31),(3.32) und (3.33) eingesetzt.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{u}}_S &= \tilde{\mathbf{R}}_S \tilde{\mathbf{i}}_S + \frac{d}{dt} (\tilde{\mathbf{L}}_{SS} \tilde{\mathbf{i}}_S) + \frac{d}{dt} \tilde{\Psi}_{PMS} \\
 &= \tilde{\mathbf{R}}_S \tilde{\mathbf{i}}_S + \tilde{\mathbf{i}}_S \frac{d(\tilde{\mathbf{L}}_{SS})}{dt} + \tilde{\mathbf{L}}_{SS} \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{i}}_S + \frac{d}{dt} \tilde{\Psi}_{PMS} \\
 &= \tilde{\mathbf{R}}_S \tilde{\mathbf{i}}_S + \tilde{\mathbf{i}}_S \left( \underbrace{\frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{L}}_{SA} + \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{L}}_{SB}}_{=0} \right) + (\tilde{\mathbf{L}}_{SA} + \tilde{\mathbf{L}}_{SB}) \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{i}}_S + \frac{d}{dt} \tilde{\Psi}_{PMS} \\
 &= \tilde{\mathbf{R}}_S \tilde{\mathbf{i}}_S + \tilde{\mathbf{L}}_{SA} \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{i}}_S + \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{L}}_{SB} \cdot \tilde{\mathbf{i}}_S + \tilde{\mathbf{L}}_{SB} \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{i}}_S + \frac{d}{dt} \tilde{\Psi}_{PMS} \quad (3.35)
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist nun das vollständige Spannungsgleichungssystem einer permanentmagneterregten Synchronmaschine, transformiert in das statorfeste  $\alpha\beta$ -Bezugssystem, in welchem zusätzlich die Induktivitätsmatrix  $\tilde{\mathbf{L}}_{SS}$  in einen winkelunabhängigen und einen winkelabhängigen Teil aufgeteilt ist.

## 3.2 Stromänderungsparameter bei isotropen Synchronmaschinen

Grundlage für die Herleitung der Stromänderungsparameter bei der isotropen Synchronmaschine sind die Systemgleichungen der Synchronmaschine nach Gleichung (3.35) aus Abschnitt 3.1:

$$\tilde{\mathbf{u}}_S = \tilde{\mathbf{R}}_S \tilde{\mathbf{i}}_S + \tilde{\mathbf{L}}_{SA} \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{i}}_S + \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{L}}_{SB} \cdot \tilde{\mathbf{i}}_S + \tilde{\mathbf{L}}_{SB} \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{i}}_S + \frac{d}{dt} \tilde{\Psi}_{PMS} \quad (3.36)$$

Isotropie bedeutet wörtlich „gleich in alle Richtungen“ (von altgriechisch isos=gleich und tropos=Art und Weise). Magnetische Isotropie liegt dann vor, wenn etwas in seiner magnetischen Eigenschaft unabhängig von der Richtung ist. Bei magnetisch isotropen Maschinen ist der magnetische Leitwert und da-

mit auch die Induktivität nicht von der Richtung abhängig, das heißt, dass sie über den Umfang des Luftspalts konstant ist. Damit gilt

$$L_d = L_q = L \quad (3.37)$$

Für den Gleich- und den Wechselanteil der Induktivitätsmatrix bedeutet das nach Gleichung (3.14) und (3.15)

$$L_A = \frac{1}{3} (L_d + L_q) = \frac{2}{3} L \quad (3.38)$$

$$L_B = \frac{1}{3} (L_d - L_q) = 0 \quad (3.39)$$

Der Wechselanteil verschwindet und es bleibt nur noch der Gleichanteil als Beitrag zur Induktivität übrig. Mit  $L_B = 0$  ist auch direkt die zugehörige Matrix  $\tilde{\mathbf{L}}_{SB} = 0$  (siehe Gleichung (3.33)). Damit vereinfachen sich die Systemgleichungen der Synchronmaschine nach Gleichung (3.36) erheblich und man erhält:

$$\tilde{\mathbf{u}}_S = \tilde{\mathbf{R}}_S \tilde{\mathbf{i}}_S + \tilde{\mathbf{L}}_{SA} \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{i}}_S + \frac{d}{dt} \tilde{\Psi}_{PMS} \quad (3.40)$$

Mit vollständig ausgeschriebenen Matrizen ist dies mit (3.30), (3.32) und (3.34)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \\ u_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R_S & 0 & 0 \\ 0 & R_S & 0 \\ 0 & 0 & R_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} L_A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{d}{dt} \left( \Psi_{PM} \cdot \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Durch die statorfeste Orientierung mit Bezug des Winkels  $\gamma$  auf die reelle  $\alpha$ -Achse (siehe Abbildung 3.1 auf Seite 57) bildet der  $\cos(\gamma)$  Größen auf die reelle  $\alpha$ -Achse, der  $\sin(\gamma)$  auf die imaginäre  $\beta$ -Achse ab. Da der transformierte Fluss gemäß Gleichung (3.34) keine Nullkomponente besitzt und genau dieser

Abbildung entspricht, kann er direkt als Raumzeiger im statorfesten Bezugssystem dargestellt werden:

$$\underline{\Psi}_{\text{PMS}} = \begin{pmatrix} \Psi_{\text{PMS},\alpha} \\ \Psi_{\text{PMS},\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{\text{PM}} \cdot \cos \gamma \\ \Psi_{\text{PM}} \cdot \sin \gamma \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Da im Folgenden die Raumzeiger alle ausschließlich im statorfesten Bezugssystem betrachtet werden, wird aus Gründen der Lesbarkeit die Tilde in den Variablenbezeichnungen weggelassen. Stattdessen steht der Unterstrich grundsätzlich als Kennzeichnung eines Raumzeigers im statorfesten  $\alpha\beta$ -Bezugssystem. Die Ableitung des Statorflusses wirkt auf die Statorspannung als von der Rotation der Maschine verursachte Gegenspannung  $\underline{u}_i$  mit

$$\underline{u}_i = \begin{pmatrix} u_{i\alpha} \\ u_{i\beta} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \underline{\Psi}_{\text{PMS}} = \Psi_{\text{PM}} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\gamma) \\ \cos(\gamma) \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \gamma \quad (3.43)$$

Die Komponenten von  $\underline{u}_s$  sind damit nach Gleichung (3.41) und (3.38)

$$u_\alpha = R_S i_\alpha + L \frac{d}{dt} i_\alpha + u_{i\alpha} \quad (3.44)$$

$$u_\beta = R_S i_\beta + L \frac{d}{dt} i_\beta + u_{i\beta} \quad (3.45)$$

$$u_0 = R_S i_0 \quad (3.46)$$

Die  $\alpha$ - und  $\beta$ -Komponenten der Spannung und des Stroms stellen jeweils einen Raumzeiger in der komplexen  $\alpha\beta$ -Ebene dar. Die Nullkomponente der Spannung hängt nur vom ohmschen Spannungsabfall eines gegebenenfalls auftretenden Gleichtaktstromes ab. Bei im Stern verschalteten Maschinen mit nicht angeschlossenem Sternpunkt kann ein solcher Strom nicht auftreten und der Gleichtaktanteil in der Spannung ist Null.

Auf die Ableitung des Stromraumzeigers und damit auf die gesuchte Stromänderung hat der Gleichtaktanteil keine Auswirkung. Die Systemgleichung (3.40)

wird daher nur noch mit den  $\alpha$ - und  $\beta$ -Komponenten betrachtet und als Raumzeiger interpretiert:

$$\underline{u}_S = R_S \dot{i}_S + L \frac{d}{dt} i_S + \underline{u}_i \quad (3.47)$$

Diese Gleichung kann nun leicht nach der Ableitung des Stromes umgestellt werden:

$$\frac{d}{dt} i_S = \frac{1}{L} (\underline{u}_S - R_S \dot{i}_S - \underline{u}_i) \quad (3.48)$$

Die Spannung  $\underline{u}_S$  ist die von der Drehstrombrücke gestellte Spannung und nimmt je nach Schaltzustand die Werte aus Tabelle 2.2 an (siehe auch Gleichung (2.29)). Der Betrag ist dabei bei den aktiven Schaltzuständen immer gleich  $\frac{2}{3}U_d$  und die Richtung entspricht der des zugehörigen Schaltzustandsraumzeigers  $\underline{s}_x$ . Bei den Freilaufzuständen ist die gestellte Spannung Null. Damit kann die Ableitung des Stromes gemäß Gleichung (3.48) für die sechs aktiven und die beiden Freilaufschaltzustände getrennt werden:

$$\frac{d}{dt} i_{a,x} = \frac{1}{L} \left( \frac{2}{3} U_d \cdot \underline{s}_x - R_S \dot{i}_S - \underline{u}_i \right) \quad \forall x \in \mathbb{N} \mid x \in \{1 \dots 6\} \quad (3.49)$$

$$\frac{d}{dt} i_f = \frac{1}{L} (0 - R_S \dot{i}_S - \underline{u}_i) \quad (3.50)$$

Der Index „S“ für „Statorstrom“ wird zugunsten einer übersichtlicheren Darstellung in der Bezeichnung der Stromsteigungen und der Stromänderungsparameter im weiteren Verlauf weggelassen. An seine Stelle treten „a“ für Stromsteigungen in den aktiven Schaltzuständen und „f“ für die Freiläufe.

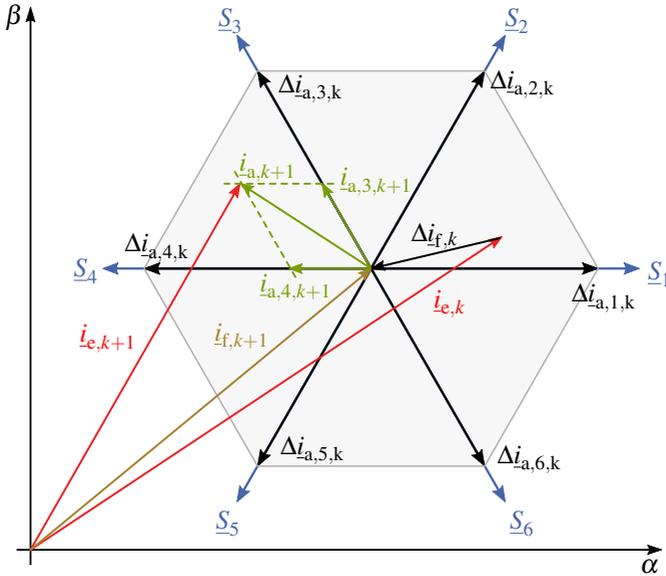


Abbildung 3.4: Stromänderungsparameter einer isotropen Synchronmaschine

Damit können die Stromänderungsparameter gemäß der Definition aus Gleichung (2.15) und (2.16) für die isotrope Synchronmaschine beschrieben werden:

$$\begin{aligned} \Delta i_f &= \frac{d}{dt} i_f \cdot T_{\text{PWM}} \\ &= -\frac{1}{L} (R_S i_S + u_i) \cdot T_{\text{PWM}} \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \Delta i_{a,x} &= \left[ \frac{d}{dt} i_{a,x} - \frac{d}{dt} i_f \right] \cdot T_{\text{PWM}} \\ &= \frac{1}{L} \cdot \frac{2}{3} U_d \cdot \underline{s}_x \cdot T_{\text{PWM}} \quad \forall x \in \mathbb{N} \mid x \in \{1 \dots 6\} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Diese Gleichungen sind die Grundlage für das in [1] vorgestellte Regelungsverfahren für isotrope Synchronmaschinen. Die sechs „aktiven Stromänderungsparameter“  $\Delta i_{a,x}$  entsprechen der Änderung des Statorstromes wenn für einen ganzen Takt der jeweils zugehörige aktive Schaltzustand  $S_x$  geschal-

tet wird. Durch Abzug der Stromänderung im Freilauf  $\Delta i_f$  in Formel (3.52) wird die Wirkung des ohmschen Spannungsabfalls sowie der drehzahlabhängigen Gegenspannung der Maschine  $u_i$  auf die Stromänderung herausgerechnet (vergleiche Gleichung (3.49)). Damit sind die sechs aktiven Stromänderungsparameter der isotropen Synchronmaschine nur noch vom Betrag der Zwischenkreisspannung, der vom Rotorlagewinkel unabhängigen Induktivität und der Richtung des verwendeten Schaltzustandsraumzeigers abhängig. Sie sind entsprechend alle gleich lang und liegen auf der zum jeweiligen Schaltzustand zugehörigen Schaltzustandsachse, definiert durch die Richtung des jeweiligen Schaltzustandsraumzeigers  $\underline{S}_x$ .

In Abbildung 3.4 sind die aktiven Stromänderungsparameter als schwarze Raumzeiger dargestellt. Sie spannen ein regelmäßiges Hexagon in der statorfesten  $\alpha\beta$ -Ebene auf. Dieses ist in Abbildung 3.4 grau dargestellt. Ausgehend vom Wert des Stroms  $i_{e,k}$  am Ende des Taktes  $k$  kann der Strom innerhalb des nächsten Taktes  $k+1$  nur Werte innerhalb dieses Hexagons annehmen. Dass das Hexagon seinen Ursprung nicht an der Spitze von  $i_{e,k}$  hat, liegt daran, dass die Gegenspannung der Maschine gleichzeitig mit der von der Drehstrombrückenschaltung angelegten Spannung an den Wicklungen wirksam ist. Werden aktive Schaltzustände geschaltet, die in der  $\alpha\beta$ -Ebene den Stromraumzeiger in die gleiche Richtung ändern, so ist die mögliche Stromänderung in diese Richtung innerhalb eines Taktes viel größer, als wenn die angelegte Spannung der Gegenspannung entgegenwirken muss. Der Ursprung des Hexagons liegt darum bei

$$\underline{i}_{f,k+1} = \underline{i}_{e,k} + \Delta \underline{i}_{f,k} \quad (3.53)$$

Dies entspricht geometrisch gerade der Subtraktion des Freilaufparameters in Gleichung (3.52) und zeigt auf anschauliche Weise, dass erst durch diesen Kunstgriff das regelmäßige Hexagon der aktiven Stromänderungsparameter entsteht [1].

### 3.2.1 Regelungskonzept der Adaptiven Direkten Stromregelung einer isotropen Synchronmaschine

Der Ursprung des Hexagons  $\dot{i}_{f,k+1}$  entspricht nach Gleichung (3.53) gerade dem Wert des Statorstromes, der sich nach einem Takt Freilauf, ohne jeglichen Anteil eines aktiven Schaltzustandes, einstellen würde. Werden allerdings aktive Schaltzustände geschaltet, wird der Strom, ausgehend von diesem Punkt, am Ende der Taktperiode einen anderen Wert innerhalb des grauen Sechsecks erreichen. Würde beispielsweise während des ganzen Taktes  $k+1$  der aktive Schaltzustand  $S_6$  eingeschaltet, so wäre der Strom am Ende des Taktes gerade an der Spitze des Stromänderungsparameters  $\Delta i_{a,6,k}$  angelangt. Würde er nur während der halben Periode eingeschaltet, wäre auch die Änderung in Richtung  $\Delta i_{a,6,k}$  nur halb so groß.

Der Ursprung des Hexagons  $\dot{i}_{f,k+1}$  dient deshalb als Ausgangspunkt für die Berechnung der Einschaltzeiten der aktiven Schaltzustände: Soll am Ende des Taktes  $k+1$  ein gegebener Sollwert  $\dot{i}_{e,k+1}$  erreicht werden, so kann dieser als Vektoraddition aus den Stromänderungen der anteilig geschalteten Schaltzustände, mit deren benachbarten Stromänderungsparameter dargestellt werden:

$$\dot{i}_{a,k+1} = \dot{i}_{a,3,k+1} + \dot{i}_{a,4,k+1} = \frac{T_3}{T_{\text{PWM}}} \cdot \Delta i_{a,3,k} + \frac{T_4}{T_{\text{PWM}}} \cdot \Delta i_{a,4,k} \quad (3.54)$$

Dies ist in Abbildung 3.4 als grünes Zeigerdiagramm eingezeichnet und veranschaulicht, wie die Aussteuergrade im Zusammenhang mit der Adaptiven Direkten Stromregelung für isotrope Synchronmaschinen berechnet werden. Durch die Struktur des regelmäßigen Sechsecks können für die Projektion des Sollwerts auf die benachbarten Schaltzustandsachsen die bekannten Formeln aus der Raumzeigermodulation verwendet werden [1, 69].

Dies zeigt, dass das Konzept der Stromänderungsparameter die zu regelnde Strecke in direkten Bezug zu den Aussteuergraden bringt und ein sehr einfaches Regelungsverfahren ermöglicht, das ohne Streckenparameter und aufwändiges physikalisches Modell auskommt. Weder müssen die Induktivitäten und Widerstände der Maschine bekannt sein, noch muss die Zwischenkreiss-

pannung vorgesteuert werden. In der Information der Stromsteigung sind alle Streckenparameter implizit mit enthalten. Es zeigt aber auch, wie wichtig für dieses Verfahren die exakte Beschreibung und die Identifizierbarkeit der Stromänderungsparameter in Echtzeit im Betrieb ist, gerade weil sie ein solch zentraler Bestandteil der Adaptiven Direkten Stromregelung sind.

### **3.2.2 Identifikation des Rotorlagewinkels aus dem Freilaufparameter**

Der Freilaufparameter hängt nach Gleichung (3.51) von der induzierten Gegenspannung, der Induktivität und vom ohmschen Spannungsabfall des Statorstroms am Statorwiderstand ab. Da die Richtung der induzierten Gegenspannung über die Gleichung (3.43) direkt mit dem Rotorlagewinkel  $\gamma$  verknüpft ist, kann über die Messung der Stromsteigung im Freilauf der Rotorlagewinkel bestimmt werden und in geberlosen Verfahren angewendet werden. Nur bei großen Strömen verursacht der ohmsche Spannungsabfall einen Fehler, der aber mit Kenntnis des Statorwiderstandswerts kompensierbar ist. Hierzu ist außer der ohnehin notwendigen PWM kein zusätzliches Testsignal notwendig. Die Identifikation des Rotorlagewinkels mittels der gemessenen taktfrequenten Stromsteigungen ist bereits seit Ende der 1980er Jahre Grundlage einiger Verfahren zur geberlosen Regelung elektrischer Maschinen. Als ein wichtiges Beispiel sei hier die INFORM-Methode genannt [7–9, 74]. Weitere Verfahren, die diese Zusammenhänge ebenfalls nutzen, sind unter anderem in [28, 75–79] dargestellt.

### **3.2.3 Berechnung des Freilaufparameters aus den aktiven Stromänderungsparametern**

Um die Stromänderungsparameter der aktiven Schaltzustände bestimmen zu können, wird in jedem Takt die gemessene Stromsteigung sowohl während der aktiven Schaltzustände, als auch während des Freilaufs benötigt (siehe Gleichung (3.52)). Speziell im Hinblick auf den Freilauf bewirken große Aussteuergrade der aktiven Schaltzustände, dass die Aussteuergrade der beiden Freilaufschaltzustände zu kurz werden, um noch valide Messungen

der Stromsteigung durchführen zu können. Der Extremfall ist hierbei die Blocktaktung, bei der gar kein Freilauf mehr geschaltet wird und die gestellte Spannung ausschließlich den sechs aktiven Raumzeigern entspricht.

In [1] wurde darum bei zu geringer Freilaufzeit zunächst das Modulationsverfahren umgeschaltet, damit oberer und unterer Freilauf zeitlich zusammengelegt werden konnten. Bei noch größeren aktiven Aussteuergraden wäre aber auch dieses Verfahren nicht geeignet gewesen, immer ausreichend lange Freiläufe zu gewährleisten. Darum wurde in der Regelung ein Mindestfreilauf implementiert, der zwar garantierte, dass die Stromsteigungen im Freilauf in jedem Takt gemessen werden konnten, aber gleichzeitig den Modulationsgrad und damit die Spannungsausnutzung der Drehstrombrückenschaltung merklich einschränkte.

Eine Alternative zum Mindestfreilauf stellt das im Folgenden vorgestellte Verfahren dar, mit dem der Freilaufparameter direkt aus den gemessenen Stromsteigungen der beiden verwendeten aktiven Schaltzustände auf sehr einfache Weise berechnet werden kann.

Werden nur die Stromsteigungen  $\frac{d}{dt}i_{a,x}$  der aktiven Schaltzustände ohne Abzug der Stromsteigung im Freilauf als Raumzeiger in der komplexen  $\alpha\beta$ -Ebene dargestellt, ergibt sich Abbildung 3.5. Dies geht direkt aus Gleichung (3.52) hervor wenn darin der Freilaufparameter nicht subtrahiert wird. Anschaulich kann auch in Abbildung 3.4 der Freilaufparameter vektoriell addiert werden.

Die in Abbildung 3.5 abgebildeten schwarzen Raumzeiger entsprechen durch die Multiplikation der Stromsteigungen mit  $T_{\text{PWM}}$  derjenigen Stromänderung in der komplexen  $\alpha\beta$ -Ebene, die sich einstellt, wenn ausschließlich der zugehörige Schaltzustand für einen ganzen Takt geschaltet wird. Durch die Überlagerung der von der Drehstrombrücke gestellten Spannung mit der Gegenspannung der Maschine ist direkt ersichtlich, dass die so dargestellten Stromänderungen deutlich richtungsabhängig sind. Die Drehstrombrückenschaltung stellt dabei sechs gleichberechtigte Spannungen zur Verfügung. Die Gegenspannung wirkt zusätzlich.

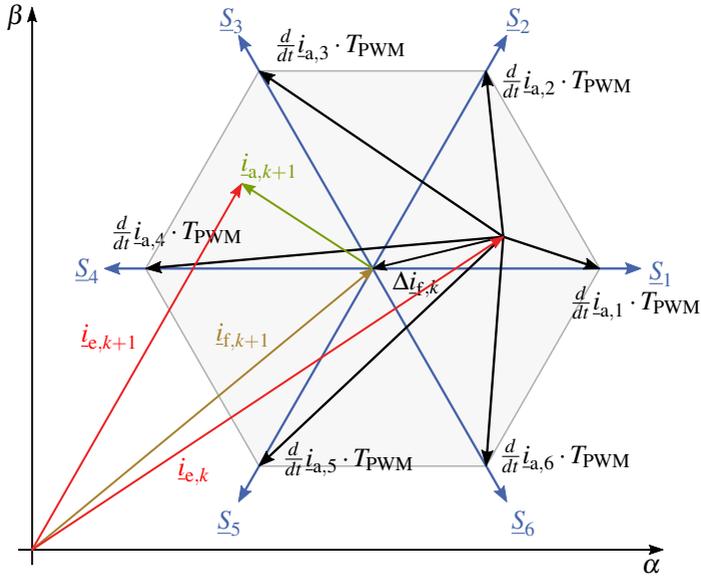


Abbildung 3.5: Stromänderungsparameter ohne Abzug der Stromänderung im Freilauf einer isotropen Synchronmaschine

Im Vergleich zu Abbildung 3.4 ist aus dem regelmäßigen Raumzeigerdiagramm der sechs aktiven Stromänderungsparameter, das eine einfache Berechnung der Aussteuergrade ermöglicht, ein sehr unregelmäßiges Raumzeigerdiagramm, bestehend aus den sechs Stromänderungen geworden. Im Ergebnis jedoch sind beide Raumzeigerdiagramme gleich: Die Spitzen der Stromänderungsparameter aus Abbildung 3.4 und der Stromänderungen aus Abbildung 3.5 liegen jeweils auf den gleichen Punkten, nämlich den Eckpunkten des regelmäßigen, grau dargestellten Sechsecks. Physikalisch betrachtet, wirkt die Gegenspannung ja für alle sechs Schaltzustände in die gleiche Richtung, bewirkt demnach also eine Parallelverschiebung des Sechsecks um  $\Delta \dot{i}_f$ .

Mit dem Wissen, dass die Spitzen der Raumzeiger auf einem regelmäßigen Sechseck liegen, kann nun der Freilaufparameter bestimmt werden. Hierzu wird die in Abschnitt 2.2.4 eingeführte und in Tabelle 2.5 beschriebene relative

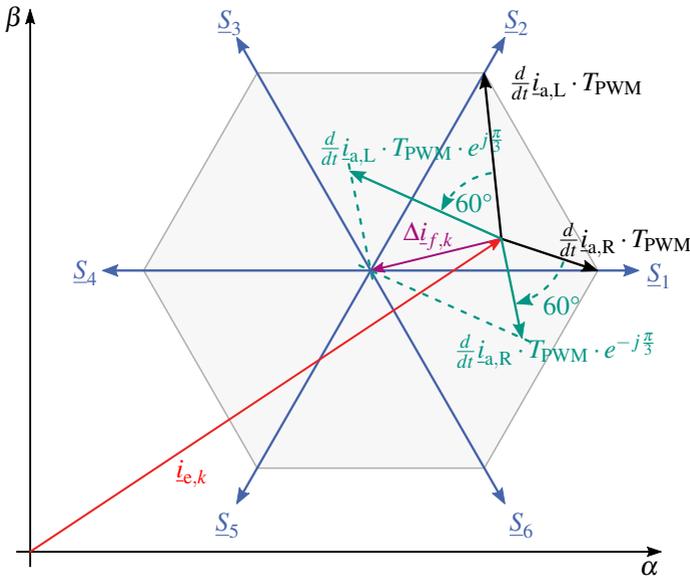


Abbildung 3.6: Konstruktion des Freilaufparameters aus den aktiven Stromänderungsparametern

Nomenklatur der benachbarten gemessenen Stromsteigungen verwendet. In Abbildung 3.6 sind die gemessenen Stromsteigungen der verwendeten aktiven Schaltzustände während eines Taktes schwarz dargestellt. In diesem Takt wurden die beiden aktiven Schaltzustände  $S_1=S_R$  als rechter aktiver Schaltzustand und  $S_2=S_L$  als linker aktiver Schaltzustand in Sektor I verwendet. Der Freilauf sei nicht geschaltet worden, so dass der Freilaufparameter  $\Delta i_f$  (lila dargestellt) nicht gemessen werden konnte. Die Stromänderungsparameter  $\Delta i_{a,x}$  nach Gleichung (3.52) werden nun ebenfalls in relativer Nomenklatur nach Tabelle 2.5 beschrieben. Da die Beträge der sechs aktiven Stromänderungsparameter alle gleich groß sind und nur die Richtung von den Schaltzustandsraumzeigern abhängt, gilt für den rechten und den linken Stromänderungsparameter eines Sektors der Zusammenhang:

$$\Delta i_{a,L} = \Delta i_{a,R} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} \quad (3.55)$$

Die beiden in Takt  $k$  gemessenen Stromsteigungen der beiden aktiven Schaltzustände multipliziert mit  $T_{\text{PWM}}$ , sind nach Gleichung (3.52) und zusammen mit Gleichung (3.51) in relativer Nomenklatur gerade die Stromänderungsparameter

$$\Delta i_{a,L,k} = \left[ \frac{d}{dt} i_{a,L,k} - \frac{d}{dt} i_f \right] T_{\text{PWM}} = \frac{d}{dt} i_{a,L,k} \cdot T_{\text{PWM}} - \Delta i_{f,k} \quad (3.56)$$

$$\Delta i_{a,R,k} = \left[ \frac{d}{dt} i_{a,R,k} - \frac{d}{dt} i_f \right] T_{\text{PWM}} = \frac{d}{dt} i_{a,R,k} \cdot T_{\text{PWM}} - \Delta i_{f,k} \quad (3.57)$$

Zusammen mit Gleichung (3.55) sind die Gleichungen (3.56) und (3.57) ein lineares Gleichungssystem, bestehend aus drei Gleichungen mit den drei Unbekannten  $\Delta i_{a,L,k}$ ,  $\Delta i_{a,R,k}$  und  $\Delta i_{f,k}$ , das gelöst werden kann. Dazu wird Gleichung (3.56) nach  $\Delta i_{f,k}$  umgestellt

$$\Delta i_{f,k} = \frac{d}{dt} i_{a,L,k} \cdot T_{\text{PWM}} - \Delta i_{a,L,k} \quad (3.58)$$

darin für  $\Delta i_{a,L,k}$  der Zusammenhang aus Gleichung (3.55) verwendet

$$\Delta i_{f,k} = \frac{d}{dt} i_{a,L,k} \cdot T_{\text{PWM}} - \Delta i_{a,R,k} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} \quad (3.59)$$

und anschließend  $\Delta i_{a,R,k}$  durch Gleichung (3.57) ersetzt und nach  $\Delta i_{f,k}$  umgestellt:

$$\Delta i_{f,k} = \frac{d}{dt} i_{a,L,k} \cdot T_{\text{PWM}} - \left( \frac{d}{dt} i_{a,R,k} \cdot T_{\text{PWM}} - \Delta i_{f,k} \right) \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} \quad (3.60)$$

$$\Delta i_{f,k} \left( 1 - e^{j\frac{\pi}{3}} \right) = \frac{d}{dt} i_{a,L,k} \cdot T_{\text{PWM}} - \frac{d}{dt} i_{a,R,k} \cdot T_{\text{PWM}} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} \quad (3.61)$$

Mit

$$\begin{aligned} 1 - e^{j\frac{\pi}{3}} &= 1 - \left( \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\sqrt{3} \right) = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ &= \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = e^{-j\frac{\pi}{3}} \end{aligned} \quad (3.62)$$

wird daraus

$$\begin{aligned} \Delta i_{f,k} &= \frac{d}{dt} i_{a,L,k} \cdot T_{\text{PWM}} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} - \frac{d}{dt} i_{a,R,k} \cdot T_{\text{PWM}} \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} \\ \Delta i_{f,k} &= \left( \frac{d}{dt} i_{a,L,k} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} + \frac{d}{dt} i_{a,R,k} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} \right) \cdot T_{\text{PWM}} \end{aligned} \quad (3.63)$$

Um den Freilaufparameter bei zu kurzen Freilaufschaltzuständen zu bestimmen, reicht es also aus die gemessene Stromsteigung des linken aktiven Schaltzustands um  $60^\circ$  nach links und die gemessene Stromsteigung des rechten aktiven Schaltzustands um  $60^\circ$  nach rechts zu drehen, beide zu addieren und mit der Periodendauer  $T_{\text{PWM}}$  zu multiplizieren [E8].

Ein ähnlicher Zusammenhang kann auch für die magnetisch anisotrope Synchronmaschine hergeleitet werden. Dies ist in Abschnitt 3.3.3 beschrieben.

Da eine Raumzeigerdrehung um einen festen Winkel einer Multiplikation der  $\alpha$ - und  $\beta$ -Komponenten mit jeweils einer Konstanten entspricht, kann diese Rechenoperation sehr effizient und schnell innerhalb eines Taktes auf einem FPGA durchgeführt werden. Auch die Addition und die Multiplikation mit  $T_{\text{PWM}}$  wird im FPGA innerhalb eines Taktes berechnet, so dass die Bestimmung des Freilaufparameters nach Gleichung (3.63) innerhalb von 2-3 FPGA-Takten abgearbeitet werden kann. An dieser Stelle wird deutlich, dass die Verwendung der relativen Nomenklatur bei der Implementierung deutliche Vorteile bietet: Der Algorithmus nach Gleichung (3.63) muss nur auf eine Art im FPGA implementiert werden. Da in einem Takt ohnehin nur zwei der sechs aktiven Schaltzustände verwendet werden, können diese nach Tabelle 2.5 einem in Takt  $k$  verwendeten rechten und linken aktiven Schaltzustand zugeordnet werden. Die Berechnung erfolgt dann nach Gleichung (3.63) unabhängig von den absoluten Schaltzuständen immer gleich.

Die nach Gleichung (3.63) gedrehten Raumzeiger sind in Abbildung 3.6 grün dargestellt. Die Addition der gedrehten Raumzeiger ist aus Gründen der

Übersichtlichkeit nicht explizit abgebildet, kann jedoch leicht anhand der gestrichelten Linien nachvollzogen werden.

### 3.3 Stromänderungsparameter bei anisotropen Synchronmaschinen

Zur Berechnung der Stromänderungsparameter bei magnetisch anisotropen Synchronmaschinen wird wieder das in das statorfeste Bezugssystem transformierte Spannungsgleichungssystem der permanentmagneterregten Synchronmaschine nach Gleichung (3.35) aus Abschnitt 3.1 als Basis verwendet:

$$\tilde{\mathbf{u}}_S = \tilde{\mathbf{R}}_S \tilde{\mathbf{i}}_S + \tilde{\mathbf{L}}_{SA} \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{i}}_S + \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{L}}_{SB} \cdot \tilde{\mathbf{i}}_S + \tilde{\mathbf{L}}_{SB} \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{i}}_S + \frac{d}{dt} \tilde{\Psi}_{PMS} \quad (3.64)$$

Im Gegensatz zu den isotropen Synchronmaschinen ist die Induktivität der Maschine bei den anisotropen Synchronmaschinen über den Umfang der Maschine betrachtet nicht konstant, sondern vom Rotorlagewinkel  $\gamma$  abhängig. Dies wird üblicherweise durch eine Ungleichheit der Luftspaltfeldinduktivität  $L_d$  in Richtung des ungestörten Permanentmagnetflusses und senkrecht dazu in q-Richtung  $L_q$  ausgedrückt:

$$L_d \neq L_q \quad (3.65)$$

Für den Gleich- und den Wechselanteil der Induktivitätsmatrix bedeutet das nach Gleichung (3.14) und (3.15)

$$L_A = \frac{1}{3} (L_d + L_q) \neq \frac{2}{3} L \quad (3.66)$$

$$L_B = \frac{1}{3} (L_d - L_q) \neq 0 \quad (3.67)$$

Es kann also weder  $L_A$  vereinfacht durch eine mittlere Induktivität  $L$  ausgedrückt werden, noch kann  $L_B$  vernachlässigt werden (vergleiche hierzu Gleichung (3.38) und (3.39)). Die Terme mit  $L_B$  in den Gleichung (3.64) müssen deshalb bei den anisotropen Synchronmaschinen berücksichtigt werden.

Um Gleichung (3.64) nach den gesuchten Stromsteigungen umstellen zu können, wird sie zunächst wieder mit den ausgeschriebenen Matrizen dargestellt. Dazu müssen ergänzend zu den bereits in Abschnitt 3.1 hergeleiteten Matrizen noch die Ableitung der Induktivitätsmatrix  $\tilde{\mathbf{L}}_{\text{SB}}$  (siehe Gleichung (3.33))

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{L}}_{\text{SB}} &= \frac{3}{2}L_{\text{B}} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\gamma) & \sin(2\gamma) & 0 \\ \sin(2\gamma) & -\cos(2\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \frac{d}{dt}\tilde{\mathbf{L}}_{\text{SB}} &= 3L_{\text{B}} \cdot \begin{pmatrix} -\left(\frac{d}{dt}\gamma\right)\sin(2\gamma) & \left(\frac{d}{dt}\gamma\right)\cos(2\gamma) & 0 \\ \left(\frac{d}{dt}\gamma\right)\cos(2\gamma) & \left(\frac{d}{dt}\gamma\right)\sin(2\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= 3L_{\text{B}} \cdot \begin{pmatrix} -\omega\sin(2\gamma) & \omega\cos(2\gamma) & 0 \\ \omega\cos(2\gamma) & \omega\sin(2\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.68)
 \end{aligned}$$

und der Flussmatrix  $\tilde{\Psi}_{\text{PMS}}$  (siehe Gleichung (3.34)) berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Psi}_{\text{PMS}} &= \Psi_{\text{PM}} \cdot \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \frac{d}{dt}\tilde{\Psi}_{\text{PMS}} &= \Psi_{\text{PM}} \cdot \begin{pmatrix} -\left(\frac{d}{dt}\gamma\right)\sin(\gamma) \\ \left(\frac{d}{dt}\gamma\right)\cos(\gamma) \\ 0 \end{pmatrix} = \Psi_{\text{PM}} \cdot \begin{pmatrix} -\omega\sin(\gamma) \\ \omega\cos(\gamma) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.69)
 \end{aligned}$$

Dabei wurde bereits die Ableitung des Rotorwinkels durch die Kreisfrequenz  $\omega$  ersetzt:

$$\frac{d}{dt}\gamma = \omega \quad (3.70)$$

Mit diesen Gleichungen kann das Spannungsgleichungssystem aus Gleichung (3.64) mit voll ausgeschriebenen Matrizen formuliert werden:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \\ u_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R_S & 0 & 0 \\ 0 & R_S & 0 \\ 0 & 0 & R_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}L_A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{pmatrix} \\ &+ 3L_B \cdot \begin{pmatrix} -\omega \sin(2\gamma) & \omega \cos(2\gamma) & 0 \\ \omega \cos(2\gamma) & \omega \sin(2\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{3}{2}L_B \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\gamma) & \sin(2\gamma) & 0 \\ \sin(2\gamma) & -\cos(2\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{pmatrix} \\ &+ \Psi_{PM} \cdot \begin{pmatrix} -\omega \sin(\gamma) \\ \omega \cos(\gamma) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.71)$$

Aufgeteilt in die  $\alpha\beta 0$ -Komponenten ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} u_\alpha &= R_S i_\alpha + \frac{3}{2}L_A \frac{d}{dt} i_\alpha - 3L_B \omega \sin(2\gamma) i_\alpha + 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\beta \\ &+ \frac{3}{2}L_B \cos(2\gamma) \frac{d}{dt} i_\alpha + \frac{3}{2}L_B \sin(2\gamma) \frac{d}{dt} i_\beta - \omega \Psi_{PM} \sin(\gamma) \\ &= (R_S - 3L_B \omega \sin(2\gamma)) i_\alpha + \left( \frac{3}{2}L_A + \frac{3}{2}L_B \cos(2\gamma) \right) \frac{d}{dt} i_\alpha \\ &+ 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\beta + \frac{3}{2}L_B \sin(2\gamma) \frac{d}{dt} i_\beta - \omega \Psi_{PM} \sin(\gamma) \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned}
 u_\beta &= R_S i_\beta + \frac{3}{2} L_A \frac{d}{dt} i_\beta + 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\alpha + 3L_B \omega \sin(2\gamma) i_\beta \\
 &\quad + \frac{3}{2} L_B \sin(2\gamma) \frac{d}{dt} i_\alpha - \frac{3}{2} L_B \cos(2\gamma) \frac{d}{dt} i_\beta + \omega \Psi_{PM} \cos(\gamma) \\
 &= 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\alpha + \frac{3}{2} L_B \sin(2\gamma) \frac{d}{dt} i_\alpha \\
 &\quad + (R_S + 3L_B \omega \sin(2\gamma)) i_\beta + \left( \frac{3}{2} L_A - \frac{3}{2} L_B \cos(2\gamma) \right) \frac{d}{dt} i_\beta \\
 &\quad + \omega \Psi_{PM} \cos(\gamma)
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

$$u_0 = R_S i_0 \tag{3.74}$$

Die beiden Gleichungen (3.72) und (3.73) werden nun jeweils nach  $\frac{d}{dt} i_\beta$  umgestellt, dann gleichgesetzt, um  $\frac{d}{dt} i_\beta$  zu eliminieren und nach  $\frac{d}{dt} i_\alpha$  aufgelöst. Diese Berechnung ist recht umfangreich und wird daher an dieser Stelle nicht explizit aufgeführt. Sie kann jedoch mit allen Zwischenschritten im Anhang in Abschnitt A.1.1 nachgelesen werden. Das Ergebnis dieser Rechnung ist nach Gleichung (A.21):

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} i_\alpha &= \frac{2}{3(L_A^2 - L_B^2)} \\
 &\quad \cdot \left\{ (L_A - L_B \cos(2\gamma)) u_\alpha - (L_B \sin(2\gamma)) u_\beta \right. \\
 &\quad + [-R_S L_A + 3L_A L_B \omega \sin(2\gamma) + R_S L_B \cos(2\gamma)] i_\alpha \\
 &\quad + [R_S L_B \sin(2\gamma) + 3L_B^2 \omega - 3L_A L_B \omega \cos(2\gamma)] i_\beta \\
 &\quad \left. + [L_A \sin(\gamma) + L_B \sin(\gamma)] \omega \Psi_{PM} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

Um  $\frac{d}{dt} i_\beta$  zu berechnen wird genau umgekehrt verfahren: Zunächst werden die beiden Gleichungen (3.72) und (3.73) jeweils nach  $\frac{d}{dt} i_\alpha$  umgestellt, dann gleichgesetzt, um  $\frac{d}{dt} i_\alpha$  zu eliminieren und nach  $\frac{d}{dt} i_\beta$  aufgelöst. Diese Berech-

nung befindet sich ebenfalls mit sämtlichen Zwischenschritten im Anhang in Abschnitt A.1.2 und liefert das Ergebnis (A.47) :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} i_\beta &= \frac{2}{3(L_A^2 - L_B^2)} \\
 &\cdot \left\{ -L_B \sin(2\gamma) u_\alpha + [L_A + L_B \cos(2\gamma)] u_\beta \right. \\
 &\quad - [3L_A L_B \omega \cos(2\gamma) + 3L_B^2 \omega - R_S L_B \sin(2\gamma)] i_\alpha \\
 &\quad - [R_S L_A + R_S L_B \cos(2\gamma) + 3L_A L_B \omega \sin(2\gamma)] i_\beta \\
 &\quad \left. - [L_A \cos(\gamma) + L_B \cos(\gamma)] \omega \Psi_{PM} \right\} \quad (3.76)
 \end{aligned}$$

Da im Freilauf der Maschine die Statorspannung Null ist, ergeben sich durch Nullsetzen der Statorspannungskomponenten  $u_\alpha$  und  $u_\beta$  in Gleichung (3.75) und (3.76) sowie Multiplikation mit der PWM-Periodendauer, analog zu (2.15) und (3.51) direkt die  $\alpha\beta$ -Komponenten der Stromänderungsparameter für die Freilauf-Schaltzustände der anisotropen Synchronmaschine:

$$\begin{aligned}
 \Delta i_{f,\alpha} &= \left. \frac{d}{dt} i_\alpha \right|_{u_S=0} \cdot T_{PWM} \\
 &= \frac{2}{3(L_A^2 - L_B^2)} \cdot T_{PWM} \\
 &\cdot \left\{ [-R_S L_A + 3L_A L_B \omega \sin(2\gamma) + R_S L_B \cos(2\gamma)] i_\alpha \right. \\
 &\quad + [R_S L_B \sin(2\gamma) + 3L_B^2 \omega - 3L_A L_B \omega \cos(2\gamma)] i_\beta \\
 &\quad \left. + [L_A \sin(\gamma) + L_B \sin(\gamma)] \omega \Psi_{PM} \right\} \quad (3.77)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta i_{f,\beta} &= \left. \frac{d}{dt} i_\beta \right|_{u_S=0} \cdot T_{\text{PWM}} \\
 &= \frac{2}{3(L_A^2 - L_B^2)} \cdot T_{\text{PWM}} \\
 &\quad \cdot \left\{ - [3L_A L_B \omega \cos(2\gamma) + 3L_B^2 \omega - R_S L_B \sin(2\gamma)] i_\alpha \right. \\
 &\quad \quad - [R_S L_A + R_S L_B \cos(2\gamma) + 3L_A L_B \omega \sin(2\gamma)] i_\beta \\
 &\quad \quad \left. - [L_A \cos(\gamma) + L_B \cos(\gamma)] \omega \Psi_{\text{PM}} \right\} \quad (3.78)
 \end{aligned}$$

Die Stromänderungsparameter für die aktiven Schaltzustände werden gemäß Definition (2.16) wieder durch Subtraktion der Steigungen im Freilauf aus (3.77) und (3.78) von der Stromsteigung während der aktiven Schaltzustände (3.75) und (3.76) berechnet:

$$\begin{aligned}
 \Delta i_{a,x,\alpha} &= \left( \left. \frac{d}{dt} i_\alpha \right|_{u_S=u_x} - \left. \frac{d}{dt} i_\alpha \right|_{u_S=0} \right) \cdot T_{\text{PWM}} \\
 &= \frac{2}{3(L_A^2 - L_B^2)} \cdot T_{\text{PWM}} \\
 &\quad \cdot [(L_A - L_B \cos(2\gamma)) u_{x,\alpha} - (L_B \sin(2\gamma)) u_{x,\beta}] \quad (3.79)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta i_{a,x,\beta} &= \left( \left. \frac{d}{dt} i_\beta \right|_{u_S=u_x} - \left. \frac{d}{dt} i_\beta \right|_{u_S=0} \right) \cdot T_{\text{PWM}} \\
 &= \frac{2}{3(L_A^2 - L_B^2)} \cdot T_{\text{PWM}} \\
 &\quad \cdot [-L_B \sin(2\gamma) u_{x,\alpha} + [L_A + L_B \cos(2\gamma)] u_{x,\beta}] \quad (3.80)
 \end{aligned}$$

Ein einfacher Zusammenhang zwischen den gestellten Spannungsraumzeigern und den Stromänderungsparametern wie in Gleichung (3.52) und (3.51) existiert bei den anisotropen Synchronmaschinen offenbar nicht mehr. Um eine griffigere Darstellung zu erhalten, wird aus den  $\alpha$ - und  $\beta$ -Komponenten nach

den Gleichungen (3.79) und (3.80) der Raumzeiger des aktiven Stromänderungsparameters gebildet:

$$\begin{aligned} \Delta \underline{i}_{a,x} &= \begin{pmatrix} \Delta i_{a,x,\alpha} \\ \Delta i_{a,x,\beta} \end{pmatrix} = \Delta i_{a,x,\alpha} + j \Delta i_{a,x,\beta} \\ &= \frac{2}{3(L_A^2 - L_B^2)} \cdot T_{\text{PWM}} \\ &\quad \cdot [(L_A - L_B \cos(2\gamma)) u_{x,\alpha} - (L_B \sin(2\gamma)) u_{x,\beta}] \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{2}{3(L_A^2 - L_B^2)} \cdot T_{\text{PWM}} \\ &\quad \cdot [-j L_B \sin(2\gamma) u_{x,\alpha} + j L_A u_{x,\beta} + j L_B \cos(2\gamma) u_{x,\beta}] \end{aligned} \quad (3.82)$$

Die  $\alpha$ - und die  $\beta$ -Komponente des Statorspannungsraumzeigers  $u_{x,\alpha}$  und  $u_{x,\beta}$  wird jeweils durch den Betrag des Raumzeigers (siehe Gleichung (2.29)) und die zugehörige Winkelfunktion gemäß

$$\underline{u}_x = u_{x,\alpha} + j u_{x,\beta} \quad (3.83)$$

$$u_{x,\alpha} = |\underline{u}_x| \cdot \cos \varphi_x = \frac{2}{3} U_d \cdot \cos \varphi_x \quad (3.84)$$

$$u_{x,\beta} = |\underline{u}_x| \cdot \sin \varphi_x = \frac{2}{3} U_d \cdot \sin \varphi_x \quad (3.85)$$

ersetzt:

$$\begin{aligned} \Delta \underline{i}_{a,x} &= \frac{2}{3(L_A^2 - L_B^2)} \cdot T_{\text{PWM}} \\ &\quad \cdot \left[ (L_A - L_B \cos(2\gamma)) \frac{2}{3} U_d \cdot \cos \varphi_x - (L_B \sin(2\gamma)) \frac{2}{3} U_d \cdot \sin \varphi_x \right. \\ &\quad \left. - j L_B \sin(2\gamma) \frac{2}{3} U_d \cdot \cos \varphi_x + j L_A \frac{2}{3} U_d \cdot \sin \varphi_x \right. \\ &\quad \left. + j L_B \cos(2\gamma) \frac{2}{3} U_d \cdot \sin \varphi_x \right] \end{aligned} \quad (3.86)$$

Die Terme werden zusammengefasst und die Winkelfunktionen durch die Eulersche Darstellung ersetzt. Die detaillierte Rechnung hierzu befindet sich im

Anhang in Abschnitt A.1.3. Das Ergebnis der Umformungen ist eine sehr kompakte Formel für die aktiven Stromänderungsparameter der anisotropen Synchronmaschine (siehe Gleichung (A.61)):

$$\Delta i_{a,x} = \frac{4}{9(L_A^2 - L_B^2)} \cdot U_d \cdot T_{\text{PWM}} \cdot \left[ L_A \cdot e^{j\varphi_x} - L_B \cdot e^{j(2\gamma(t) - \varphi_x)} \right] \quad (3.87)$$

Unter der getroffenen Annahme, dass sich die Zwischenkreisspannung und die PWM-Frequenz nicht ändern, ist der Faktor vor der Klammer eine Konstante. Auch  $L_A$  und  $L_B$  können als konstant angenommen werden, da sie durch die Konstruktion der Maschine bedingt und über die konstanten Parameter  $L_d$  und  $L_q$  definiert sind. Damit besteht für die aktiven Stromänderungsparameter lediglich eine vom jeweiligen aktiven Schaltzustand bestimmte Abhängigkeit vom jeweiligen Schaltzustandswinkel  $\varphi_x$  mit

$$\varphi_x = (x - 1) \cdot 60^\circ \quad \forall x \in \mathbb{N} \mid x \in \{1 \dots 6\} \quad (3.88)$$

und eine zeitliche Abhängigkeit von  $\gamma(t)$ . Für die Darstellung in der komplexen  $\alpha\beta$ -Ebene wird Gleichung (3.87) als Summe zweier separater Raumzeiger geschrieben:

$$\Delta i_{a,x} = \underbrace{\frac{4U_d T_{\text{PWM}}}{9(L_A^2 - L_B^2)} L_A e^{j\varphi_x}}_{\underline{m}_x} - \underbrace{\frac{4U_d T_{\text{PWM}}}{9(L_A^2 - L_B^2)} L_B e^{j(2\gamma(t) - \varphi_x)}}_{\underline{r}_x} \quad (3.89)$$

$$= \underline{m}_x - \underline{r}_x \quad (3.90)$$

Mit

$$\underline{m}_x = \frac{4U_d T_{\text{PWM}}}{9(L_A^2 - L_B^2)} L_A e^{j\varphi_x} \quad (3.91)$$

$$= m \cdot e^{j\varphi_x} \quad \forall x \in \mathbb{N} \mid x \in \{1 \dots 6\} \quad (3.92)$$

$$\underline{r}_x = \frac{4U_d T_{\text{PWM}}}{9(L_A^2 - L_B^2)} L_B e^{j(2\gamma(t) - \varphi_x)} \quad (3.93)$$

$$= r \cdot e^{j(2\gamma(t) - \varphi_x)} \quad \forall x \in \mathbb{N} \mid x \in \{1 \dots 6\} \quad (3.94)$$

ergibt das in kompakter Schreibweise eine sehr elegante, analytische Beschreibung für die aktiven Stromänderungsparameter der anisotropen Synchronmaschine:

$$\Delta i_{a,x} = m \cdot e^{j\varphi_x} - r \cdot e^{j(2\gamma(t) - \varphi_x)} \quad (3.95)$$

Die Raumzeiger  $\underline{m}_x$  zeigen mit dem jeweiligen Schaltzustandswinkel  $\varphi_x$  in die Richtung des zugehörigen Schaltzustands  $\underline{s}_x$ . Die über  $e^{j2\gamma(t)}$  zeitabhängigen Raumzeiger  $\underline{r}_x$  haben alle dieselbe konstante Länge und rotieren mit der doppelten Winkelgeschwindigkeit  $2\gamma(t)$ . Wegen der Subtraktion aus Gleichung (3.95) führt das dazu, dass die Spitzen der Stromänderungsparameter  $\Delta i_{a,x}$  ebenfalls mit der doppelten Winkelgeschwindigkeit um die Spitzen des jeweils zugehörigen Raumzeigers  $\underline{m}_x$  rotieren. Die Ortskurve der einzelnen Stromänderungsparameter beschreibt deshalb jeweils einen Kreis mit Radius  $r$  um die Spitze des zugehörigen Raumzeigers  $\underline{m}_x$ . Aus diesem Grund werden die Raumzeiger  $\underline{m}_x$  als „Mittelpunktraumzeiger“ bezeichnet, die Raumzeiger  $\underline{r}_x$  hingegen als „Radiusraumzeiger“.

Die Beträge  $m$  und  $r$  der Raumzeiger  $\underline{m}_x$  und  $\underline{r}_x$  sind jeweils bei allen aktiven Schaltzuständen  $S_x$  (mit  $x = 1, \dots, 6$ ) gleich groß und mit konstanten Parametern zeitinvariant:

$$m = \frac{4U_d T_{\text{PWM}}}{9(L_A^2 - L_B^2)} L_A \quad (3.96)$$

$$r = \frac{4U_d T_{\text{PWM}}}{9(L_A^2 - L_B^2)} L_B \quad (3.97)$$

Sie unterscheiden sich nur im Faktor  $L_A$  bei den Mittelpunktraumzeigern, beziehungsweise  $L_B$  bei den Radiusraumzeigern. Es ist direkt ersichtlich, dass bei einer magnetisch isotropen Synchronmaschine mit  $L_B = 0$ , der Betrag der Radiusraumzeiger Null wird. Die Stromänderungsparameter beschreiben dann wieder ein regelmäßiges Hexagon, analog zu dem der isotropen Maschine aus Abschnitt 3.2.

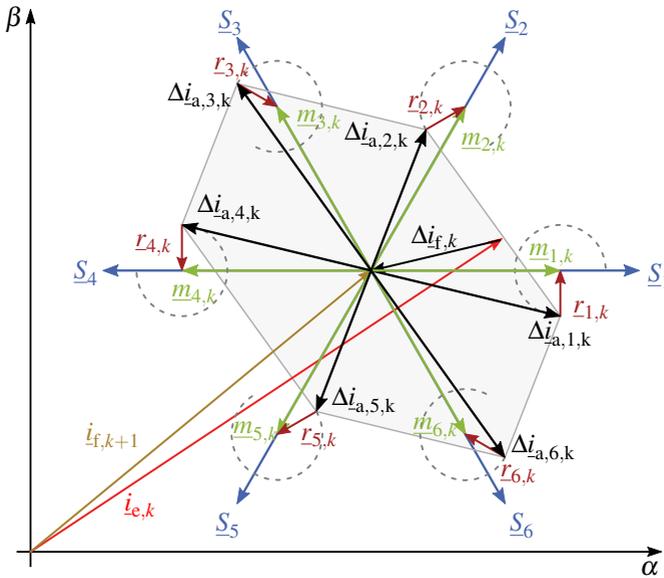


Abbildung 3.7: Stromänderungsparameter  $\Delta i_{a,x,k}$  einer anisotropen Synchronmaschine im Takt  $k$ . Die gestrichelten grauen Dreiviertelkreise deuten die Rotation der roten Radiusraumzeiger  $r_x$  während  $3/8$  einer elektrischen Periode der Maschine an. Die grünen Mittelpunktraumzeiger  $m_x$  sind konstant.

In Abbildung 3.7 sind die sechs aktiven Stromänderungsparameter  $\Delta i_{a,x,k}$  einer anisotropen Synchronmaschine schwarz dargestellt. Der Index  $k$  steht dafür, dass die abgebildeten Raumzeiger lediglich für den Takt  $k$  gültig sind, in welchem sie gemessen wurden. Im Betrieb verändert sich die Gestalt des schwarzen Raumzeigerdiagramms durch die Abhängigkeit der Radiusraumzeiger von  $2\gamma(t)$  mit der doppelten Winkelgeschwindigkeit. Die gestrichelten grauen Dreiviertelkreise deuten die Rotation der Radiusraumzeiger während  $3/8$  einer elektrischen Periode der Maschine an. Die grünen Mittelpunktraumzeiger sind zeitlich konstant und liegen mit ihren Schaltzustandswinkeln auf den Schaltzustandsachsen.

Die Radiusraumzeiger besitzen nach Gleichung (3.94) jeweils eine individuelle Phasendrehung von  $-\varphi_x$  nach Gleichung (3.88). Zwei benachbarte Radius-

raumzeiger sind darum immer um den konstanten Winkel von  $-60^\circ$  zueinander verdreht. Da sich die Phasendrehung für zwei gegenüberliegende Schaltzustände  $S_x$  und  $S_{x\pm 3}$  zu  $180^\circ$  aufsummiert, sind die Stromänderungsparameter zweier gegenüberliegender aktiver Schaltzustände punktsymmetrisch zur Mitte des von den Mittelpunktraumzeigern aufgespannten Sechsecks. Mit Gleichung (3.88) gilt:

$$\varphi_{x\pm 3} = (x \pm 3 - 1) \cdot 60^\circ = (x - 1) \cdot 60^\circ \pm 3 \cdot 60^\circ = \varphi_x \pm 180^\circ \quad (3.98)$$

Für gegenüberliegende Stromänderungsparameter gilt damit:

$$\begin{aligned} \Delta i_{a,x\pm 3} &= m \cdot e^{j\varphi_{x\pm 3}} + r \cdot e^{j(2\gamma - \varphi_{x\pm 3})} \\ &= m \cdot e^{j\varphi_x \pm 180^\circ} + r \cdot e^{j(2\gamma - \varphi_x \mp 180^\circ)} \\ &= m \cdot e^{j\varphi_x} e^{j\pi} + r \cdot e^{j(2\gamma - \varphi_x)} e^{j\pi} \\ &= \left( m \cdot e^{j\varphi_x} + r \cdot e^{j(2\gamma - \varphi_x)} \right) e^{j\pi} \\ \Delta i_{a,x\pm 3} &= \Delta i_{a,x} \cdot e^{j\pi} \end{aligned} \quad (3.99)$$

### 3.3.1 Regelungskonzept der Adaptiven Direkten Stromregelung bei anisotropen Synchronmaschinen

Das graue, von den aktiven Stromänderungsparametern aufgespannte, unregelmäßige Sechseck stellt das Gebiet in der statorfesten Stromraumzeigerebene dar, in welchem der Stromraumzeiger bei den gegebenen Stromänderungsmöglichkeiten nach einem Takt liegen kann. Ausgehend vom Endwert des Stroms  $i_{e,k}$  im Takt  $k$  kann ein neuer Sollwert  $i_{e,k+1}$  des Statorstroms, der innerhalb dieses Sechsecks liegt, innerhalb eines Taktes erreicht werden. Einschränkungen der Realisierung, wie Mindesteinschaltzeit, etc. sind hierbei vernachlässigt.

Im Gegensatz zu den Stromänderungsparametern bei isotropen Synchronmaschinen (siehe Gleichung (3.52)) stimmen die Richtungen der Stromänderungsparameter nicht mehr mit den Richtungen der Schaltzustandsraumzeiger überein, sind nicht mehr alle gleich lang und weisen zudem noch eine

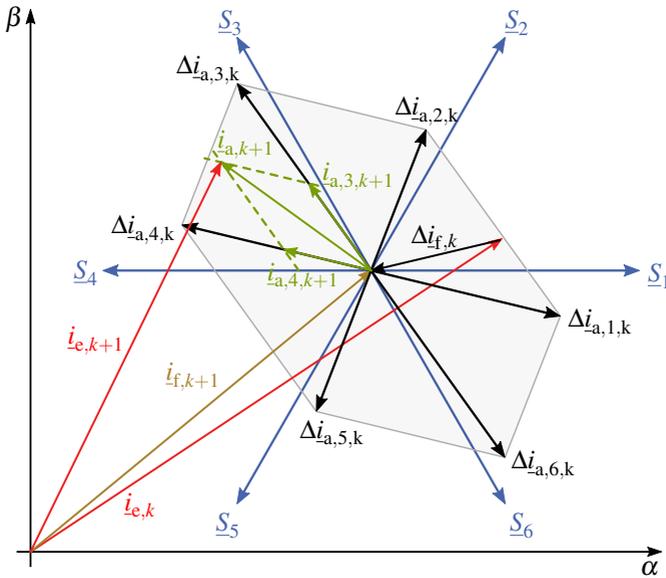


Abbildung 3.8: Regelungskonzept der Adaptiven Direkten Stromregelung bei einer anisotropen Synchronmaschine.

zeitliche Abhängigkeit vom aktuellen Rotorlagewinkel auf. Eine einfache Berechnung der Aussteuergrade der Halbbrücken, wie in [1] vorgestellt, in dem die als Stromraumzeiger dargestellten Sollwerte auf die benachbarten Schaltzustandsachsen abgebildet werden, ist daher nicht mehr möglich (siehe 3.8).

Eine weitere Schwierigkeit besteht in der Auswahl der benachbarten Schaltzustände. Es können Situationen auftreten, in denen der Sollraumzeiger noch im Sektor  $x$  liegt, die benachbarten Stromänderungsparameter allerdings zu den Schaltzuständen des Sektors  $x+1$  gehören. Das ist beispielsweise dann der Fall, wenn der Sollraumzeiger in Abbildung 3.8 zwischen der Schaltzustandsachse des Schaltzustands  $S_4$  und dem Stromänderungsparameter  $\Delta i_{a,4}$  liegt. Der Sollwert liegt damit noch in Sektor III, kann aber nur durch Raumzeigeraddition von  $\Delta i_{a,4}$  und  $\Delta i_{a,5}$ , also anteiliges Schalten von  $S_4$  und  $S_5$  in Sektor IV erreicht

werden. Die Auswahl der benachbarten Schaltzustände kann daher nicht mehr aufgrund der Lage des Sollwerts innerhalb der bisherigen Sektoren I bis VI erfolgen.

Eine einfache Möglichkeit, sowohl die Aussteuergrade zu berechnen, als auch die benachbarten Schaltzustände zu identifizieren besteht darin, die theoretisch notwendigen Aussteuergrade für alle sechs benachbarten Schaltzustände zu berechnen. Als Ergebnis dieser Berechnung werden nur im richtigen Sektor beide Aussteuergrade positiv sein. In den anderen Sektoren wird mindestens einer der beiden Aussteuergrade negativ sein, im gegenüberliegenden Sektor sogar beide.

Dabei wird wieder die für die Implementierung vorteilhafte relative Darstellung als rechter und linker aktiver Stromänderungsparameter gemäß Tabelle 2.5 verwendet. Zunächst wird die Raumzeigeraddition gemäß

$$\begin{aligned} \dot{i}_{a,k+1} &= \dot{i}_{a,R,k+1} + \dot{i}_{a,L,k+1} = \frac{T_R}{T_{PWM}} \cdot \Delta i_{a,R,k} + \frac{T_L}{T_{PWM}} \cdot \Delta i_{a,L,k} \\ &= a_R \cdot \Delta i_{a,R,k} + a_L \cdot \Delta i_{a,L,k} \end{aligned} \quad (3.100)$$

in den  $\alpha$ - und  $\beta$ -Komponenten als zwei Gleichungen dargestellt und nach den Aussteuergraden aufgelöst:

$$a_R = \frac{\dot{i}_{a,k+1,\alpha} \cdot \Delta i_{a,L,\beta} - \dot{i}_{a,k+1,\beta} \cdot \Delta i_{a,L,\alpha}}{\Delta i_{a,L,\beta} \cdot \Delta i_{a,R,\alpha} - \Delta i_{a,L,\alpha} \cdot \Delta i_{a,R,\beta}} \quad (3.101)$$

$$a_L = \frac{\dot{i}_{a,k+1,\beta} \cdot \Delta i_{a,R,\alpha} - \dot{i}_{a,k+1,\alpha} \cdot \Delta i_{a,R,\beta}}{\Delta i_{a,L,\beta} \cdot \Delta i_{a,R,\alpha} - \Delta i_{a,L,\alpha} \cdot \Delta i_{a,R,\beta}} \quad (3.102)$$

Um diese Berechnung in jedem Takt für alle sechs Sektoren durchführen zu können, müssen aber neben den beiden in Takt  $k$  verwendeten, gemessenen aktiven Stromänderungsparametern auch die nicht verwendeten restlichen vier aktiven Stromänderungsparameter bekannt sein.

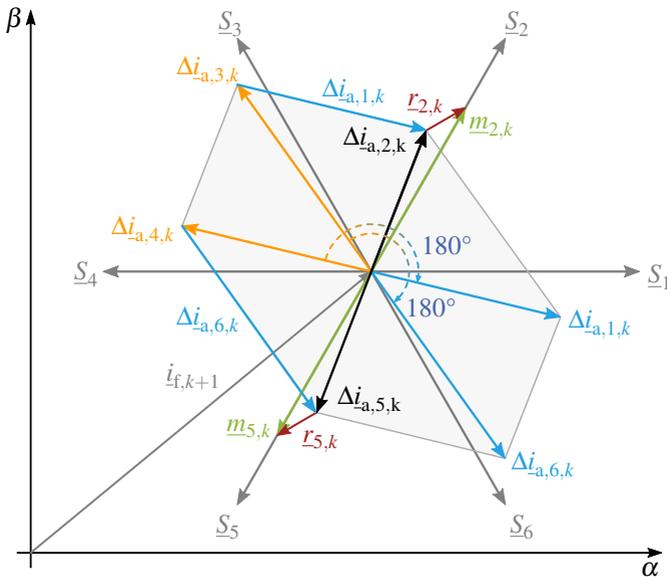


Abbildung 3.9: Berechnung aller sechs aktiver Stromänderungsparameter einer anisotropen Synchronmaschine:  
 orange: verwendete und gemessene Stromänderungsparameter  
 blau: gemessene Stromänderungsparameter um 180° gedreht  
 schwarz: berechnet nach Gleichung (3.95) oder (3.107) und (3.109)

### 3.3.2 Berechnung aller sechs aktiven Stromänderungsparameter in jedem Takt

Um alle sechs aktiven Stromänderungsparameter zu berechnen, werden die analytischen Zusammenhänge aus Gleichung (3.95) verwendet. In Abbildung 3.9 sind die in Takt  $k$  verwendeten, gemessenen Stromänderungsparameter orange eingezeichnet. Die gegenüberliegenden aktiven Stromänderungsparameter (blau in Abbildung 3.9) können nach Gleichung (3.99) durch eine Drehung um  $180^\circ$  sehr einfach berechnet werden. Hierzu muss lediglich das Vorzeichen sowohl des Real- als auch des Imaginärteils, also der  $\alpha$ - und der  $\beta$ -Komponente, des Stromänderungsparameters invertiert werden.

Die dazwischenliegenden Stromänderungsparameter sind in Abbildung 3.9 schwarz dargestellt. Sie können mit Hilfe des Mittelpunkt- und Radiusraumzeigers nach Gleichung (3.95) berechnet werden:

$$\Delta i_{a,x} = m \cdot e^{j\varphi_x} - r \cdot e^{j(2\gamma(t) - \varphi_x)} \quad (3.103)$$

Alternativ können die dazwischenliegenden aktiven Stromänderungsparameter auch durch gegenseitige Subtraktion der gemessenen aktiven Stromänderungsparameter voneinander berechnet werden. Aus Gleichung (3.95) folgt nämlich mit Gleichung (2.32) für die dem des Schaltzustand  $\Delta i_{a,x}$  benachbarten Schaltzustände:

$$\Delta i_{a,x-1} = m \cdot e^{j(\varphi_x - 60^\circ)} - r \cdot e^{j(2\gamma(t) - \varphi_x + 60^\circ)} \quad (3.104)$$

$$\Delta i_{a,x+1} = m \cdot e^{j(\varphi_x + 60^\circ)} - r \cdot e^{j(2\gamma(t) - \varphi_x - 60^\circ)} \quad (3.105)$$

Wird der linke gemessene aktive Stromänderungsparameter vom rechten subtrahiert ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta i_{a,x} - \Delta i_{a,x+1} &= m \cdot e^{j\varphi_x} - r \cdot e^{j(2\gamma(t) - \varphi_x)} \\ &\quad - m \cdot e^{j(\varphi_x + 60^\circ)} + r \cdot e^{j(2\gamma(t) - \varphi_x - 60^\circ)} \\ &= m \cdot e^{j\varphi_x} \left( 1 - e^{j60^\circ} \right) - r \cdot e^{j(2\gamma(t) - \varphi_x)} \left( 1 - e^{-j60^\circ} \right) \end{aligned}$$

Mit

$$1 - e^{j60^\circ} = e^{-j60^\circ}$$

$$1 - e^{-j60^\circ} = e^{+j60^\circ}$$

wird daraus

$$\begin{aligned} \Delta i_{a,x} - \Delta i_{a,x+1} &= m \cdot e^{j\varphi_x} e^{-j60^\circ} - r \cdot e^{j(2\gamma(t) - \varphi_x)} e^{j60^\circ} \\ &= m \cdot e^{j(\varphi_x - 60^\circ)} - r \cdot e^{j(2\gamma(t) - \varphi_x + 60^\circ)} \end{aligned} \quad (3.106)$$

Ein Vergleich mit Gleichung (3.104) ergibt sofort den Zusammenhang

$$\Delta i_{a,x-1} = \Delta i_{a,x} - \Delta i_{a,x+1} \quad (3.107)$$

Für den anderen dazwischenliegenden aktiven Stromänderungsparameter gilt entsprechend

$$\Delta i_{a,x+2} = \Delta i_{a,x+3} - \Delta i_{a,x+4} \quad (3.108)$$

und mit Gleichung (3.99) ergibt dies

$$\Delta i_{a,x+2} = \Delta i_{a,x+1} - \Delta i_{a,x} \quad (3.109)$$

Diese Zusammenhänge sind in Abbildung 3.9 durch die Addition der beiden hellblauen, invertierten gemessenen Stromänderungsparameter zu den beiden gemessenen Stromänderungsparameter veranschaulicht.

Die analytische Beschreibung nach Gleichung (3.95) ermöglicht somit die einfache Berechnung aller sechs aktiven Stromänderungsparameter. Sind zwei aktive Stromänderungsparameter bekannt, können auch die übrigen vier aktiven Stromänderungsparameter durch einfache Addition, Subtraktion, sowie Invertierung des Vorzeichens der  $\alpha$ - und der  $\beta$ -Komponente berechnet werden und zwar ohne den Mittelpunkt- und Radiusraumzeiger explizit bestimmen zu müssen.

### 3.3.3 Berechnung des Freilaufparameters aus den aktiven Stromänderungsparametern

Auch bei der anisotropen Synchronmaschine lässt sich der Freilaufparameter aus den gemessenen Stromänderungen der verwendeten aktiven Schaltzustände berechnen. Somit kann auch die anisotrope Synchronmaschine bei Vollaussteuerung betrieben werden und trotzdem die Stromänderungsparameter angegeben werden.

Die gemessenen Stromänderungen der aktiven Schaltzustände können, multipliziert mit der Periodendauer, als „gemessene“ Stromänderungsparameter verstanden werden:

$$\Delta i_{a,R,M} = \frac{d}{dt} i_{a,R} \cdot T_{\text{PWM}} \quad (3.110)$$

$$\Delta i_{a,L,M} = \frac{d}{dt} i_{a,L} \cdot T_{\text{PWM}} \quad (3.111)$$

Wird hiervon der Freilaufparameter subtrahiert, ergibt sich direkt die Definition der aktiven Stromänderungsparameter nach Gleichung (3.52):

$$\Delta i_{a,R} = \left[ \frac{d}{dt} i_{a,R} - \frac{d}{dt} i_f \right] T_{\text{PWM}} = \frac{d}{dt} i_{a,R} \cdot T_{\text{PWM}} - \Delta i_f \quad (3.112)$$

$$= \Delta i_{a,R,M} - \Delta i_f \quad (3.113)$$

$$\Delta i_{a,L} = \left[ \frac{d}{dt} i_{a,L} - \frac{d}{dt} i_f \right] T_{\text{PWM}} = \frac{d}{dt} i_{a,L} \cdot T_{\text{PWM}} - \Delta i_f \quad (3.114)$$

$$= \Delta i_{a,L,M} - \Delta i_f \quad (3.115)$$

Als weitere Voraussetzung wird die Kenntnis des Betrags der Mittelpunktraumzeiger vorausgesetzt. Da dieser sich im Betrieb nicht verändert (siehe Gleichung (3.96)), kann er, einmal gemessen, als Konstante betrachtet werden. Mit dem Betrag sind auch alle Mittelpunktraumzeiger bekannt (siehe Gleichung (3.92)). Mit Gleichung (3.95) gilt:

$$\Delta i_{a,R,M} = \Delta i_f + \underline{m}_R - \underline{r}_R \quad (3.116)$$

$$\Delta i_{a,L,M} = \Delta i_f + \underline{m}_L - \underline{r}_L \quad (3.117)$$

Die Zusammenhänge dieser Gleichungen sind in Abbildung 3.10 grafisch als Raumzeigeraddition zu sehen. Diese Gleichungen werden nun nach dem Freilaufparameter umgestellt:

$$\Delta i_f = \Delta i_{a,R,M} - \underline{m}_R + \underline{r}_R \quad (3.118)$$

$$\Delta i_f = \Delta i_{a,L,M} - \underline{m}_L + \underline{r}_L \quad (3.119)$$

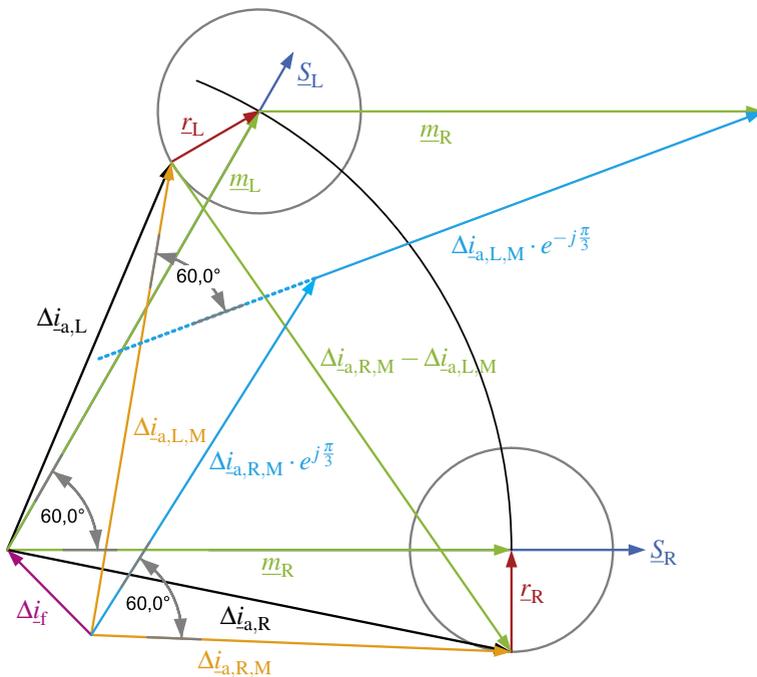


Abbildung 3.10: Berechnung des Freilaufparameters aus den Stromänderungen der aktiven Schaltzustände bei der anisotropen Synchronmaschine

Gleichsetzen und nach den Radiusraumzeigern auflösen ergibt

$$\Delta i_{a,R,M} - \underline{m}_R + \underline{r}_R = \Delta i_{a,L,M} - \underline{m}_L + \underline{r}_L \quad (3.120)$$

$$\underline{r}_L - \underline{r}_R = \Delta i_{a,R,M} - \Delta i_{a,L,M} + \underline{m}_L - \underline{m}_R \quad (3.121)$$

Mit Gleichung (3.95) und (3.88) gilt für benachbarte aktive Stromänderungsparameter:

$$\Delta i_{a,x} = \underline{m}_x - \underline{r}_x = m \cdot e^{j\varphi_x} - r \cdot e^{j(2\gamma - \varphi_x)} \quad (3.122)$$

$$\Delta i_{a,x+1} = \underline{m}_{x+1} - \underline{r}_{x+1} = m \cdot e^{j\varphi_{x+1}} - r \cdot e^{j(2\gamma - \varphi_{x+1})} \quad (3.123)$$

mit

$$\underline{m}_{x+1} = m \cdot e^{j(\varphi_x + 60^\circ)} = \underline{m}_x \cdot e^{j60^\circ} \quad (3.124)$$

$$\underline{r}_{x+1} = r \cdot e^{j(2\gamma - \varphi_x - 60^\circ)} = \underline{r}_x \cdot e^{-j60^\circ} \quad (3.125)$$

Den „nächsten“ Stromänderungsparameter  $\Delta i_{a,x+1}$  kann man also ausrechnen, indem der Radiusraumzeiger  $\underline{r}_x$  um  $60^\circ$  nach rechts gedreht und vom Mittelpunkttraumzeiger  $\underline{m}_x$ , der um  $60^\circ$  nach links gedreht wird, subtrahiert wird. Genau so folgt der „Linke“ (Index „L“) aus dem „Rechten“ (Index „R“):

$$\underline{m}_L = \underline{m}_R \cdot e^{j60^\circ} \quad (3.126)$$

$$\underline{r}_L = \underline{r}_R \cdot e^{-j60^\circ} \quad (3.127)$$

Diese Zusammenhänge werden nun in Gleichung (3.120) eingesetzt:

$$\underline{r}_L - \underline{r}_R = \Delta i_{a,R,M} - \Delta i_{a,L,M} + \underline{m}_L - \underline{m}_R \quad (3.128)$$

$$\underline{r}_R \left( e^{-j\frac{\pi}{3}} - 1 \right) = \Delta i_{a,R,M} - \Delta i_{a,L,M} + \underline{m}_R \left( e^{j\frac{\pi}{3}} - 1 \right) \quad (3.129)$$

Mit

$$\left( e^{-j\frac{\pi}{3}} - 1 \right) = -e^{j\frac{\pi}{3}} \quad (3.130)$$

$$\left( e^{j\frac{\pi}{3}} - 1 \right) = e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad (3.131)$$

wird daraus

$$\begin{aligned} -\underline{r}_R \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} &= \Delta i_{a,R,M} - \Delta i_{a,L,M} + \underline{m}_R \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} \\ \underline{r}_R &= -\Delta i_{a,R,M} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} + \Delta i_{a,L,M} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} - \underline{m}_L \end{aligned} \quad (3.132)$$

Dies wird nun in Gleichung (3.118) eingesetzt

$$\begin{aligned}\Delta i_f &= \Delta i_{a,R,M} - \underline{m}_R + r_R \\ &= \Delta i_{a,R,M} - \underline{m}_R - \Delta i_{a,R,M} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} + \Delta i_{a,L,M} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} - \underline{m}_L \\ &= \Delta i_{a,R,M} \left(1 - e^{-j\frac{\pi}{3}}\right) + \Delta i_{a,L,M} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} - \underline{m}_R - \underline{m}_L\end{aligned}$$

und führt als Ergebnis zu folgender Rechenvorschrift:

$$\Delta i_f = \Delta i_{a,R,M} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} + \Delta i_{a,L,M} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} - \underline{m}_R - \underline{m}_L \quad (3.133)$$

Um bei der anisotropen Synchronmaschine aus den gemessenen Stromsteigungen in den aktiven Schaltzuständen den Freilaufparameter zu berechnen, ist demnach eine ähnliche Rechenoperation durchzuführen, wie bei der isotropen Synchronmaschine (siehe Gleichung (3.63)). Die Drehungen um  $\pm 60^\circ$  und die Subtraktion der beiden beteiligten Mittelpunkttraumzeiger können leicht im FPGA realisiert werden.

### 3.3.4 Berechnung des Mittelpunkt- und Radiusraumzeigers

Um den Mittelpunkt- und Radiusraumzeiger zu berechnen, werden die geometrischen Zusammenhänge nach Gleichung (3.95) ausgenutzt. Das Ziel soll sein, eine Berechnung der gesuchten Mittelpunkt- und Radiusraumzeiger mit den gemessenen Stromänderungsparametern eines Taktes zu ermöglichen. In Abbildung 3.11 sind die beiden aktiven Stromänderungsparameter eines Taktes schwarz dargestellt. Es wird hierbei wieder die relative Bezeichnung als rechter und linker aktiver Stromänderungsparameter nach Tabelle 2.5 verwendet, um einen Algorithmus zu erhalten, der unabhängig von der absoluten Lage der gemessenen Werte ist.

Wird der linke aktive Stromänderungsparameter um  $60^\circ$  nach rechts gedreht, so liegt er aufgrund der symmetrischen Zusammenhänge zwischen den benachbarten Stromänderungsparametern nach den Gleichungen (3.126) und (3.127) auf dem Kreis, der durch den Radiusraumzeiger des rechten Stromänderungs-

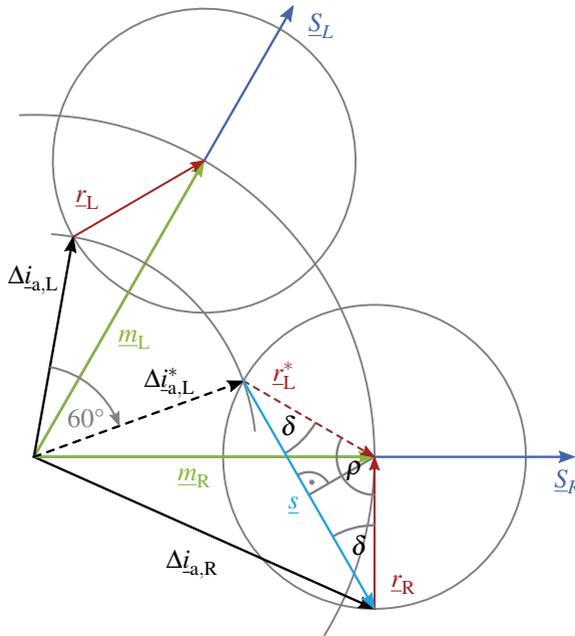


Abbildung 3.11: Konstruktionszeichnung zur Berechnung des Mittelpunktraumzeigers

parameters beschrieben wird. Dies ist in Abbildung 3.11 schwarz gestrichelt dargestellt. In Formeln ausgedrückt ist dieser Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
 \Delta i_{a,L}^* &= \Delta i_{a,L} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} \\
 &= (\underline{m}_L - \underline{r}_L) \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} = \underline{m}_L \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} - \underline{r}_L \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} \\
 &= \underline{m}_R - \underline{r}_L^*
 \end{aligned} \tag{3.134}$$

mit

$$\underline{r}_L^* = \underline{r}_L \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} \tag{3.135}$$

Damit kann nun die in Abbildung 3.11 blau eingezeichnete Sehne  $\underline{s}$  berechnet werden:

$$\underline{s} = \Delta i_{a,R} - \Delta i_{a,L}^* \quad (3.136)$$

Der zwischen den Radiusraumzeigern  $r_R$  und  $r_L^*$  aufgespannte Winkel  $\rho$  beträgt wegen (3.127) und (3.135) gerade  $120^\circ$ :

$$r_L^* = r_L \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} = r_R \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} = r_R \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} \quad (3.137)$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ \quad (3.138)$$

Die Sehne  $\underline{s}$  bildet mit den beiden Radiusraumzeigern  $r_R$  und  $r_L^*$  ein gleichseitiges Dreieck und die beiden Winkel  $\delta$  zwischen der Sehne und den Radiusraumzeigern sind darum gleich groß. Wegen der Winkelsumme im Dreieck betragen sie jeweils

$$\delta = \frac{180^\circ - \rho}{2} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ \quad (3.139)$$

Für  $\delta$  gilt damit für die Winkelbeziehung

$$\cos \delta = \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{s}{r} \quad (3.140)$$

und damit der Zusammenhang zwischen dem Radiusraumzeiger und der Sehne

$$r = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot s \quad (3.141)$$

$$r_L^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \underline{s} \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} \quad (3.142)$$

Die Sehne wird durch die gemessenen aktiven Stromänderungsparameter nach Gleichung (3.136) und (3.134) ersetzt, um den Radiusraumzeiger direkt mit den gemessenen Stromänderungsparametern berechnen zu können:

$$r_L^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left( \Delta i_{a,R} - \Delta i_{a,L} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} \right) \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} \quad (3.143)$$

beziehungsweise

$$\underline{r}_L = \underline{r}_L^* \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left( \Delta i_{a,R} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} - \Delta i_{a,L} \right) \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} \quad (3.144)$$

Der Mittelpunkttraumzeiger kann damit und durch Umstellen von Gleichung (3.134) berechnet werden (siehe auch Abbildung 3.11):

$$\underline{m}_R = \Delta i_{a,L}^* + \underline{r}_L^* = \Delta i_{a,L}^* + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \underline{s} \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} \quad (3.145)$$

Diese Beziehung wird nun mit den Zusammenhängen aus Gleichung (3.136), (3.134) so umgeschrieben werden, dass einzig Abhängigkeiten von den beiden gemessenen aktiven Stromänderungsparametern auf der rechten Seite stehen:

$$\begin{aligned} \underline{m}_R &= \Delta i_{a,L}^* + \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \Delta i_{a,R} - \Delta i_{a,L}^* \right) \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} \\ &= \Delta i_{a,L} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta i_{a,R} \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta i_{a,L} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} e^{j\frac{\pi}{6}} \cdot \Delta i_{a,R} + \left( e^{-j\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{6}} \right) \Delta i_{a,L} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} e^{j\frac{\pi}{6}} \cdot \Delta i_{a,R} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \Delta i_{a,L} \end{aligned}$$

Die Berechnung des Mittelpunkttraumzeigers aus den gemessenen rechten und linken aktiven Stromänderungsparametern ist damit:

$$\underline{m}_R = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( e^{j\frac{\pi}{6}} \cdot \Delta i_{a,R} + e^{-j\frac{\pi}{2}} \Delta i_{a,L} \right) \quad (3.146)$$

Mit Gleichung (3.144) und (3.146) stehen somit die notwendigen Gleichungen zur Berechnung des Mittelpunkt- und Radiusraumzeigers auf Basis der gemessenen aktiven Stromänderungsparameter eines Taktes zur Verfügung. Da die Berechnungen sich auf Drehstreckungen der gemessenen Raumzeiger und Additionen beschränken, sind diese durch Multiplikationen mit Konstanten und Additionen in einem FPGA sehr effizient realisierbar. Für die weitere Verwendung der Mittelpunkt- und Radiusraumzeiger werden jeweils ihre Beträge

benötigt. Diese werden durch die Verwendung eines Cordic-Algorithmus ebenfalls im FPGA berechnet (siehe Kapitel 5).

### 3.4 Verwendung der allgemeinen Beschreibung der Stromänderungsparameter

Die Darstellung der Stromänderungsparameter mit Hilfe des Mittelpunkt- und Radiusraumzeigers eröffnet zwei mögliche Verwendungen:

1. Identifikation des Rotorlagewinkels durch Auswertung der Stromänderungsparameter
2. Berechnung der Stromänderungsparameter mit Hilfe des Rotorlagewinkels

#### 3.4.1 Identifikation des Rotorlagewinkels durch Auswertung der Stromänderungsparameter

Jeder Radiusraumzeiger hängt nach Gleichung (3.94) direkt vom Rotorlagewinkel ab:

$$\underline{r}_x = r \cdot e^{j(2\gamma(t) - \varphi_x)} \quad (3.147)$$

$$\Rightarrow \arg(\underline{r}_x) = 2\gamma(t) - \varphi_x \quad (3.148)$$

Mit Kenntnis des Winkels eines Radiusraumzeigers kann damit auf  $\gamma(t)$  geschlossen werden:

$$\gamma = \frac{\arg(\underline{r}_x) + \varphi_x}{2} = \frac{1}{2} \left( \arctan \left( \frac{r_{x,\beta}}{r_{x,\alpha}} \right) + \varphi_x \right) \quad (3.149)$$

Durch die Abhängigkeit der Radiusraumzeiger vom doppelten Rotorlagewinkel nimmt der Winkel des Radiusraumzeigers pro elektrischer Periode zweimal jeden Wert zwischen 0 und  $2\pi$  an. Das Ergebnis der Berechnung von Gleichung (3.149) liefert deshalb sowohl für  $\gamma$ , als auch für  $-\gamma$  dasselbe Ergebnis. Alleine durch Gleichung (3.149) kann also nicht entschieden werden, ob mit dem berechneten Winkel tatsächlich  $\gamma$  und damit die Richtung der d-Achse

(siehe Abbildung 3.1) oder  $-\gamma$  und damit die um  $180^\circ$  gedrehte Richtung identifiziert wurde. Physikalisch liegt dies daran, dass die Induktivitäten in d- und q-Richtung zwar unterschiedlich sind, aber der magnetische Leitwert *innerhalb* einer Orientierung in positive und negative Richtung gleich bleibt.  $L_d$  ist sowohl in d- als auch in „-d“-Richtung gleich groß.

Diese Problemstellung kann auf verschiedene Arten gelöst werden. Eine Methode besteht darin, zunächst die d-Achse noch unabhängig vom Vorzeichen zu finden und dann so lange d-Strom in die Maschine einzuprägen, bis aufgrund des Sättigungsverhaltens bei hohen Strömen die Richtung der d-Achse bestimmt werden kann [9]. Eine andere Methode besteht in der Auswertung von Offsets der Induktivitäten, die beispielsweise durch Flusssammler-Anordnung vergrabener Magnete entstehen können. Dadurch wird die Induktivität in +d-Richtung einen geringfügig anderen Wert aufweisen, als in -d-Richtung [77].

In dieser Arbeit wird die Identifikation des Rotorlagewinkels nicht weiter untersucht. Letztlich existieren bereits einige Verfahren zur gerberlosen Regelung elektrischer Maschinen, die genau darauf basieren, durch die Auswertung der taktfrequenten Stromsteigungen den Rotorlagewinkel zu gewinnen [7–9, 75–77].

Es ist jedoch ein echter Vorteil des Adaptiven Direkten Stromregelverfahrens, dass durch die Messung der Stromsteigungen, quasi als Nebenprodukt, die Identifikation des Rotorlagewinkels ermöglicht wird.

### 3.4.2 Berechnung der Stromänderungsparameter mit Hilfe des Rotorlagewinkels

Ist der Rotorlagewinkel bekannt, können mit Hilfe des Mittelpunkt- und Radiusraumzeigers zu jedem Zeitpunkt alle sechs aktiven Stromänderungsparameter nach Gleichung (3.95) angegeben werden:

$$\Delta i_{a,x} = \underline{m}_x - \underline{r}_x = m \cdot e^{j\varphi_x} - r \cdot e^{j(2\gamma - \varphi_x)} \quad (3.150)$$

Eine valide Messung der Stromsteigungen in jedem einzelnen PWM-Takt ist für die Angabe der Stromänderungsparameter somit nicht mehr zwingend notwendig. Speziell im Hinblick auf zu kurze Schaltzustände ist dies ein echter Vorteil und erweitert dadurch die Möglichkeiten der Anwendung der Adaptiven Direkten Stromregelung. Speziell für anisotrope Synchronmaschinen ist die exakte Lage der Stromänderungsparameter im jeweiligen Takt aufgrund ihrer Abhängigkeit vom Rotorlagewinkel sehr wichtig. Durch die analytische Berechenbarkeit ist dies jedoch in jedem Takt gegeben.

Da die Beträge der Mittelpunkt- und Radiusraumzeiger nach Gleichung (3.96) und (3.97) von Parametern abhängen, die entweder zeitinvariant sind ( $L_A$ ,  $L_B$ ,  $T_{PWM}$ ), beziehungsweise leicht vorsteuerbar sind ( $U_d$ ), kann die Messung dieser Beträge auch leicht gefiltert werden. Für einen rein adaptiven Betrieb wird in Kapitel 5 ein adaptives FIR-Filter für diese Anwendung vorgestellt. Es ist aber auch möglich, die Beträge des Mittelpunkt- und Radiusraumzeigers für die erste Verwendung direkt aus den Maschinenparametern  $L_A$  und  $L_B$ , sowie den Stromrichter-Parametern  $U_d$  und  $T_{PWM}$  zu berechnen und dann im Betrieb durch die Messung der Stromsteigungen und mit den Beziehungen aus den Gleichungen (3.144) und (3.146) sowie einer Filterung anzupassen.

Eine große Herausforderung bei der Messung der Stromsteigungen stellen zu kurze Schaltzustände dar, in denen aufgrund von Störungen durch Schalt-handlungen oder Ungenauigkeiten bei der exakten zeitlichen Zuordnung der Messwerte zu den Schaltzuständen zuverlässige Messwerte nahezu unmöglich sind. Um für diese kurzen Schaltzustände dennoch die Stromsteigungen zu erhalten, existiert die Möglichkeit, den Geradenzug des Stroms für diese Zeiten aus den benachbarten, gemessenen Geradenabschnitten zu interpolieren.

Werden die aktiven Stromänderungsparameter jedoch direkt nach Gleichung (3.150) berechnet, entfällt die Notwendigkeit der Interpolation vollständig. Auch für noch so kurze Schaltzustände sind die Stromänderungsparameter direkt berechenbar. Mehr noch, durch die analytische Darstellung aller sechs aktiver Stromänderungsparameter können sogar dann die Stromänderungsparameter angegeben werden, wenn *beide* aktiven Schaltzustände zu kurz sein sollten.

Darüber hinaus ist auch die Kenntnis des Freilaufparameters für die Bestimmung der aktiven Stromänderungsparameter nicht mehr erforderlich. Für die Anwendung der Adaptiven Direkten Stromregelung wird dieser zwar dennoch benötigt (siehe Abbildung 3.8), er kann aber auch aus den aktiven Stromänderungsparametern berechnet werden (siehe Gleichung (3.63) und (3.133)).

## 3.5 Betriebsbereiche für die Identifikation

Mit Hilfe der als konstant angenommenen Beträge der Mittelpunkt- und Radiusraumzeiger können die Stromänderungen alleine mit dem als bekannt vorausgesetzten Rotorlagewinkel (beispielsweise von einem Winkelgeber) berechnet werden. Damit sind die Stromänderungsparameter in allen Betriebspunkten berechenbar und müssen nicht mehr zwingend in jedem Takt in allen Schaltzuständen gemessen werden. Insbesondere entfällt dadurch die Messungenauigkeit und die Notwendigkeit einer Interpolation bei sehr kurzen Schaltzuständen. Um dabei trotzdem adaptiv zu bleiben, müssen zuvor in ausreichend langen Schaltzuständen die Beträge von Mittelpunkt- und Radiusraumzeiger ausgemessen worden sein. Die permanente Nachführung der Beträge der Mittelpunkt- und Radiusraumzeiger im Betrieb, kann auf die Messung der Stromsteigungen in ausreichend langen Schaltzuständen beschränkt bleiben. Die verschiedenen möglichen Bereiche zur Identifikation der Stromsteigungen sind in Abbildung 3.12 schematisch dargestellt und werden in den folgenden Unterabschnitten diskutiert.

### **Bereich I - regulärer Betrieb**

Im Bereich I (grün in Abbildung 3.12) sind die Einschaltzeiten der beiden aktiven Schaltzustände und der Freilaufschaltzustände ausreichend lange, so dass die Messung sowohl der aktiven, als auch der Freilauf-Stromänderungsparameter erfolgen kann. Entsprechend können auch die Mittelpunkt- und Radiusraumzeiger nach den Gleichungen (3.144) und (3.146) berechnet werden.

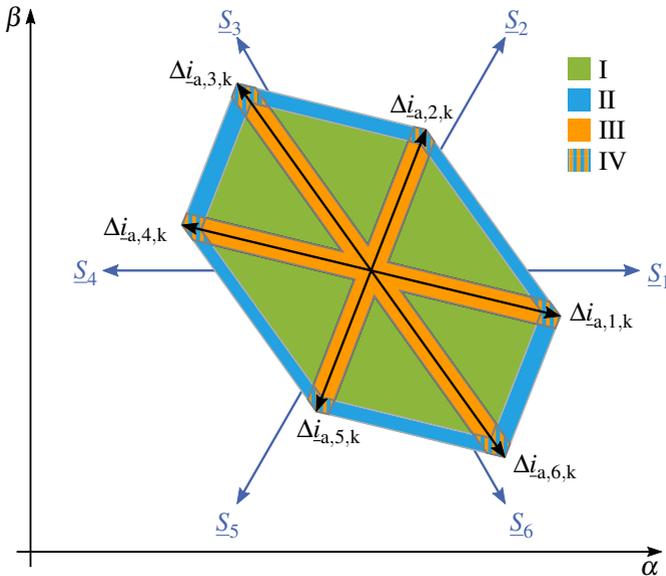


Abbildung 3.12: Betriebsbereiche für die Identifikation

### Bereich II - Betrieb an der Aussteuergrenze

Im Bereich II (blau in Abbildung 3.12) sind die Einschaltzeiten der Freilaufschaltzustände zu kurz, um valide Werte des Freilaufparameters messen zu können. In diesem Bereich kann der Freilaufparameter bei einer isotropen Maschine nach Gleichung (3.63), und bei einer anisotropen Maschine nach Gleichung (3.133) berechnet werden. Bei der anisotropen Maschine werden hierfür die beiden Mittelpunkttraumzeiger der aktuellen Schaltzustände benötigt. Unter der Annahme, dass die Beträge der Mittelpunkt- und Radiusraumzeiger konstant sind, können sie aus der Identifikation vorangegangener Takte im Bereich I übernommen werden.

### Bereich III - Sektorenwechsel

Im Bereich III (orange in Abbildung 3.12) ist mindestens ein aktiver Schaltzustand zu kurz, um ein valides Ergebnis für die Stromsteigung messen zu

können. Der Freilaufparameter hingegen kann problemlos gemessen werden. Für die Berechnung der Mittelpunkt- und Radiusraumzeiger werden aber beide aktiven Stromänderungsparameter benötigt. Aus diesem Grund müssen auch in Bereich III die Beträge der Mittelpunkt- und Radiusraumzeiger aus vorangegangenen Takten in Bereich I übernommen werden. Umgekehrt kann aber dann wiederum der oder die fehlenden aktiven Stromänderungsparameter im Bereich III mit Hilfe des als bekannt vorausgesetzten Rotorlagewinkels analytisch nach Gleichung (3.95) berechnet werden und für die Regelung genutzt werden.

#### **Bereich IV - Sektorenwechsel an der Aussteuergrenze**

In diesem Bereich (in Abbildung 3.12 orange/blau gestreift) ist ein aktiver Schaltzustand und der Freilauf zu kurz für valide Messergebnisse. In diesem Bereich müssen daher ebenfalls wieder die Beträge der Mittelpunkt- und Radiusraumzeiger als konstant angenommen werden und sowohl der Freilaufparameter, als auch der fehlende aktive Stromänderungsparameter daraus errechnet werden.

Im Betrieb ist es somit wichtig, dass bei einer Betriebspunktänderung auch immer genügend Takte im Bereich I geschaltet werden, um die Beträge der Mittelpunkt- und Radiusraumzeiger aus dem neuen Betriebspunkt zu identifizieren. Bleibt die Maschine jedoch in einem Betriebspunkt, oder wird dieser nur langsam verändert, ist die Annahme gerechtfertigt, dass die Beträge der Mittelpunkt- und Radiusraumzeiger konstant sind.

### **3.6 Bewertung der verallgemeinerten Darstellungsform der Stromänderungsparameter**

Die Darstellung der Stromänderungsparameter mit Hilfe der Mittelpunkt- und Radiusraumzeiger ist für die Beschreibung der Stromänderungsparameter der magnetisch anisotropen Synchronmaschine sehr nützlich um das zunächst

schwer beschreibbare Verhalten auf die Unterschiede in  $L_d$  und  $L_q$  und den Rotorlagewinkel zurückzuführen. Da der Betrag der Radiusraumzeiger direkt proportional zu  $L_B$  und damit zur Differenz zwischen  $L_d$  und  $L_q$  ist, kann er auch als direkt proportional zur magnetischen Anisotropie der Maschine gewertet werden. Bei isotropen Maschinen, zu denen auch die Asynchronmaschine zählt, wird der Radiusraumzeiger einfach verschwinden und übrig bleiben alleine die Mittelpunkttraumzeiger, die wiederum das regelmäßige Sechseck für die aktiven Stromänderungsparameter aufspannen.

Die Beschreibung mit den Mittelpunkt- und Radiusraumzeigern kann deshalb als allgemeine Beschreibung der Stromänderungsparameter von Drehstrommaschinen bezeichnet werden, die sowohl den allgemeinen Fall der anisotropen Maschinen, als auch den speziellen Fall der isotropen Maschinen abdeckt und ohne Änderung des Algorithmus für beide verwendet werden kann [E6, E7].

Darüber hinaus bietet es sich an, die ohnehin gemessenen schaltzustandsabhängigen Stromsteigungen auch zur Identifikation des Rotorlagewinkels zu verwenden. Dadurch kann die ADSR bei anisotropen Maschinen als geberloses Stromregelungsverfahren betrieben werden.

Mit den vorgestellten Stromänderungsparametern kann die Regelung einer anisotropen Synchronmaschine analog zur in [1] vorgestellten Regelung erfolgen. Lediglich die Berechnung aller sechs aktiver Stromänderungsparameter und die Auswahl der beiden für den neuen Sollwert passenden, benachbarten aktiven Schaltzustände müssen zusätzlich erfolgen. Das resultierende Blockschaltbild der Adaptiven Direkten Stromregelung für anisotrope Synchronmaschinen ist in Abbildung 3.13 dargestellt.

Die Einordnung in die Familie der prädiktiven Regelungsverfahren entspricht auch mit der Erweiterung um die Stromänderungsparameter für anisotrope Synchronmaschinen der in Abschnitt 2.1.2 beschriebenen Klassifizierung.

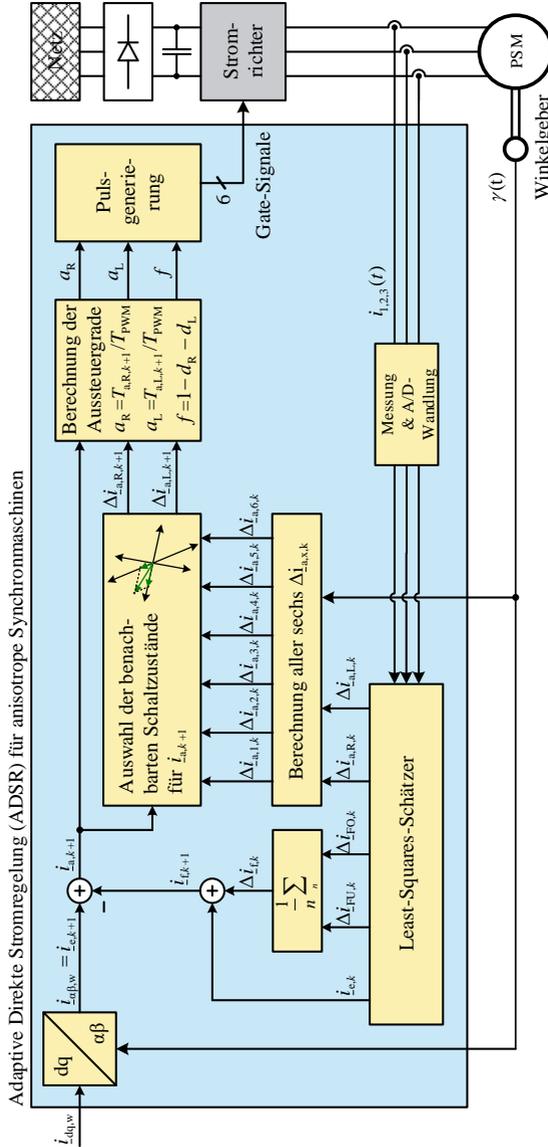


Abbildung 3.13: Blockschaltbild der Adaptiven Direkten Stromregelung für anisotrope Synchronmaschinen



# 4

## **Eine neue effiziente Methode zur Bestimmung der Stromsteigungen in Stromrichterschaltungen**

*“Nur wo du zu Fuß warst, bist du auch wirklich gewesen.”*

Johann Wolfgang von Goethe

In diesem Kapitel wird ein neues Verfahren zur Messung der Stromsteigungen vorgestellt, das auch in [E3] veröffentlicht wurde. Grundlage dieses Verfahrens ist eine starke Überabtastung des gemessenen Stromsignals. Das überabgetastete Signal wird dann mit dem Verfahren der Minimierung der Fehlerquadrate (kurz LS-Verfahren oder LS-Filter, mit LS von engl. „Least-Squares“) gefiltert. Da das Verfahren mathematisch direkt auf dem ursprünglichen LS-Verfahren aufbaut, wird in Abschnitt 4.1 zunächst das allgemeine LS-Verfahren vorgestellt. Eine tiefer gehende Analyse der darin vorkommenden Pseudoinversen der Beobachtermatrix für die konkreten Randbedingungen in Stromrichterschaltungen führt in Abschnitt 4.2 dann zum neuen Verfahren.

### **4.1 Das allgemeine Least-Squares-Schätzer-Verfahren**

Die Messung der Ströme in industriellen, umrichter gesteuerten elektrischen Antrieben erfolgt üblicherweise mit potentialgetrennten Stromwandlern, die im ersten Schritt die Phasenströme der Zuleitungen der Maschine zunächst in eine für die weitere Signalverarbeitung geeignete Spannung umsetzen. Die

Ausgangsgröße der Stromwandler ist idealerweise eine stromproportionale Spannung, die für die weitere Verwendung in der digitalen Signalverarbeitung mit einem Analog-Digital-Wandler (A/D-Wandler) auf eine digitale Zahl abgebildet wird.

Durch die in realen Stromwandlern gegebene nicht-ideale Stromwandlung, überlagertes Rauschen der verwendeten Bauteile und Verstärkerschaltungen sowie die anschließende Digitalisierung entstehen jedoch Fehler im digital vorliegenden Strommesswert. Um aus diesem Signal den tatsächlichen Strommesswert herauszufiltern, existieren eine Reihe von Filter-Algorithmen, von denen der Ansatz der Minimierung der Fehlerquadrate bereits seit seiner ersten Verwendung zur Berechnung von Kometenbahnen sehr weite Verbreitung und Anwendung in Wissenschaft und Technik findet.

### **Überabtastung des zu messenden Signals**

Ein wesentliches Merkmal des LS-Verfahrens ist, dass dem Verfahren ein stark überabgetastetes Signal zugrunde gelegt wird. Das bedeutet, dass die Abtastrate deutlich größer ist, als es für die Rekonstruktion des Signals aufgrund seiner Bandbreite nötig wäre. Es werden also zu dem Zeitverlauf (oder allgemein zu dem Zusammenhang zwischen zwei Größen) deutlich mehr Messwertpaare aufgenommen, als für die Bestimmung des analytischen Zusammenhangs notwendig wäre (siehe hierzu auch Abbildung 4.2).

Bei der Messung von zeitabhängigen Größen bedeutet dies, dass zu sehr vielen unterschiedlichen Zeitpunkten Messwerte aufgenommen werden und dass sich das zu messende Signal zwischen zwei Messzeitpunkten nur unwesentlich ändert. Überabtastung einer zeitabhängigen Größe bedeutet also, dass die Abtastfrequenz des Signals deutlich höher liegen muss als die höchsten noch zu messenden Frequenzanteile des Signals selbst. Das LS-Verfahren ist aber nicht auf die Verarbeitung zeitabhängiger Größen beschränkt. Sollen beispielsweise ortsabhängige Größen mit dem LS-Verfahren gefiltert werden, so müssen die Messwerte an unterschiedlichen Orten aufgenommen werden. Auch hierbei darf sich die ortsabhängige, physikalische Größe zwischen zwei Messwerten nur unwesentlich ändern.

Besonders bei Signalen mit stochastisch normalverteiltem Fehler hat sich dieser Ansatz bewährt. Im Vergleich zum wahrscheinlich intuitivsten und einfachsten Filter, der Berechnung des arithmetischen Mittelwerts, konvergiert das LS-Filter durch die quadratische Gewichtung des Fehlers deutlich schneller und kommt darum mit deutlich weniger Messwerten aus, um ein valides Messergebnis zu liefern [57, 58]. Hinzu kommt, dass durch die Quadrierung der Messwertfehler, der Minimierungsaufgabe eine quadratische Gleichung mit positivem Fehlerquadrat zugrunde gelegt wird, die immer genau ein globales Minimum aufweist und damit mathematisch eindeutig lösbar ist.

Zur Identifikation der Stromsteigungen in leistungselektronischen Schaltungen mittels des LS-Verfahren wird ein überabgetastetes Strommesswertsignal verwendet. Dies sind digital vorliegende diskrete Zahlenwerte des mit einer konstanten, äquidistanten Abtastzeit  $T_{AD}$  des A/D-Wandlers abgetasteten Messsignals. Aufgrund der konstanten, äquidistanten Abtastzeit können diese Messwerte so in einem Diagramm eingetragen werden, dass auf der Abszisse entweder die Zeit oder aber der Index des  $n$ -ten Messwerts zum Zeitpunkt  $t_n = n \cdot T_{AD}$  eingetragen wird. Der Messwert  $y_n$  selbst setzt sich in realen Messumgebungen aus dem physikalisch tatsächlich existierenden, den Messwert überhaupt erst generierenden Wert  $\Gamma_n$  der zu messenden physikalischen Größe und einem überlagerten Fehler  $e_n$  zusammen.  $\Gamma_n$  wird auch als „*natürlicher Wert*“ bezeichnet [57]:

$$y_n = \Gamma_n + e_n \quad (4.1)$$

Die Funktion  $\Gamma(n)$ , die sämtliche natürlichen Datenwerte einer Messreihe enthält wird dementsprechend „*natürliche Funktion*“ genannt.

Der *Fehler* wird zum Einen von einer nicht idealen Abbildung der physikalischen Größe auf die am A/D-Wandler angelegte Eingangsspannung verursacht (Rauschen, nichtlineares Verhalten der Messverstärkerschaltung). Zum Anderen generiert auch die A/D-Wandlung selbst einen nicht zu vernachlässigenden Fehler durch die Abbildung der analogen, wertkontinuierlichen Eingangsspan-

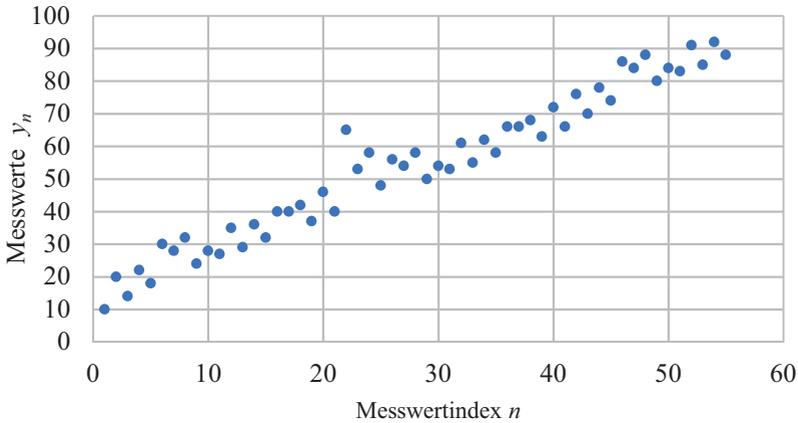


Abbildung 4.1: äquidistant abgetastete Messwerte mit überlagertem Fehler

nung auf diskrete Zahlenwerte (Quantisierungsfehler). In Abbildung 4.1 ist eine solche Messreihe beispielhaft dargestellt.

Es ist eine faszinierende Eigenschaft des Menschen, dass jeder der diese Menge an zufälligen Werten sieht, sofort erkennt, dass es sich hierbei um einen weitgehend linearen Verlauf handeln müsste. Man könnte nun intuitiv mit einem Lineal eine Linie einzeichnen, die etwa in der Mitte zwischen den Messwerten liegt und würde dadurch schnell zu einem Ergebnis kommen. Die Annahme, dass die zu ermittelnde natürliche Funktion durch Zeichnen eines geraden Striches durch die Menge der Messwerte gefunden werden kann, entspricht mathematisch der grundsätzlichen Vorgabe einer linearen Funktion oder Geradengleichung als sogenannte **Basisfunktion**. Die Spezifizierung wo und mit welchem Winkel dieser Strich zu zeichnen ist, fehlt dabei noch. Umgangssprachlich würde man deshalb die Forderung formulieren, dass sich der Strich möglichst „in der Mitte“ der Punktwolke befinden soll. Der zeichnende Mensch würde dann die Steigung und den y-Achsenabschnitt der Geraden entsprechend wählen und dadurch erst die **Parameter** der Basisfunktion festlegen (siehe Abbildung 4.2).

## Modellfunktion

Die mathematische Umsetzung dieser Näherung wird im LS-Verfahren durch eine analytische Darstellung der ursprünglichen real vorhandenen Stromwerte durch eine sogenannte **Modellfunktion**  $M(p, f)$  erreicht. Die Modellfunktion soll das „natürliche“ Verhalten der Messgröße weitestgehend abbilden und dabei nicht zu sensibel auf Ausreißer reagieren. Nur im Idealfall wird dabei die Modellfunktion der natürlichen Funktion exakt und über alle Messpunkte hinweg entsprechen. Alleine schon die Annahme, dass die natürliche Funktion als Geradengleichung dargestellt werden kann, blendet ja von vornherein sämtliche Nichtlinearitäten des physikalischen, die Messwerte erzeugenden Prozesses aus. Zu den bereits angesprochenen Fehlerursachen des Messwerts kommt darum noch der Approximationsfehler hinzu:

$$e_{n, Appr.} = \Gamma(n) - M(p, f) \quad (4.2)$$

Ist der Approximationsfehler kleiner oder in etwa so groß wie der restliche Datenfehler, so kann die Modellfunktion als gut bezeichnet werden [57].

Die Modellfunktion kann dabei eine beliebige analytische Funktion sein, deren **grundsätzliche Struktur** durch die **Basisfunktionen**  $f$  festgelegt und beschrieben wird. Wird beispielsweise eine Geradengleichung als Modellfunktion gewählt, so wird diese durch folgendes Polynom 1. Ordnung beschrieben:

$$M_{\text{Linear}}(p, f) = p_1 \cdot f_1 + p_2 \cdot f_2 \stackrel{!}{=} m \cdot x + c \quad (4.3)$$

Die grundsätzliche Struktur des Polynoms 1. Ordnung wird dabei durch die beiden Basisfunktionen

$$\begin{aligned} f_1 &= x^1 = x \\ f_2 &= x^0 = 1 \end{aligned} \quad (4.4)$$

bestimmt. Die **individuelle Gestalt der Modellfunktion** wird erst durch die **Parameter**  $p$  festgelegt. In diesem Beispiel mit dem Polynom erster Ordnung

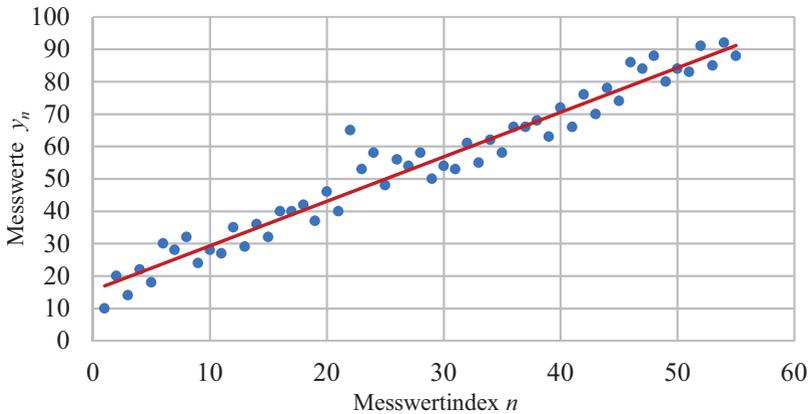


Abbildung 4.2: Kurven-Fit der Messwertreihe aus Abbildung 4.1 mit einem Polynom 1. Ordnung als Modellfunktion

sind die beiden Parameter  $p_1$  und  $p_2$  die zwei charakteristischen Werte einer jeden Geradengleichung (siehe auch Abbildung 4.2):

$$\begin{aligned} p_1 &= m = \text{Steigung} \\ p_2 &= c = y - \text{Achsenabschnitt} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Der Gedanke der dem LS-Verfahren zugrunde liegt, besteht nun darin, dass die Modellfunktion so gewählt wird, dass sie die zu messende Größe und ihr physikalisch bedingtes Verhalten analytisch grundsätzlich abbilden und möglichst genau darstellen kann. Im vorliegenden Fall der zu messenden Ströme kann unter der Annahme, dass die Ströme sich während der Messintervalle annähernd linear ändern, ein Polynom erster Ordnung als Modellfunktion gewählt werden. Der Stromverlauf enthält auch Anteile von Exponentialfunktionen und Winkelfunktionen, die aber mit guter Näherung vernachlässigt werden können, wenn nur jeweils kurze Abschnitte des Stromverlaufs approximiert werden sollen.

Soll aber beispielsweise die Höhe eines schräg nach oben geworfenen Balles analytisch über der Weite des Wurfes dargestellt werden, wird zur analytischen Beschreibung der Parabel ein Polynom 2. Ordnung benötigt. Exponentialfunk-

tionen und Wachstumsfunktionen können wiederum als Modellfunktion bei der Erfassung der Population einer Bakterienkolonie zugrunde gelegt werden.

Bei der Berechnung von Planetenbahnen hingegen verwendete Carl Friedrich Gauß Ellipsengleichungen als Modellfunktionen. Damit konnte er im Jahr 1801 als einziger von etlichen Astronomen seiner Zeit den Zeitpunkt der Wiederkehr des im Januar 1801 von dem Italiener Guiseppi Piazzi entdeckten Zwergplaneten Ceres genau berechnen. Seine Zeitgenossen verwendeten hingegen Kreisfunktionen und lagen mit ihren Berechnungen deutlich daneben. Auf diese Berechnungen wendete er in den folgenden Monaten nach der Wiederkehr von Ceres, nachdem deutlich mehr Messpunkte verfügbar waren, erstmals auch das von ihm entwickelte LS-Verfahren an. Er beschrieb es in dem 1809 erschienenen Buch „Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium“ (Theorie der Bewegung der Himmelskörper, welche in Kegelschnitten die Sonne umlaufen)[80].

Dass die Wahl der grundsätzlichen Struktur der Modellfunktion einen entscheidenden Einfluss auf das Ergebnis der Interpretation der Messwerte nach dem LS-Verfahren hat, ist auch in den folgenden Abbildungen zu sehen. Wird beispielsweise ein Polynom 6. Ordnung als Modellfunktion für die Filterung der Messwerte aus Abbildung 4.1 gewählt, ergibt sich die in Abbildung 4.3 (a) abgebildete rote Kurve und das zugehörige Gleichungssystem lautet:

$$\begin{aligned} M_{\text{Poly6}}(p, f) &= p_1 \cdot f_1 + p_2 \cdot f_2 + \dots + p_6 \cdot f_6 + p_7 \cdot f_7 \\ &= p_1 \cdot x^6 + p_2 \cdot x^5 + \dots + p_6 \cdot x^1 + p_7 \cdot x^0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Die Basisfunktionen sind hierbei  $f_1 \dots f_7 = x^6 \dots x^0$  und  $p_1 \dots p_6$  sind die zugehörigen Parameter. Ein weiteres Beispiel ist in Abbildung 4.3 (b) zu sehen. Hier wurde eine Exponentialfunktion als Modellfunktion zugrunde gelegt. Die Basisfunktion ist daher  $f_1 = x^1$  und die beiden Parameter sind  $p_1$  und  $p_2$ :

$$M_{\text{Exp}}(p, f) = p_2 \cdot e^{p_1 \cdot f_1} \quad (4.7)$$

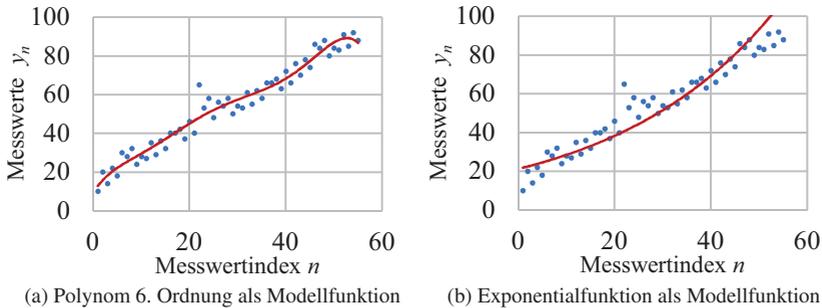


Abbildung 4.3: Illustration der Unterschiede in der Interpretation der Messreihe aus Abbildung 4.1 durch die Wahl unterschiedlicher Modellfunktionen

### Fehler und Residuum

Die grundsätzliche Struktur der Modellfunktion an sich reicht aber noch nicht aus, um die ursprüngliche gemessene Größe analytisch darzustellen. Um eine möglichst exakte Abbildung der Messgröße durch die Modellfunktion zu erreichen, werden nun noch die Parameter so verändert, dass die Modellfunktion bestmöglich an die Messwerte angepasst wird.

Dazu wird beim LS-Verfahren der Ansatz verfolgt, dass die Modellfunktion genau dann der ursprünglichen physikalischen Größe am besten entspricht, wenn die Summe der Quadrate ihres Abstands zu jedem einzelnen Messwert minimal wird (Satz von Gauß [81][82]). Dieser Abstand ist die Differenz zwischen den Messwerten  $y$  und der Modellfunktion und wird als **Residuum**  $r$  bezeichnet:

$$r_n = y_n - M_n(p, f) \quad (4.8)$$

Das Residuum  $r_n$  unterscheidet sich vom Fehler  $e_n$  dadurch, dass der Fehler den gesamten Unterschied zwischen dem natürlichen Wert  $\Gamma_n$  und dem Messwert  $y_n$  beschreibt, einschließlich des Approximationsfehlers (siehe Abbildung 4.4, sowie Gleichung (4.1) und (4.2)):

$$e_n = y_n - \Gamma_n = r_n + e_{n,Appr}. \quad (4.9)$$

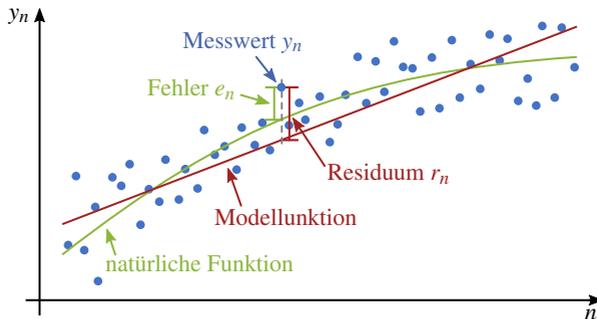


Abbildung 4.4: Veranschaulichung des Unterschieds zwischen Residuum und Fehler

Durch die Approximation der natürlichen Funktion  $\Gamma$  durch die Modellfunktion  $M(p, f)$  kann in der Minimierungsaufgabe mathematisch aber nur die Differenz zwischen Messwert und der Modellfunktion berücksichtigt werden. Der Approximationsfehler an sich ist bei unbekannter natürlicher Funktion nicht minimierbar.

Wäre beispielsweise bekannt, dass der Stromkurvenverlauf aufgrund der zugrundeliegenden Schaltung exponentiell sein müsste, so wäre sofort klar, dass durch die Approximation der Messwerte mit einer Geraden ein grundsätzlicher Fehler gemacht wird (Approximationsfehler). Das LS-Verfahren kann aber wegen der ihm übergebenen Modellfunktion in Form einer linearen Gleichung nur die bestmöglich an die Messwerte angepasste Gerade, niemals aber einen exponentiellen Verlauf berechnen. Der Approximationsfehler selbst ist durch das LS-Verfahren also nicht minimierbar und wird maßgeblich durch die Wahl der Modellfunktion und die Gültigkeit der Annahme einer korrekten Abbildung der natürlichen Funktion durch die Modellfunktion bestimmt.

Für die Aufgabe der Identifikation der Stromsteigungen in Stromrichterschaltungen wird in dieser Arbeit die grundsätzliche Annahme eines linearen Stromkurvenverlaufs während eines Messintervalls getroffen (siehe hierzu auch Abschnitt 2.1.1). Im weiteren Verlauf wird daher auf die Unterscheidung zwischen Residuum und Fehler nicht mehr eingegangen, sondern unter der Annahme, dass die Modellfunktion die ursprüngliche physikalische Größe  $\Gamma$  exakt

darstellt, das Residuum mit dem Fehler gleichgesetzt und nur noch als „Fehler“ bezeichnet. Der Approximationsfehler bleibt für die weitere Betrachtung somit unberücksichtigt.

$$\begin{aligned}
 M_n(p,f) &\approx \Gamma_n \\
 e_{n,Appr.} &\approx 0 \\
 e_n = y_n - \Gamma_n &\approx y_n - M_n(p,f) \approx r_n
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

### Mathematische Beschreibung einer Messreihe

Damit kann jeder einzelne Messwert einer Messreihe als Summe aus idealem Wert (berechenbar durch die Modellfunktion) und einem Fehler beschrieben werden. Für den  $n$ -ten Messwert  $y_n$  einer Messreihe gilt

$$y_n = M_n(p,f) + e_n
 \tag{4.11}$$

Hierbei ist  $M_n$  die Modellfunktion des  $n$ -ten Messwerts und  $e_n$  der zum  $n$ -ten Messwert gehörende Fehler. Der Index  $n$  wird daher auch als „Messwertindex“ bezeichnet (siehe auch Abschnitt 5.3.1 auf Seite 192). Eine komplette Messreihe mit  $N$  Messwerten generiert demnach auch  $N$  solcher Gleichungen. Aus Gründen der übersichtlicheren Darstellung wird zur Beschreibung der kompletten Messreihe darum die Matrixnotation verwendet. Die  $N$  Messwerte  $y_1 \dots y_N$  einer mit einem Polynom  $q$ -ter Ordnung als grundsätzlicher Struktur der Modellfunktion können damit wie folgt beschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{q,1} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{1,n} & \cdots & f_{q,n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{1,N} & \cdots & f_{q,N} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \\ \vdots \\ p_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \\ \vdots \\ e_N \end{pmatrix}
 \tag{4.12}$$

mit

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \text{Messwertvektor} \quad (4.13)$$

Die Matrix, die die Basisfunktionen der Modellfunktion enthält und damit die grundsätzliche Struktur der Modellfunktion beschreibt, wird auch Beobachtermatrix  $\mathbf{O}$  („O“ von engl. „Observer“) genannt:

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{q,1} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{1,n} & \cdots & f_{q,n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{1,N} & \cdots & f_{q,N} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Der sogenannte Parametervektor

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \\ \vdots \\ p_q \end{pmatrix} = \text{Parametervektor} \quad (4.15)$$

enthält die gesuchten Parameter  $p_1 \dots p_N$ , mit denen die Modellfunktion

$$M(p, f) = \mathbf{O} \cdot \mathbf{p} \quad (4.16)$$

den Messwerten bestmöglich angepasst wird, um im Idealfall exakt die ursprünglich zu messende natürliche Größe darzustellen. Der Vektor  $\mathbf{e}$  enthält den zu jedem Messwert zugehörigen Fehler  $e_n$ , den es zu minimieren gilt:

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \\ \vdots \\ e_N \end{pmatrix} = \text{Fehlervektor} \quad (4.17)$$

Die verkürzte Matrixschreibweise der gesamten Messreihe ist damit

$$\mathbf{y} = \underbrace{M(p,f)}_{\text{Modellfunktion}} + \underbrace{\mathbf{e}}_{\text{Fehler}} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{e} \quad (4.18)$$

und entspricht der Beschreibung der Messwerte durch eine Modellfunktion (z.B. eine Gerade) mit einem überlagerten Fehler.

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass die Modellfunktion durchaus nicht für alle Messwerte eines betrachteten Messintervalls identisch sein muss. Sowohl die Basisfunktionen als auch die Parameter können bei jedem Messwert aus mathematischer Sicht neu gewählt werden. In der vorliegenden Anwendung zur Auswertung der Strommesswerte ist dies jedoch nicht sinnvoll.

### Minimierungsaufgabe

Für eine Messreihe mit  $N$  Messwerten gemäß Gleichung (4.18) soll das Minimum der Summe der Fehlerquadrate gefunden werden. Diese Minimierungsaufgabe kann mathematisch folgendermaßen beschrieben werden:

$$\min_{\mathbf{p}} \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^2 = \min_{\mathbf{p}} \sum_{i=1}^N (\mathbf{y}_i - \mathbf{O}_i \cdot \mathbf{p})^2 \quad (4.19)$$

Da sowohl die Messwerte ( $y_i$ ) als auch die allgemeine Struktur der Modellfunktion mit  $\mathbf{O}$  festgelegt und nicht veränderlich sind, muss derjenige

Parametervektor gefunden werden, für den Gleichung (4.19) minimal wird. Es sollen also diejenigen Parameter gefunden werden, die die Modellfunktion bestmöglich an die Messwerte annähern. Die Summe der Fehlerquadrate wird daher als vom Parametervektor abhängige Funktion geschrieben:

$$f(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^N (\mathbf{y}_i - \mathbf{O}_i \cdot \mathbf{p})^2 \quad (4.20)$$

Dabei wird ein weiterer vorteilhafter Aspekt des LS-Verfahrens deutlich: Durch die Betrachtung des Fehlerquadrats wird die zu minimierende Funktion zu einer Gleichung (4.19) mit durchweg positiven Elementen. Diese Funktion ist differenzierbar und die Minimierungsaufgabe ist dadurch analytisch geschlossen lösbar. Zur Berechnung dieses Minimums muss die erste Ableitung von Gleichung (4.20) berechnet und deren Nullstelle gefunden werden. Da es sich bei den Elementen in Gleichung (4.20) um Vektoren und Matrizen handelt, muss hierbei partiell nach allen Elementen des Parametervektors abgeleitet werden.

$$\nabla f(\mathbf{p}) = 0$$

Hat der Parametervektor die Dimension  $q$  muss demnach für alle  $q$  partiellen Ableitungen gelten:

$$\frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial p_k} = 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, q$$

Unter Anwendung der Potenz- und Kettenregel kann die  $k$ -te partielle Ableitung direkt aus Gleichung (4.20) berechnet werden:

$$\frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial p_k} = \sum_{i=1}^N 2(\mathbf{y}_i - \mathbf{O}_i \cdot \mathbf{p}) \cdot \frac{\partial}{\partial p_k} (\mathbf{y}_i - \mathbf{O}_i \cdot \mathbf{p}) \quad (4.21)$$

$$= \sum_{i=1}^N 2(\mathbf{y}_i - \mathbf{O}_i \cdot \mathbf{p}) \cdot \left( 0 - \frac{\partial}{\partial p_k} \mathbf{O}_i \cdot \mathbf{p} \right) \quad (4.22)$$

Das Produkt der  $i$ -ten Zeile der Beobachtermatrix mit dem Parametervektor kann wiederum als Summe geschrieben werden

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_i \cdot \mathbf{p} &= \begin{pmatrix} o_{i1} & o_{i2} & \cdots & o_{iq} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_q \end{pmatrix} \\ &= (o_{i1}p_1 + \dots + o_{iq}p_q) = \sum_{j=1}^q o_{ij}p_j \end{aligned} \quad (4.23)$$

Damit kann die partielle Ableitung weiter zusammengefasst werden:

$$\frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial p_k} = -2 \sum_{i=1}^N \left( y_i - \sum_{j=1}^q o_{ij}p_j \right) \cdot (o_{ik})$$

Die Differenz zwischen dem  $i$ -ten Messwert und dem Produkt der  $i$ -ten Zeile der Beobachtermatrix mit dem Parametervektor kann als Residuum oder Fehler (siehe Gleichung (4.10)) aufgefasst und das Ergebnis damit noch kürzer dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial p_k} &= -2 \sum_{i=1}^N r_i o_{ik} = -2(r_1 o_{1k} + r_2 o_{2k} + \dots + r_N o_{Nk}) \\ &= -2\mathbf{r}^T \mathbf{O}(:, k) = -2\mathbf{O}(:, k)^T \mathbf{r} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Dabei ist  $\mathbf{O}(:, k)$  die  $k$ -te Spalte der Beobachtermatrix. Die vollständige differentielle Ableitung  $\nabla f(\mathbf{p})$  ist damit

$$\nabla f(\mathbf{p}) = -2\mathbf{O}^T \mathbf{r} = -2\mathbf{O}^T (\mathbf{y} - \mathbf{O}\mathbf{p}) \quad (4.25)$$

Nullsetzen und Auflösen nach dem gesuchten Parametervektor führt direkt zu einer Lösung des LS-Problems:

$$\nabla f(\mathbf{p}) \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.26)$$

$$-2\mathbf{O}^T(\mathbf{y} - \mathbf{O}\mathbf{p}) \stackrel{!}{=} 0$$

$$-\mathbf{O}^T\mathbf{y} + \mathbf{O}^T\mathbf{O}\mathbf{p} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\mathbf{O}^T\mathbf{O}\mathbf{p} = \mathbf{O}^T\mathbf{y}$$

$$\mathbf{p} = (\mathbf{O}^T\mathbf{O})^{-1}\mathbf{O}^T\mathbf{y} \quad (4.27)$$

Es ist direkt ersichtlich, dass zur Berechnung dieser Lösung die Beobachtermatrix invertierbar sein muss. Inversen von Matrizen sind in der Mathematik zunächst jedoch nur für quadratische Matrizen definiert. Bei der Auswertung einer Messreihe eines überabgetasteten Signals wird die Beobachtermatrix in den allermeisten Fällen jedoch deutlich mehr Zeilen als Spalten haben, also nicht quadratisch sein, da die Zeilenanzahl  $m$  der Anzahl an Messwerten in einem Messintervall und die Spaltenanzahl  $n$  der Anzahl der Parameter des Parametervektors entspricht. Bei angenommenem Polynom 1. Ordnung als Modellfunktion gibt es beispielsweise nur die beiden Parameter Steigung und  $y$ -Achsenabschnitt und damit ist  $n = 2$  bei gleichzeitig bis zu mehreren hundert Messwerten pro Messintervall.

Aber auch unter den quadratischen Matrizen gibt es welche, die sich nicht invertieren lassen. Diese werden dann singuläre Matrizen genannt. Um auch Inversen von singulären quadratischen Matrizen und von rechteckigen Matrizen bilden zu können, wurde von Mathematikern das Konzept der Pseudoinversen entwickelt. Diese besitzt nicht zwingend alle mathematischen Eigenschaften einer regulären Inversen, ermöglicht aber die Invertierung rechteckiger und singulärer Matrizen. Es gilt [57, 83, 84]:

Sind die Spaltenvektoren der  $(m \times n)$ -Beobachtermatrix  $\mathbf{O}$  linear unabhängig (d.h. der Rang  $r$  entspricht genau der Spaltenzahl  $n$ ), dann ist die *Pseudoinverse* (auch Moore-Penrose-Inverse genannt) definiert durch:

$$\mathbf{O}^+ = [\mathbf{O}^T\mathbf{O}]^{-1}\mathbf{O}^T \quad (4.28)$$

Die Lösung des LS-Problems ist damit genau

$$\mathbf{p} = \mathbf{O}^+ \cdot \mathbf{y} \quad (4.29)$$

und entspricht exakt dem Ergebnis der obigen Herleitung (Gleichung (4.27)). Aus Sicht der Mathematik ist dieser Zugang zur Lösung des Minimierungsproblems allerdings wohl eher theoretischer Natur. Hierzu ein Zitat aus [57], einem Buch, das sich ausschließlich mit den verschiedenen Lösungsmöglichkeiten der Regressionsrechnung beschäftigt:

*„We emphasize that the pseudoinverse is mainly a theoretical tool for analysis of the properties of least squares problems. For numerical computations one should use methods based on orthogonal transformations and factorizations.“*

Diese Aussage ist aus allgemeiner, mathematischer Sicht sicherlich korrekt und in der notwendigen Berechnung von Gleichung (4.28) und den hierzu getroffenen Randbedingungen begründet. Die Pseudoinverse in Echtzeit zu berechnen, ist für viele Anwendungen schlicht zu aufwändig. Mit den im Zitat angesprochenen Verfahren stehen zudem auch sehr gute iterative und effiziente Methoden zur Verfügung, die zudem noch universeller lösbar sind, als die Berechnung der Pseudoinversen. Hinzu kommt noch, dass die Pseudoinverse nach Gleichung (4.28) auch nur dann berechenbar ist, wenn die Voraussetzung der linearen Unabhängigkeit der Spaltenvektoren erfüllt ist. In einem allgemeinen Lösungsverfahren müsste das aber immer erst geprüft werden.

Für den speziellen Fall der Auswertung der äquidistant abgetasteten Strommesswerte in zeitlich deutlich begrenzten Messintervallen und unter der Annahme eines abschnittsweise linearen Verlaufs der Ströme liegen die Voraussetzungen für eine Verwendung der Pseudoinversen allerdings sehr günstig. Im folgenden Abschnitt wird die Messmethodik für diesen speziellen Anwendungsfall und daraus resultierend die entsprechende Modellfunktion, die Beobachtermatrix und der Parametervektor hergeleitet. Es wird außerdem gezeigt, dass die Elemente der Pseudoinversen in diesem speziellen Fall sogar analytisch und ohne Matrizenoperationen berechenbar sind.

## **4.2 Neue effiziente Methode zur Implementierung eines Least-Squares-Filters**

### **4.2.1 Anwendung des Least-Squares-Verfahrens zur Messung von Strömen in Stromrichterschaltungen**

#### **Grundlegende Annahmen**

In vielen Anwendungen der Leistungselektronik ist eine Näherung des Zeitverlaufs der Ströme in den Induktivitäten durch zusammengesetzte Geradenabschnitte zulässig und sinnvoll (siehe Kapitel 2).

Diese Annahme ist dann gültig, wenn die Taktfrequenz des Stromrichters groß genug ist, so dass die daraus resultierende Periodendauer eines Taktes deutlich kleiner als die Zeitkonstante des durch die Induktivitäten verursachten PT1-Gliedes ist. In den meisten Stromrichterschaltungen wird ein solches Verhalten schon alleine durch das Design der Schaltung sichergestellt, damit das Arbeitsprinzip einer Variation des Mittelwerts des Stromes durch Variation der relativen Einschaltdauer der Leistungshalbleiter überhaupt ermöglicht wird. Üblich sind hierbei (für einen nicht-lückenden Betrieb) Vorgaben für die Schwankungsbreite der Ströme während eines Taktes von etwa 20% des Nennstroms.

Eine zu kleine Schwankungsbreite des Stromes führt dazu, dass bei großen Sollwertänderungen, der neue Wert erst nach vielen Takten erreicht werden kann und somit die Dynamik der Schaltung sehr eingeschränkt ist.

Eine zu große Schwankungsbreite hingegen erhöht zwar die Dynamik, führt aber dazu, dass der Oberschwingungsgehalt des Stroms unnötig groß wird und damit auch die Verluste steigen. Darüber hinaus wird damit auch die Einhaltung der absoluten Stromobergrenzen erschwert.

Diese grundsätzliche Design-Vorgabe der Schwankungsbreite des Stromes führt zu einer entsprechenden Dimensionierung der Induktivitäten in Stromrichterschaltungen und elektrischen Maschinen, die diese Vorgabe bei Nennbedingungen gewährleistet.

In dieser Arbeit werden darum folgende Annahmen als gegeben vorausgesetzt:

1. Die Taktfrequenz des Stromrichters ist groß genug, dass eine Näherung der Ströme durch Geradenabschnitte während der einzelnen Schaltzustände des Stromrichters zulässig ist.
2. Die Zwischenkreisspannung, die durch den Stromrichter an die Maschine angelegt wird ist über den Zeitraum zweier aufeinander folgender Takte näherungsweise konstant. Dieser Zeitraum entspricht der Zeit zwischen dem ersten Messwert und dem Ende desjenigen Taktes, in dem auf Basis der gemessenen Stromsteigungen die entsprechenden Aussteuergrade gestellt wurden.
3. Die relevanten, arbeitspunktabhängigen Induktivitäten der Maschine bleiben über zwei aufeinander folgende Takte hinweg näherungsweise konstant. Taktfrequente nichtlineare Effekte wie Sättigung und Oberschwingungen werden dabei vernachlässigt.
4. Die Abtastung erfolgt in einem festen, äquidistanten zeitlichen Abstand  $T_{AD}$  und ist zudem ein ganzzahliges Vielfaches der Periodendauer des Stromrichtertakts  $T_{PWM}$ , so dass die Abtastzeitpunkte innerhalb jeder Taktperiode zu den gleichen Zeitpunkten relativ zum Takt erfolgen.
5. Die Abtastung der Strommesswerte erfolgt sehr hochfrequent, um eine deutliche Überabtastung des Strommesswertsignals sicherzustellen:

$$f_{AD} \gg f_{PWM} \quad (4.30)$$

6. Als Modulationsverfahren wird die Supersinusmodulation angenommen. Das bedeutet, dass das Trägersignal der Pulsweitenmodulation ein Dreieckssignal ist und dass die beiden Freiläufe in einem Takt jeweils identische Einschalt Dauern aufweisen und jeweils im Minimum und im Maximum des PWM-Dreieckssignals geschaltet werden.

### **Beschreibung der Messreihen des Stroms einer Drehstrommaschine**

Mit diesen Annahmen wird ein Polynom erster Ordnung als Modellfunktion für die Anwendung des LS-Verfahrens zur Messung der Stromsteigungen in einer Drehstrommaschine gewählt. Die Messwerte der einzelnen Messintervalle werden also durch Geradenstücke analytisch genähert. Die Geraden-Abschnitte der einzelnen Schaltzustände werden dabei vom Wert am Ende des Messintervalls her betrachtet, da dann als Ergebnis der Berechnung neben der Steigung der Geraden auch deren Endwert zur Verfügung steht. Für eine spätere Verwendung der Ergebnisse des LS-Verfahrens in der Adaptiven Direkten Stromregelung ist diese Betrachtung vorteilhaft. Um Variablen als solche „Endwerte“ zu kennzeichnen, wird der Buchstabe „E“ im Index verwendet.

In Abbildung 4.5 ist ein solcher Stromkurvenverlauf als roter Geradenzug dargestellt. Je nach aktuellem Schaltzustand stellt sich eine andere Steigung des Stroms ein. Bei Verwendung eines Dreieckssignals als Trägersignal sind die Schaltmuster zur Mitte der Periodendauer symmetrisch, so dass die Darstellung der halben Taktperiode ausreichend ist und aus Gründen der besseren Darstellbarkeit gewählt wurde. Damit das überabgetastete Signal den jeweiligen Schaltzuständen eindeutig zugeordnet werden kann, werden für die jeweiligen Strommesswerte die Namen der zugehörigen Schaltzustände  $S_x$  als Indizes verwendet. Die beiden grün dargestellten Schaltzustände  $S_7$  und  $S_8$  sind dabei wie in Abschnitt 2.2 beschrieben die Freilaufzustände, in denen die an den Umrichter angeschlossene Maschine kurzgeschlossen ist. Die anderen Schaltzustände sind jeweils zwei der sechs aktiven Schaltzustände des Umrichters, in denen die aus der Raumzeigermodulation bekannte Spannung an die Maschine angelegt werden (siehe hierzu auch Tabelle 2.1). In Abbildung 4.5 sind exemplarisch die beiden aktiven Schaltzustände von Sektor I,  $S_1$  und  $S_2$  eingetragen.

Da die Steigungen und Endwerte der Ströme für jeden Schaltzustand separat identifiziert werden sollen (siehe Abschnitt 2.2), entspricht die Einschaltdauer eines Schaltzustands jeweils dem zugehörigen Messintervall. Damit das in die-

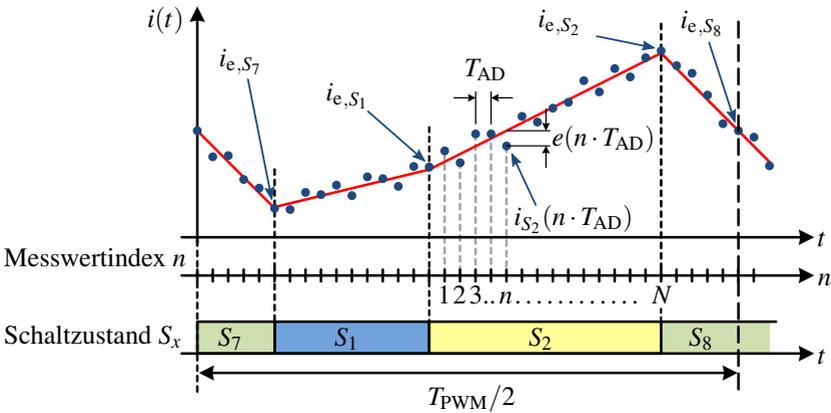


Abbildung 4.5: Idealer Stromkurvenverlauf und Messwerte während der 4 Schaltzustände einer halben PWM-Taktperiode

ser Arbeit vorgestellte LS-Verfahren korrekt angewendet werden kann, werden die einzelnen Messwerte jedes Messintervalls in zeitlich aufsteigender Reihenfolge indiziert. Dies geschieht durch den sogenannten „Messwertindex“  $n$ , der jeweils den  $n$ -ten Messwert eines Schaltzustands referenziert. Zu Beginn eines jeden Schaltzustands wird  $n$  wieder auf Null zurückgesetzt (siehe Abbildung 4.5).

$$n \in \mathbb{N} \mid n = 0 \dots N_{S_x} \quad (4.31)$$

Die gesamte Anzahl der Messwerte pro Schaltzustand wird mit  $N_{S_x}$  beschrieben:

$$N_{S_x} \in \mathbb{N} \mid 0 \dots N_{\max} \quad (4.32)$$

Je nach Einschaltdauer der einzelnen Schaltzustände variiert  $N_{S_x}$  zwischen 0, wenn der Schaltzustand in diesem Takt gar nicht eingeschaltet wird, bis hin zur maximal möglichen Anzahl  $N_{\max}$ :

$$N_{\max} = \frac{T_{PWM}/2}{T_{AD}} = \frac{f_{AD}}{f_{PWM}/2} \quad (4.33)$$

Mit den in dieser Arbeit realisierten Parametern der Taktfrequenz des Umrichters von

$$f_{\text{PWM}} = 8 \text{ kHz} \quad (4.34)$$

und einer A/D-Sample-Rate von

$$f_{\text{AD}} = 6 \text{ MS/s} \quad (4.35)$$

sind pro Schaltzustand während eines PWM-Halbtaktes beispielsweise maximal

$$N_{\text{max}} = \frac{6 \text{ MSps}}{2 \cdot 8 \text{ kHz}} = 375 \quad (4.36)$$

Messwerte zu erwarten. Läge die Einschaltdauer eines Schaltzustands  $S_x$  unter diesen Randbedingungen beispielsweise bei 50%, so wären in diesem Schaltzustand bis zu

$$N_{S_x} = \lfloor 50\% \cdot N_{\text{max}} \rfloor = \lfloor 0,5 \cdot 375 \rfloor = 187 \quad (4.37)$$

Messwerte möglich. In einer realen Implementierung werden durch Einfügen von Schutzbereichen um die Schalthandlungen herum noch einige Messwerte ausgeblendet, damit die Schalthandlung selbst nicht in die Messreihe mit aufgenommen wird. Die Zahl der Messwerte pro Schaltzustand fällt daher in der realen Implementierung etwas geringer aus als die rein über die relative Einschaltdauer berechnete (siehe hierzu auch Kapitel 5).

Die in Abbildung 4.5 angegebenen Werte beziehen sich auf das aktuelle Messintervall  $k$ , welches die Länge einer halben PWM-Periode hat. Vollständig müsste daher in allen Variablenbezeichnungen noch der Periodenindex  $k$  in den Index eingefügt werden. Da sich die folgenden Überlegungen aber ausschließlich auf Werte innerhalb dieses Intervalls beziehen, wird der Index  $k$  in diesem Abschnitt weggelassen, um die Lesbarkeit zu verbessern. An späterer Stelle, wenn es um das Zusammenspiel der aufeinander folgenden Perioden geht, wird er wieder verwendet.



Dieses Gleichungssystem kann übersichtlicher in Matrix-Notation dargestellt werden. Dabei werden der Endwert und die Steigung des Stroms ausgeklammert und in einen eigenen Vektor geschrieben.

$$\begin{pmatrix} i(1 \cdot T_{AD}) \\ i(2 \cdot T_{AD}) \\ \vdots \\ i(n \cdot T_{AD}) \\ \vdots \\ i(N \cdot T_{AD}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -(N-1) \cdot T_{AD} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -n \cdot T_{AD} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -1 \cdot T_{AD} \\ 1 & -0 \cdot T_{AD} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_E \\ \left(\frac{di}{dt}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e(1 \cdot T_{AD}) \\ e(2 \cdot T_{AD}) \\ \vdots \\ e(n \cdot T_{AD}) \\ \vdots \\ e(N \cdot T_{AD}) \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

oder noch kürzer

$$\mathbf{y}_N = \mathbf{O}_N \cdot \mathbf{p}_N + \mathbf{e}_N \quad (4.42)$$

mit

$$\mathbf{y}_N = \begin{pmatrix} i(1 \cdot T_{AD}) \\ i(2 \cdot T_{AD}) \\ \vdots \\ i(n \cdot T_{AD}) \\ \vdots \\ i(N \cdot T_{AD}) \end{pmatrix} \quad \text{Messwertvektor} \quad (4.43)$$

$$\mathbf{O}_N = \begin{pmatrix} 1 & -(N-1) \cdot T_{AD} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -n \cdot T_{AD} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -1 \cdot T_{AD} \\ 1 & -0 \cdot T_{AD} \end{pmatrix} \quad \text{Beobachtermatrix} \quad (4.44)$$

$$\mathbf{p}_N = \begin{pmatrix} i_e \\ \left( \frac{di}{dt} \right) \end{pmatrix} \quad \text{Parametervektor} \quad (4.45)$$

$$\mathbf{e}_N = \begin{pmatrix} e(1 \cdot T_{AD}) \\ e(2 \cdot T_{AD}) \\ \vdots \\ e(n \cdot T_{AD}) \\ \vdots \\ e(N \cdot T_{AD}) \end{pmatrix} \quad \text{Fehlervektor} \quad (4.46)$$

Der Messwertvektor  $\mathbf{y}_N$  enthält alle  $N$  gemessenen Werte des zugehörigen Messintervalls. Die Matrix  $\mathbf{O}$  wird analog zu Gleichung (4.14) als Beobachtermatrix bezeichnet. Sie beschreibt die grundsätzliche Struktur der Modellfunktion, die in diesem Anwendungsfall gewählt wurde. Eine ausführliche Analyse dieser Beobachtermatrix erfolgt in den nächsten Abschnitten.

Der Parametervektor  $\mathbf{p}$  enthält die gesuchten Größen Steigung und Endwert des jeweiligen Geradenabschnitts, mit denen die Modellfunktion den Messwerten bestmöglich angepasst wird. Der Fehlervektor enthält die verbleibenden Fehler zwischen der Regressionsgeraden und den Messwerten.

### Anwendung des LS-Verfahren auf Stromrichterschaltungen

Um die gesuchten Parameter des Parametervektors zu erhalten, kann nach Gleichung (4.29) die Pseudoinverse der Beobachtermatrix verwendet werden, sofern die Spaltenvektoren der Beobachtermatrix linear unabhängig sind:

$$\mathbf{p}_N = \mathbf{O}_N^+ \cdot \mathbf{y}_N \quad (4.47)$$

Da der erste Spaltenvektor in allen Elementen die konstante Zahl 1 besitzt und der zweite Spaltenvektor mit dem konstanten Inkrement  $T_{AD}$  anwächst, ist dies für alle denkbaren Messintervalle gegeben (siehe Gleichung (4.44)).

Um die Steigung und den Endwert der Stromflanke in einem Messintervall mit  $N$  Messwerte nach dem LS-Verfahren berechnen zu können, muss also die Pseudoinverse  $\mathbf{O}_N^+$  der Beobachtermatrix  $\mathbf{O}_N$  mit dem Messwertvektor  $\mathbf{y}_N$  multipliziert werden. Die Pseudoinverse der Beobachtermatrix für  $N$  Messwerte ist nach Gleichung (4.28) definiert als:

$$\mathbf{O}_N^+ = [\mathbf{O}_N^T \mathbf{O}_N]^{-1} \mathbf{O}_N^T \quad (4.48)$$

In Abschnitt 4.1 wurde bereits erwähnt, dass die Lösung des LS-Verfahrens mittels Pseudoinverse aus mathematischer Sicht eher theoretischer Natur sei und in Echtzeitanwendungen besser auf andere Verfahren, wie beispielsweise die QR-Faktorisierung oder rekursive LS-Algorithmen zurückgegriffen werden sollte. Für die vorliegende Aufgabe der Approximation der Ströme durch Geradenabschnitte in umrichter gespeisten Drehstromanwendungen jedoch sind Voraussetzungen gegeben, die eine Verwendung der Pseudoinversen nicht nur gestatten, sondern sogar für die tatsächliche Implementierung sehr günstig sind. Das liegt daran, dass die Beobachtermatrix bei dieser Anwendung ausschließlich Elemente enthält, die unabhängig von den Messwerten und nur abhängig von der Anzahl der Messwerte pro Schaltzustand sind (siehe (4.44)). Hinzu kommt, dass die Anzahl der möglichen Messwerte pro Schaltzustand ebenfalls durch die Wahl der Taktfrequenz  $f_{PWM}$  und der Abtastrate des A/D-Wandlers  $f_{AD}$  nach oben begrenzt ist (siehe (4.33)). Die Pseudoinverse der Beobachtermatrix kann deshalb offline für jede mögliche Schaltzustandsdauer

und damit für jede mögliche Messintervalllänge  $N \in \mathbb{N} | 1 \dots N_{\max}$  vorausberechnet werden. Eine online-Berechnung nach Gleichung (4.48) ist aufgrund der notwendigen Matrizenoperationen zu rechenaufwändig, aber aufgrund der Möglichkeit der offline-Vorausberechnung auch nicht notwendig. Insgesamt existieren dann  $N_{\max}$  Pseudoinversen  $\mathbf{O}_{N_{\max}}^+$ , die als Lookup-Tabelle im Speicher der Signalverarbeitungshardware abgelegt werden können:

$$\text{LUT}_{\text{PSI}} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_1^+ \\ \mathbf{O}_2^+ \\ \vdots \\ \mathbf{O}_N^+ \\ \vdots \\ \mathbf{O}_{N_{\max}}^+ \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Da die Beobachtermatrix für  $N$  Messwerte  $\mathbf{O}_N$  eine  $(N \times 2)$ -Matrix ist, ist die zugehörige Pseudoinverse  $\mathbf{O}_N^+$  eine  $(2 \times N)$ -Matrix (siehe (4.44) und (4.48)). Sie besteht jeweils aus zwei Zeilenvektoren  $\mathbf{E}_N$  und  $\mathbf{S}_N$ , von denen der erste die  $N$  vorausberechneten Konstanten  $E_{N,n}$  zur Berechnung des Endwerts und der zweite die  $N$  Konstanten  $S_{N,n}$  zur Berechnung der Steigung des Stroms im jeweiligen Messintervall enthält:

$$\mathbf{O}_N^+ = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_N \\ \mathbf{S}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{N,1} & E_{N,2} & \dots & E_{N,n} & \dots & E_{N,N} \\ S_{N,1} & S_{N,2} & \dots & S_{N,n} & \dots & S_{N,N} \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

Für die Berechnung des gesuchten Parametervektors nach Gleichung (4.47) müssen diese Zeilenvektoren jeweils mit dem Spaltenvektor der Messwerte multipliziert werden:

$$\mathbf{p}_N = \begin{pmatrix} i_e \\ \left(\frac{di}{dt}\right) \end{pmatrix} = \mathbf{O}_N^+ \cdot \mathbf{y}_N \quad (4.51)$$

$$\begin{pmatrix} i_e \\ \left(\frac{di}{dt}\right) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} E_{N,1} & \dots & E_{N,n} & \dots & E_{N,N} \\ S_{N,1} & \dots & S_{N,n} & \dots & S_{N,N} \end{pmatrix}}_{\text{Konstanten aus Lookup-Tabelle}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} i(1 \cdot T_{AD}) \\ \vdots \\ i(n \cdot T_{AD}) \\ \vdots \\ i(N \cdot T_{AD}) \end{pmatrix}}_{\text{Messwerte}} \quad (4.52)$$

Es ist also lediglich je ein Skalarprodukt für den Endwert und eines für die Steigung zu berechnen:

$$i_e = E_{N,1} \cdot i(1 \cdot T_{AD}) + \dots + E_{N,n} \cdot i(n \cdot T_{AD}) + \dots \\ \dots + E_{N,N} \cdot i(N \cdot T_{AD}) \quad (4.53)$$

$$\left(\frac{di}{dt}\right) = S_{N,1} \cdot i(1 \cdot T_{AD}) + \dots + S_{N,n} \cdot i(n \cdot T_{AD}) + \dots \\ \dots + S_{N,N} \cdot i(N \cdot T_{AD}) \quad (4.54)$$

Diese beiden Skalarprodukte werden im Betrieb während der laufenden Messung sukzessive in Echtzeit berechnet: sobald ein neuer Messwert  $i(n \cdot T_{AD})$  vom A/D-Wandler bereitgestellt wird, wird er mit der zugehörigen Konstante  $E_{N,n}$ , beziehungsweise  $S_{N,n}$  multipliziert und zu dem Ergebnis des Produkts aus vorhergehendem Messwert  $i((n-1) \cdot T_{AD})$  mit den zugehörigen Konstanten  $E_{N,n-1}$ , beziehungsweise  $S_{N,n-1}$  addiert. Es ist also in der Zeit zwischen zwei Messwerten lediglich eine Multiplikation und eine Addition auszuführen.

Diese Rechenoperation erfordert sehr geringen Rechenaufwand und kann in einem FPGA leicht innerhalb eines FPGA-Taktes durchgeführt werden. Es sind mit diesem Verfahren keine weiteren Matrizenoperationen wie bei der QR-Zerlegung oder Iterationsschleifen oder gar Divisionen wie bei diversen rekursiven LS-Verfahren notwendig. Sobald der letzte Messwert eines Messintervalls mit seiner entsprechenden Konstanten multipliziert und addiert wurde, steht das Ergebnis in Form von nach dem LS-Verfahren gefiltertem Endwert und Steigung zur Verfügung. Die Latenz des Algorithmus *nach* dem letzten Messwert ist dadurch minimal und sollte bei Implementierung in einem FPGA nicht mehr als einen FPGA-Takt in Anspruch nehmen müssen.

Die Anzahl der zu erwartenden Messwerte  $N$  muss für dieses Verfahren allerdings im Voraus bekannt sein. Da die Schaltzustandsdauern und damit die Messintervalllängen durch die Vorgabe der Aussteuergrade zum Taktbeginn ohnehin festgelegt ist, eignet sich dieses Verfahren ausgezeichnet für die Anwendung in Stromrichterschaltungen.

#### **Look-up-Tabelle der vorausberechneten Pseudoinversen**

Der große Vorteil dieses Verfahrens ist der geringe Rechenaufwand im Betrieb und die extrem kurze Latenz nachdem der letzte Messwert digital gewandelt wurde. Erkauft wird diese Schlankheit und Schnelligkeit durch die Look-up-Tabelle in der die vorausberechneten Pseudoinversen gespeichert sind. Da darin sämtliche Pseudoinversen für alle möglicherweise vorkommenden Messintervall-Längen  $N$  gespeichert werden müssen, ist deren Speicherbe-

darf nicht zu unterschätzen. Eine detaillierte Darstellung von Gleichung (4.49) macht den Speicherbedarf deutlich:

$$\text{LUT}_{\text{PSI}} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{1,1} \\ S_{1,1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} E_{2,1} & E_{2,2} \\ S_{2,1} & S_{2,2} \end{pmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \begin{pmatrix} E_{N,1} & E_{N,2} & \cdots & E_{N,n} & \cdots & E_{N,N} \\ S_{N,1} & S_{N,2} & \cdots & S_{N,n} & \cdots & S_{N,N} \end{pmatrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \begin{pmatrix} E_{N_{\max},1} & E_{N_{\max},2} & \cdots & E_{N,n} & \cdots & \cdots & \cdots & E_{N_{\max},N_{\max}} \\ S_{N_{\max},1} & S_{N_{\max},2} & \cdots & S_{N,n} & \cdots & \cdots & \cdots & S_{N_{\max},N_{\max}} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

Da die Länge der einzelnen Zeilenvektoren gerade der Anzahl der zu verarbeitenden Messwerte entspricht, kann die Gesamtzahl der Einträge, die in der Lookup-Tabelle für alle  $N_{\max}$  möglichen Messintervall-Längen notwendig sind, mit der Gaußschen Summenformel berechnet werden. Dabei muss das Ergebnis verdoppelt werden, da ja jede Pseudoinverse zwei Zeilen besitzt.

$$\frac{N_{\max}}{2} \cdot (N_{\max} + 1) \cdot 2 = N_{\max} \cdot (N_{\max} + 1) \quad (4.56)$$

Wird diese Zahl mit der verwendeten Wortbreite der Einträge von  $w_{\text{PSI}}$  bit multipliziert, ergibt sich der notwendige Speicherbedarf zur Speicherung der Lookup-Tabelle:

$$M_{\text{PSI}} = N_{\max} \cdot (N_{\max} + 1) \cdot w_{\text{PSI}} \text{ bit} \quad (4.57)$$

Mit  $N_{\max} = 375$  (siehe (4.36)) sind das 141 000 Einträge in der Lookup-Tabelle: 70 500 für alle  $E_{N,n}$  und 70 500 für alle  $S_{N,n}$ .

Bei einer angenommenen Wortlänge der gespeicherten Konstanten von 32 bit benötigt die Lookup-Tabelle

$$M_{\text{PSI}} = 375 \cdot (375 + 1) \cdot 32 \text{ bit} = 4\,512\,000 \text{ bit} = 4,512 \text{ Mbit} \quad (4.58)$$

an Speicherplatz. In vorangegangenen Arbeiten [19][1] wurde dieses Verfahren bereits in dieser Form angewendet und für die Speicherung der Lookup-Tabelle mit den Pseudoinversen wurde ein externer SRAM-Speicher-Baustein verwendet. Auf dem zur Messwertverarbeitung eingesetzten FPGA (ein Cyclone III EP3C25 der Firma Altera) wäre für eine solch große Lookup-Tabelle neben dem restlichen Programmcode schlicht auch kein Platz. Selbst auf dem in dieser Arbeit verwendeten, deutlich moderneren FPGA der 4. Generation (Altera Cyclone IV EP4CE40F23C6) ist neben dem restlichen Programmcode noch lange nicht ausreichend Platz für eine solch große Lookup-Tabelle.

Aus diesen Gründen wurde in dieser Arbeit im Zusammenhang mit der Implementierung des LS-Verfahrens die Struktur der Pseudoinversen in den Lookup-Tabellen noch etwas näher untersucht und zwei wesentliche Eigenschaften festgestellt:

1. Die Elemente der Pseudoinversen sind auch ohne Matrizenoperationen direkt analytisch berechenbar. In diesen Gleichungen sind allerdings Divisionen enthalten, so dass eine Berechnung jeder einzelnen  $n$ -ten Konstanten in der Zeit zwischen zwei Messwerten in einem FPGA zu lange dauert um die Echtzeitfähigkeit zu gewährleisten.
2. Die Elemente der Zeilenvektoren  $\mathbf{E}_N$  und  $\mathbf{S}_N$  der jeweiligen Pseudoinversen besitzen eine Struktur, die es erlaubt, aufbauend auf dem ersten Wert  $E_{N,1}$ , bzw.  $S_{N,1}$  die restlichen Elemente  $E_{N,n} \dots E_{N,N}$ , bzw.  $S_{N,n} \dots S_{N,N}$  mittels einfacher Addition zu berechnen.

Dadurch schrumpft bei gleichbleibender Genauigkeit und Leistungsfähigkeit des LS-Verfahrens der Speicherbedarf der Lookup-Tabelle auf etwa 1% der bislang eingesetzten, vollständigen Lookup-Tabelle nach Gleichung (4.55). Die nähere Analyse und damit die Herleitung des neuen, Speicher sparenden Verfahrens wird im folgenden Abschnitt behandelt.

## 4.2.2 Analyse der Pseudoinversen der Beobachtermatrix

### Analytische Berechnung der Pseudoinversen

Um die Pseudoinverse der Beobachtermatrix näher analysieren und deren Struktur verstehen zu können, wird sie auf den folgenden Seiten Schritt für Schritt analytisch berechnet. Sie ist definiert als (siehe (4.48)):

$$\mathbf{O}_N^+ = [\mathbf{O}_N^T \mathbf{O}_N]^{-1} \mathbf{O}_N^T \quad (4.59)$$

mit der Beobachtermatrix (siehe (4.44))

$$\mathbf{O}_N = \begin{pmatrix} 1 & -(N-1) \cdot T_{AD} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -n \cdot T_{AD} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -1 \cdot T_{AD} \\ 1 & -0 \cdot T_{AD} \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

Zunächst wird nun die transponierte Beobachtermatrix  $\mathbf{O}_N^T$  benötigt. Zur besseren Darstellung wird diese zuvor noch mit der Substitution

$$\mathbf{b} = -T_{AD} \quad (4.61)$$

vereinfacht:

$$\mathbf{O}_N = \begin{pmatrix} 1 & (N-1) \cdot \mathbf{b} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \cdot \mathbf{b} \\ 1 & 0 \cdot \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

Die transponierte Beobachtermatrix ist damit:

$$\mathbf{O}_N^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ (N-1)\mathbf{b} & (N-2)\mathbf{b} & \cdots & 2\mathbf{b} & 1\mathbf{b} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

Im nächsten Schritt wird nun das Matrizenprodukt  $\mathbf{O}_N^T \mathbf{O}_N$  berechnet (siehe (4.59)). Da zu dieser Berechnung mehrere Schritte notwendig sind, wird die Hilfsmatrix  $\mathbf{A}_N$  eingeführt:

$$\mathbf{A}_N = \mathbf{O}_N^T \mathbf{O}_N \quad (4.64)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ (N-1)\mathbf{b} & \cdots & \mathbf{1b} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & (N-1) \cdot \mathbf{b} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mathbf{1} \cdot \mathbf{b} \\ 1 & 0 \cdot \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (4.66)$$

Die vier Elemente der Matrix  $\mathbf{A}_N$  sind hierbei

$$A_{11} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + \cdots + 1 \cdot 1 = \sum_{i=1}^N 1 = N \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} A_{12} &= 1 \cdot (N-1)\mathbf{b} + \cdots + 1 \cdot 2\mathbf{b} + 1 \cdot \mathbf{b} + 0 = \sum_{i=1}^N (i-1) \cdot \mathbf{b} \\ &= \frac{N}{2} (N-1)\mathbf{b} \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} A_{21} &= 1 \cdot (N-1)\mathbf{b} + \cdots + 1 \cdot 2\mathbf{b} + 1 \cdot \mathbf{b} + 0 = \sum_{i=1}^N (i-1) \cdot \mathbf{b} \\ &= \frac{N}{2} (N-1)\mathbf{b} = A_{12} \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} A_{22} &= [(N-1)\mathbf{b}]^2 + [(N-2)\mathbf{b}]^2 + \cdots + [2\mathbf{b}]^2 + [\mathbf{b}]^2 + [0]^2 \\ &= \sum_{i=1}^N [(i-1)\mathbf{b}]^2 = \sum_{i=0}^{N-1} [i \cdot \mathbf{b}]^2 = \mathbf{b}^2 \cdot \sum_{i=0}^{N-1} i^2 \\ &= \mathbf{b}^2 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} i^2 \end{aligned} \quad (4.70)$$

Die in Gleichung (4.70) enthaltene Partialsumme ist in der Mathematik bekannt und liefert als Ergebnis die sogenannte (N-1)-te „quadratische Pyramidalzahl“

$\text{Pyr}_{N-1}$  [85]. Die  $n$ -te quadratische Pyramidalzahl  $\text{Pyr}_n$  kann mit folgender Formel berechnet werden:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \text{Pyr}_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (4.71)$$

Für die  $(N-1)$ -te quadratische Pyramidalzahl  $\text{Pyr}_{N-1}$  folgt damit:

$$\sum_{i=1}^{N-1} i^2 = \text{Pyr}_{N-1} = \frac{(N-1)(N-1+1)(2(N-1)+1)}{6} \quad (4.72)$$

$$= \frac{(N-1)N(2N-1)}{6} \quad (4.73)$$

Mit  $\text{Pyr}_{N-1}$  kann das Element  $A_{22}$  der Matrix  $\mathbf{A}_N$  analytisch dargestellt werden:

$$A_{22} = \mathbf{b}^2 \cdot \text{Pyr}_{N-1} = \mathbf{b}^2 \cdot \frac{N(N-1)(2N-1)}{6} \quad (4.74)$$

Damit lautet das Zwischenergebnis zur Berechnung der Pseudoinversen in Form der Matrix  $\mathbf{A}_N$ :

$$\mathbf{A}_N = \mathbf{O}_N^T \mathbf{O}_N = \begin{pmatrix} N & \frac{N}{2}(N-1) \cdot \mathbf{b} \\ \frac{N}{2}(N-1) \cdot \mathbf{b} & \frac{N(N-1)(2N-1)}{6} \cdot \mathbf{b}^2 \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

Im nächsten Schritt (siehe (4.59)) muss diese Matrix invertiert werden. Um zu zeigen, dass die Inverse dieser Matrix berechnet werden kann, wird zunächst die Determinante bestimmt. Ist diese von Null verschieden, so ist  $\mathbf{A}_N$  invertierbar.

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A}_N &= A_{11} \cdot A_{22} - A_{21} \cdot A_{12} \\ &= N \cdot \frac{N(N-1)(2N-1)}{6} \cdot \mathbf{b}^2 - \left( \frac{N}{2}(N-1) \cdot \mathbf{b} \right)^2 \\ &= \frac{N^2(2N^2 - 3N + 1)}{6} \mathbf{b}^2 - \left( \frac{N^2}{4}(N^2 - 2N + 1) \mathbf{b}^2 \right) \end{aligned} \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned}
 &= b^2 \left( \frac{2N^4 - 3N^3 + 1N^2}{6} - \frac{N^4 - 2N^3 + N^2}{4} \right) \\
 &= b^2 \left( \frac{4N^4 - 6N^3 + 2N^2}{12} - \frac{3N^4 - 6N^3 + 3N^2}{12} \right) \\
 &= N \cdot \frac{1}{12} N^4 b^2 - \frac{1}{12} N^2 b^2 \\
 &= \frac{1}{12} b^2 (N^4 - N^2) > 0 \qquad \forall N \in \mathbb{N} > 1 \qquad (4.77)
 \end{aligned}$$

Damit ist ersichtlich, dass für alle Messintervalle mit mehr als einem Messwert die Inverse von  $\mathbf{A}_N$  gebildet werden kann. In der Praxis wird das durch die Wahl von  $N_{min} > 1$  sichergestellt. Für nur einen einzigen Messwert pro Messintervall macht die Anwendung eines Filteralgorithmus, der auf überabgetasteten Signalen basiert, ohnehin keinen Sinn. Die Inverse  $\mathbf{A}_N^{-1}$  wird mit Maple berechnet und ist:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_N^{-1} &= \begin{pmatrix} A_{inv,11}(N) & A_{inv,12}(N) \\ A_{inv,21}(N) & A_{inv,22}(N) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{2(2N-1)}{N(N+1)} & -\frac{6}{bN(N+1)} \\ -\frac{6}{bN(N+1)} & \frac{12}{Nb^2(N^2-1)} \end{pmatrix} \qquad (4.78)
 \end{aligned}$$

Diese Inverse wird noch einmal mit der transponierten Beobachtermatrix multipliziert (siehe (4.59) und (4.50)) und ergibt dann die gesuchte Pseudoinverse:

$$\mathbf{O}_N^+ = \mathbf{A}_N^{-1} \cdot \mathbf{O}_N^T = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_N \\ \mathbf{S}_N \end{pmatrix} \quad (4.79)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2(2N-1)}{N(N+1)} & -\frac{6}{bN(N+1)} \\ -\frac{6}{bN(N+1)} & \frac{12}{Nb^2(N^2-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ (N-1)b & (N-2)b & \cdots & (N-n)b & \cdots & 1b & 0 \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

$$= \begin{pmatrix} E_{N,1} & E_{N,2} & \cdots & E_{N,n} & \cdots & E_{N,N-1} & E_{N,N} \\ S_{N,1} & S_{N,2} & \cdots & S_{N,n} & \cdots & S_{N,N-1} & S_{N,N} \end{pmatrix} \quad (4.81)$$

Wie schon auf Seite 138 beschrieben (siehe Gleichung (4.50)), enthält der erste Zeilenvektor dabei die gesuchten Konstanten zur Berechnung des Endwerts eines Messintervalls und der zweite Zeilenvektor enthält die Konstanten zur Berechnung der Steigung.

$$\mathbf{E}_N = \begin{pmatrix} E_{N,1} & E_{N,2} & \cdots & E_{N,N-2} & E_{N,N-1} & E_{N,N} \end{pmatrix} \quad (4.82)$$

$$\mathbf{S}_N = \begin{pmatrix} S_{N,1} & S_{N,2} & \cdots & S_{N,N-2} & S_{N,N-1} & S_{N,N} \end{pmatrix} \quad (4.83)$$

Da die erste Zeile der transponierten Beobachtermatrix nur Einsen enthält, stehen bei jedem Element  $E_{N,n}$  und  $S_{N,n}$  als jeweils erster Summand die Elemente der ersten Spalte von  $\mathbf{A}_N^{-1}$ . Der zweite Summand ist das Produkt aus den Elementen der zweiten Spalte von  $\mathbf{A}_N^{-1}$  mit  $(N-n) \cdot b$ :

$$E_{N,n} = 1 \cdot A_{inv,11}(N) + (N-n)b \cdot A_{inv,12}(N) \quad (4.84)$$

$$S_{N,n} = 1 \cdot A_{inv,21}(N) + (N-n)b \cdot A_{inv,22}(N) \quad (4.85)$$

Mit den Elementen aus Gleichung (4.78) wird daraus

$$\begin{aligned} E_{N,n} &= \frac{2(2N-1)}{N(N+1)} \cdot 1 - \frac{6}{bN(N+1)} \cdot (N-n)b \\ &= \frac{2(2N-1)}{N(N+1)} - \frac{6(N-n)}{N(N+1)} \end{aligned} \quad (4.86)$$

$$S_{N,n} = -\frac{6}{bN(N+1)} \cdot 1 + \frac{12}{Nb^2(N^2-1)} \cdot (N-n)b \quad (4.87)$$

Diese Gleichungen zeigen einige wichtige Eigenschaften der Elemente der Pseudoinversen einer Beobachtermatrix mit äquidistanter Abtastung:

1. Sämtliche Elemente aller  $N$  Pseudoinversen sind mit den Gleichungen (4.86) und (4.87) direkt analytisch berechenbar. Komplexe Matrixoperationen, die durch die Struktur der ursprünglichen Gleichung (4.28) nahegelegt werden sind nicht notwendig.
2. Die Konstanten hängen direkt von der Länge des Messintervalls  $N$  ab und eine Verwendung der Konstanten eines Messintervalls der Länge  $N$  in einem Messintervall anderer Länge  $N^* \neq N$  ist nicht möglich (siehe auch (4.78)). Die jeweiligen, möglichen Messintervall-Längen  $N \in 1 \dots N_{\max}$  müssen entsprechend alle einzeln berücksichtigt werden.
3. Die Abhängigkeit von  $b$  kann als konstant während des Betriebs betrachtet werden, da  $b$  der negierten Abtastzeit entspricht und sich somit im Betrieb nicht ändert (siehe (4.61)).

### Innere Struktur der Konstantenvektoren $E_N$ und $S_N$

Die Abhängigkeit der Konstanten von dem Messwertindex  $n$  innerhalb eines Messintervalls der Länge  $N$  wird nun noch etwas näher untersucht. Aufgrund der Struktur der Beobachtermatrix mit den immer um das gleiche, konstante Inkrement  $b = -T_{AD}$  voranschreitenden Werten der zweiten Spalte, ist der Unterschied zwischen zwei aufeinanderfolgenden Elementen der Vektoren  $E_N$  und  $S_N$  wiederum konstant. Der Beweis für diese Aussage kann einfach durch

Subtraktion zweier aufeinanderfolgender Werte geführt werden. Zunächst für die Konstanten zur Berechnung der Endwerte:

$$\begin{aligned}
 \Delta E_N &= E_{N,n} - E_{N,n-1} = -\frac{6(N-n)}{N(N+1)} + \frac{6(N-(n-1))}{N(N+1)} \\
 &= \frac{-6N + 6n + 6N - 6n + 6}{N(N+1)} \\
 \Delta E_N &= \frac{6}{N(N+1)} \tag{4.88}
 \end{aligned}$$

Und genauso für die Konstanten zur Berechnung der Steigungen:

$$\begin{aligned}
 \Delta S_N &= S_{N,1n} - S_{N,1(n-1)} = \frac{12}{Nb^2(N^2-1)} b [(N-n) - (N-(n-1))] \\
 &= \frac{12}{Nb(N^2-1)} [N-n-N+n-1] = -\frac{12}{Nb(N^2-1)} \\
 \Delta S_N &= -\frac{12}{b \cdot N(N^2-1)} = +\frac{12}{T_{AD} \cdot N(N^2-1)} \tag{4.89}
 \end{aligned}$$

Die Gleichungen (4.88) und (4.89) beweisen analytisch, dass der Unterschied zwischen zwei aufeinanderfolgenden Konstanten innerhalb eines Konstantenvektors  $\mathbf{E}_N$  beziehungsweise  $\mathbf{S}_N$  für eine gegebene Messintervall-Länge  $N$  konstant ist. Diese Differenzen werden im weiteren Verlauf auch einfach als „Inkrement“ bezeichnet und sind wichtiger Bestandteil des neu vorgestellten Verfahrens. Beide Inkremente  $\Delta E_N$  und  $\Delta S_N$  hängen dabei direkt von der jeweiligen Messintervalllänge  $N$  ab. Da  $N$  jeweils im Nenner steht, werden mit steigender Messintervalllänge die Abstände der Elemente in den Vektoren  $\mathbf{E}_N$  und  $\mathbf{S}_N$  immer kleiner.

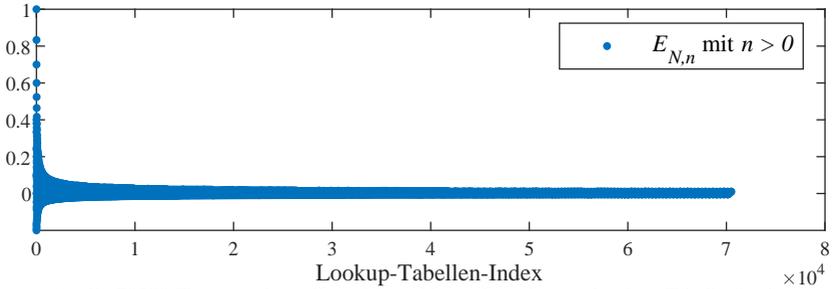
Dass die Inkremente innerhalb eines Konstantenvektors konstant sind, ist auch direkt in einer grafischen Darstellung der Lookup-Tabelle mit der vollständig darin gespeicherten Menge aller Elemente aller Pseudoinversen nach Gleichung (4.55) ersichtlich. In Abbildung 4.6 (a) ist die vollständige Lookup-Tabelle abgebildet, in der alle Konstanten zur Berechnung der Endwerte für  $N_{\max} = 375$  gespeichert sind. Die einzelnen Vektoren  $\mathbf{E}_N$  sind dabei direkt

hintereinander in der Lookup-Tabelle abgelegt. An erster Stelle in der Lookup-Tabelle steht also  $\mathbf{E}_1$ , dann  $\mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{E}_3$  bis  $\mathbf{E}_N$ . Da die Vektoren jeweils  $N$  Elemente besitzen, nehmen die Vektoren für längere Messintervalle einen größeren Indexbereich in der Lookup-Tabelle ein als die für die kürzeren Messintervalle. Die einzelnen Vektoren sind in 4.6 (a) noch nicht unterscheidbar. Lediglich das starke Abfallen des Betrags der Konstanten ist deutlich sichtbar.

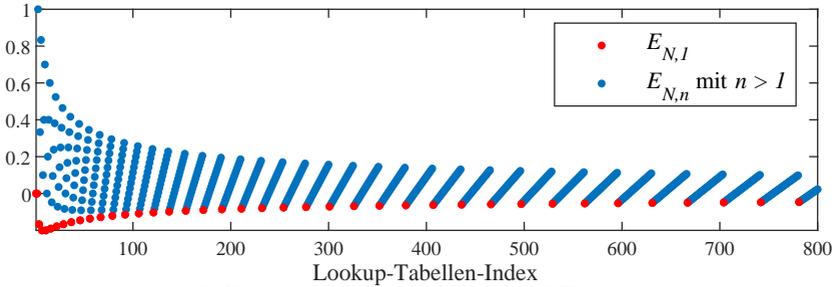
In 4.6 (b) ist ein vergrößerter Ausschnitt der ersten 800 Elemente derselben Lookup-Tabelle abgebildet. In dieser Vergrößerungsstufe sind die einzelnen Vektoren als Striche sichtbar, da sich die einzelnen Werte, als Punkte dargestellt, in dieser Vergrößerungsstufe überlappen. Die jeweils ersten Elemente  $E_{N,1}$  eines jeden Konstantenvektors  $\mathbf{E}_N$  für je eine Messintervall-Länge  $N$  sind rot dargestellt. Im weiteren Verlauf werden sie auch einfacher als „Startwerte“ bezeichnet.

In Abbildung 4.6 (c) schließlich sind die vier Konstantenvektoren  $E_{N,n}$  mit  $N = 10 \dots 13$  für die 4 Messintervalle mit  $N = 10 \dots 13$  abgebildet. In dieser Vergrößerungsstufe sind nun deutlich die konstanten Abstände zweier aufeinander folgender Konstanten innerhalb desselben Konstantenvektors zu sehen. Außerdem wird die Zunahme der Elemente in jedem Vektor deutlich, sowie auch, dass die einzelnen Startwerte jeweils unterschiedliche Werte haben und die Abstände mit steigendem  $N$  kleiner werden.

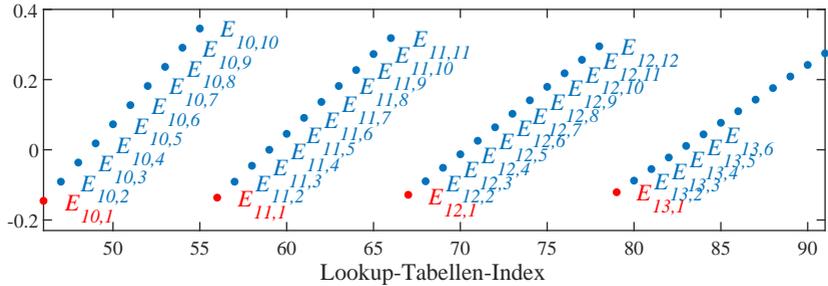
In Abbildung 4.7 ist analog zu Abbildung 4.6 die vollständige Lookup-Tabelle mit den Konstanten zur Berechnung der Steigungen für  $N_{\max} = 375$  abgebildet. Auch hier sind die einzelnen Vektoren hintereinander in der Lookup-Tabelle gespeichert. Hierbei ist die starke, hyperbolische Abnahme des Betrags der Konstanten noch viel deutlicher sichtbar, als bei den Konstanten zur Berechnung der Endwerte. Die Abbildungen 4.7 (b) und 4.7 (c) entsprechen denselben vergrößerten Ausschnitten aus der Lookup-Tabelle von Abbildung 4.7 (a) wie die Abbildungen 4.6 (b) und 4.6 (c). Die Geradenabschnitte, auf denen die Elemente jedes Konstantenvektors  $\mathbf{S}_N$  liegen, werden in 4.7 (b) erkennbar, allerdings muss hierzu der Wertebereich der ersten 100 Elemente beschnitten werden. Die jeweils ersten Elemente  $S_{N,1}$  (Startwerte) eines jeden Konstantenvektors  $\mathbf{S}_N$  für je eine Messintervall-Länge  $N$  sind wieder rot dargestellt.



(a) Alle 70500 Elemente der vollständig im Voraus berechneten Lookup-Tabelle für die Berechnung der Endwerte

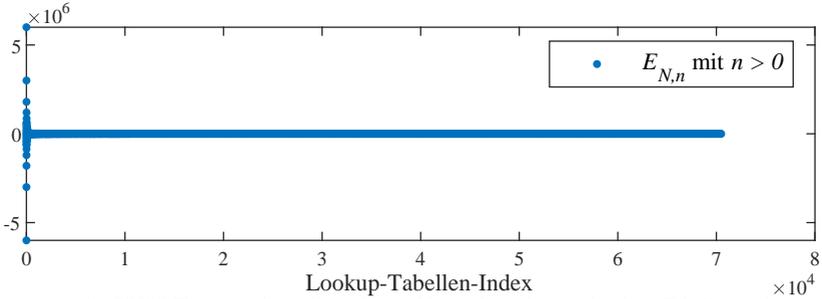


(b) Vergrößerter Ausschnitt der ersten 800 Elemente

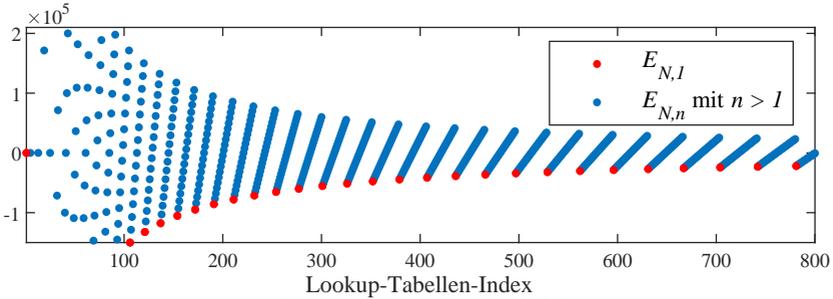


(c) stark vergrößerter Ausschnitt der Elemente 46 bis 91 der Lookup-Tabelle: das sind die vier Vektoren  $E_{N,n}$  mit  $N = 10 \dots 13$  für die vier Messintervalle mit  $N = 10 \dots 13$ .

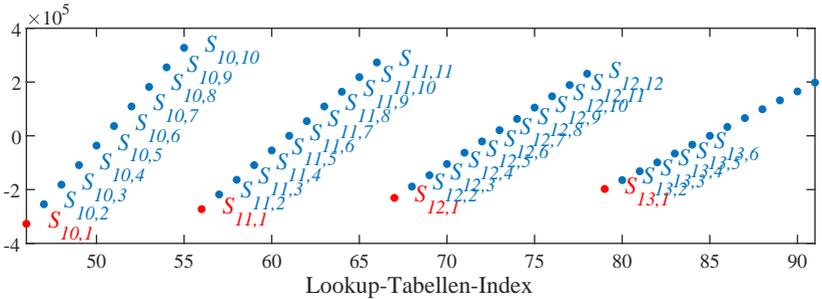
Abbildung 4.6: Detaildarstellung der Struktur der Lookup-Tabelle  $LUT_{PSI}$ , in der alle Elemente  $E_{N,n}$  zur Berechnung der **Endwerte** aller  $N$  Pseudoinversen gespeichert sind.



(a) Alle 70500 Elemente der vollständig im Voraus berechneten Lookup-Tabelle für die Berechnung der Steigungen



(b) Vergrößerter Ausschnitt der ersten 800 Elemente



(c) stark vergrößerter Ausschnitt der Elemente 46 bis 91 der Lookup-Tabelle: das sind die vier Vektoren  $S_{N,n}$  mit  $N = 10 \dots 13$  für die vier Messintervalle mit  $N = 10 \dots 13$ . Die Startwerte jedes Vektors für je eine Messintervall-Länge  $N$  sind rot dargestellt.

Abbildung 4.7: Detaildarstellung der Struktur der Lookup-Tabelle  $LUT_{PSI}$ , in der alle Elemente  $S_{N,n}$  zur Berechnung der **Steigungen** aller  $N$  Pseudoinversen gespeichert sind.

### Neue Methode der Speicherung der Pseudoinversen

Mit dem Wissen, dass zwei aufeinander folgende Elemente in den Vektoren der Pseudoinversen immer den gleichen Abstand haben, genügt es, die Startwerte

$$\begin{aligned}
 E_{N,1} &= \frac{2(2N-1)}{N(N+1)} - \frac{6(N-1)}{N(N+1)} = \frac{2(2N-1) - 6(N-1)}{N(N+1)} \\
 &= \frac{4N - 4 - 6N + 6}{N(N+1)} \\
 &= \frac{4 - 2N}{N(N+1)} \tag{4.90}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{N,1} &= -\frac{6}{bN(N+1)} \cdot 1 + \frac{12}{Nb^2(N^2-1)} \cdot (N-1)b \\
 &= -\frac{6}{bN(N+1)} + \frac{12(N-1)}{Nb(N^2-1)} \\
 &= \frac{6}{Nb} \left( -\frac{1}{(N+1)} + \frac{2(N-1)}{(N^2-1)} \right) \\
 &= \frac{6}{Nb} \left( -\frac{1}{(N+1)} + \frac{2(N-1)}{(N^2-1)} \cdot \frac{(N+1)}{(N+1)} \right) \\
 &= \frac{6}{Nb} \left( -\frac{1}{(N+1)} + \frac{2(N^2-1)}{(N^2-1)(N+1)} \right) \\
 &= \frac{6}{Nb} \left( -\frac{1}{(N+1)} + \frac{2}{(N+1)} \right) \\
 &= \frac{6}{b} \cdot \frac{1}{N(N+1)} \\
 &= -\frac{6}{T_{AD}} \cdot \frac{1}{N(N+1)} \tag{4.91}
 \end{aligned}$$

sowie die zugehörigen Inkremente

$$\Delta E_N = \frac{6}{N(N+1)} \tag{4.92}$$

$$\Delta S_N = \frac{12}{T_{AD}} \cdot \frac{1}{N(N^2-1)} \tag{4.93}$$

für alle  $N = 2 \dots N_{\max}$  offline zu berechnen und im Speicher abzulegen. Dabei ist zu beachten, dass Messintervalle mit  $N = 0$  oder  $N = 1$  durch entsprechende Abfragen vermieden werden, da dies eine Division durch Null in den Gleichungen (4.92) beziehungsweise (4.93) bedeutet. Die neue Lookup-Tabelle enthält nun nicht mehr die  $N_{\max}$  Pseudoinversen, sondern nur noch die  $N_{\max}$   $(2 \times 2)$ -Matrizen  $\mathbf{SI}_n$  mit den Startwerten und Inkrementen zur Berechnung von Endwert und Steigung für je eine Messintervall-Länge  $N$ . Die so aufgebaute Lookup-Tabelle wird daher mit dem Index „SI“ versehen:

$$\text{LUT}_{\text{SI}} = \begin{bmatrix} \mathbf{SI}_1 \\ \mathbf{SI}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{SI}_n \\ \vdots \\ \mathbf{SI}_{N_{\max}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{1,1} & \Delta E_1 \\ S_{1,1} & \Delta S_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} E_{2,1} & \Delta E_2 \\ S_{2,1} & \Delta S_2 \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} E_{n,1} & \Delta E_n \\ S_{n,1} & \Delta S_n \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} E_{N_{\max},1} & \Delta E_{N_{\max}} \\ S_{N_{\max},1} & \Delta S_{N_{\max}} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

Die Berechnung der zu verwendenden n-ten Konstanten  $E_{N,n}$  und  $S_{N,n}$  für ein Messintervall der Länge  $N$  kann damit im FPGA in Echtzeit durch einfache Addition des Inkrements zum Startwert, beziehungsweise dem Wert des vorangegangenen Abtastschritts erfolgen. Diese Berechnung kann wie auch schon das Skalarprodukt selbst, sequentiell für jeden neu zur Verfügung stehenden

Messwert erfolgen, da sie leicht innerhalb eines FPGA-Taktes abgearbeitet werden kann:

$$\begin{aligned}
 E_{N,1} &= E_{N,1} \\
 E_{N,2} &= E_{N,1} + \Delta E_N \\
 &\vdots \\
 E_{N,n} &= E_{N,n-1} + \Delta E_N = E_{N,1} + (n-1) \cdot \Delta E_N \\
 &\vdots \\
 E_{N,N} &= E_{N,N-1} + \Delta E_N = E_{N,1} + (N-1) \cdot \Delta E_N
 \end{aligned} \tag{4.95}$$

und für die Steigung:

$$\begin{aligned}
 S_{N,1} &= S_{N,1} \\
 S_{N,2} &= S_{N,1} + \Delta S_N \\
 &\vdots \\
 S_{N,n} &= S_{N,n-1} + \Delta S_N = S_{N,1} + (n-1) \cdot \Delta S_N \\
 &\vdots \\
 S_{N,N} &= S_{N,N-1} + \Delta S_N = S_{N,1} + (N-1) \cdot \Delta S_N
 \end{aligned} \tag{4.96}$$

Der Speicherbedarf ist damit, bei einer Wortbreite der einzelnen Konstanten von  $w_{SI}$  bit:

$$M_{SI} = 4N \cdot w_{SI} \text{ bit} \tag{4.97}$$

Für das in dieser Arbeit verwendete  $N_{\max} = 375$  und einer angenommenen Wortbreite von  $w_{SI} = 32$  bit beträgt der notwendige Speicher nur noch

$$M_{SI} = 4 \cdot 375 \cdot 32 \text{ bit} = 48000 \text{ bit} = 48,0 \text{ kbit} \tag{4.98}$$

Bei der herkömmlichen Methode, die Pseudoinverse komplett im Voraus zu berechnen und vollständig im Arbeitsspeicher als Lookup-Tabelle abzulegen, betrug der Speicheraufwand nach (4.58):

$$M_{\text{PSI}} = 2 \cdot \frac{N}{2} \cdot (N + 1) \cdot w_{\text{PSI}} \text{ bit} \quad (4.99)$$

$$= 4,512 \text{ Mbit} \quad \text{für } w_{\text{PSI}} = 32 \text{ bit} \quad (4.100)$$

Unter der Voraussetzung, dass die Wortlängen  $w_{\text{SI}}$  und  $w_{\text{PSI}}$  gleich lang sind, wird der Speicheraufwand bei Anwendung der vorgeschlagenen neuen Methode um den folgenden Faktor reduziert:

$$\frac{M_{\text{PSI}}}{M_{\text{SI}}} = \frac{N(N + 1)}{4N} = \frac{N + 1}{4} \quad (4.101)$$

Mit den in dieser Arbeit verwendeten, durchaus realistischen Parametern einer Taktfrequenz des Stromrichters von 8 kHz und einer AD-Wandler-Rate von 6 MSps und dem daraus resultierenden  $N_{\text{max}} = 375$  Messwerte (siehe Gleichung (4.36)), kann der notwendige Speicherbedarf bei angenommener gleicher Wortbreite der Konstanten nach Gleichung (4.101) um den Faktor

$$\frac{M_{\text{PSI}}}{M_{\text{SI}}} = \frac{375 + 1}{4} = \frac{376}{4} = 94 \quad (4.102)$$

reduziert werden.

Dies ist eine erhebliche Einsparung kostbarer Hardware-Ressourcen, welche die in den vorangegangenen Arbeiten verwendeten externen Speicherbausteine vollständig überflüssig macht.

Die Implementierung des LS-Verfahren mit der neuen Lookup-Tabelle der Anfangswerte und den zugehörigen Inkrementen, passt ohne Weiteres auf den in dieser Arbeit eingesetzten FPGA. Mehr noch, bei der Implementierung wurden vom Fitter der FPGA-Software noch nicht einmal auf die dem FPGA zur Verfügung stehenden RAM-Blöcke verwendet, sondern die Lookup-Tabelle komplett in Logikzellen implementiert. Dies wird von den Fittern oftmals dann

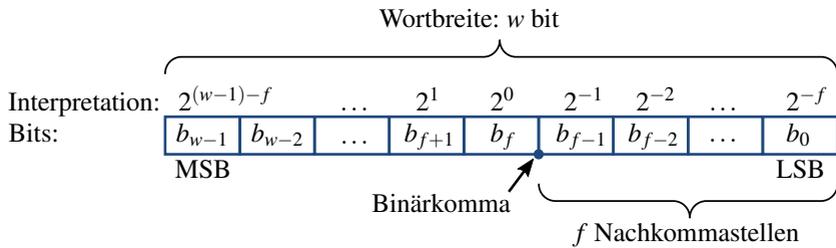


Abbildung 4.8: Struktur einer binären Festkommazahl

gemacht, wenn die Implementierung in Logikzellen effizienter ist, als in den dedizierten RAM-Blöcken, zeigt jedoch die Schlankheit der Lookup-Tabelle.

Das gesamte Least-Squares-Schätzer-Verfahren macht mit diesem neuen Algorithmus einen deutlichen Schritt in Richtung einer kostengünstigen und mit üblicher Hardware realisierbaren Umrichtersteuerung.

### 4.2.3 Quantisierungsfehler

#### Festkommadarstellung

Zur effizienten Berechnung im FPGA müssen die Werte der Pseudoinversen in eine Festkommadarstellung („fixed point“) umgewandelt werden. Zwar sind FPGAs nach dem aktuellem Stand der Technik auch in der Lage Fließkommazahlen zu verarbeiten, aber die Algorithmen, die hierbei immer noch zur Decodierung, Interpretation, Berechnung und anschließenden Codierung notwendig sind, erfordern deutlich mehr Zeit als das Rechnen mit Festkomma-Arithmetik. Liegen die Werte hingegen in Festkomma-Darstellung im Speicher, können sie wie normale binäre Integer-Zahlen bitweise verarbeitet werden, weshalb die Verarbeitung im FPGA besonders effizient und schnell erledigt werden kann. Aus diesem Grund werden in dieser Arbeit sämtliche Berechnungen im FPGA ausschließlich in Festkomma-Arithmetik durchgeführt und die Werte müssen hierfür entsprechend in das Festkomma-Format umgewandelt werden.

Die Struktur einer Festkommazahl ist in Abbildung 4.8 dargestellt. Prinzipiell entspricht dabei jedes Bit wie bei einer normalen Binärzahl dem Wert einer Zweierpotenz, die ihrer relativen Position innerhalb des Binärworts entspricht. Bei den normalen Integer-Zahlen ist dabei die Interpretation der Wertigkeit eines Wortes der Bitbreite  $w$  so gehalten, dass das Bit mit der geringsten Wertigkeit, das sogenannte „least significant bit“ (LSB) dem Zahlenwert  $2^0$  und das Bit mit der größten Wertigkeit, das „most significant bit“ (MSB) dem Zahlenwert  $2^{w-1}$  entspricht. Die kleinste darstellbare Zahl größer als Null ist demnach  $2^0 = 1$ . Dies entspricht gleichzeitig der Auflösung, die mit diesem Zahlenformat darstellbar ist. Mit diesem Format kann deshalb sehr intuitiv die Menge der ganzen Zahlen einschließlich der Null dargestellt werden, was die sehr häufige Verwendung in Zählern und Schleifensteuerungen erklärt.

Im Festkomma-Format wird nun ein gedankliches Binärkomma eingefügt (siehe Abbildung 4.8). Im Speicher des FPGAs entspricht die Zahl nach wie vor einem Binärwort, lediglich die mathematische Interpretation der einzelnen Bits ändert sich. Links des gedachten Binärkommata entsprechen die Bits wie gewohnt der Zweierpotenz ihrer relativen Position links des Binärkommata. Rechts des Binärkommata hingegen entsprechen sie nun der *negativen* Zweierpotenz ihrer relativen Position zum Binärkomma, also jeweils dem Bruchteil der entsprechenden Zweierpotenz.

Wird beispielsweise ein Binärkomma an der  $f$ -ten Stelle links des LSB eingefügt, dann entspricht das LSB einem Wert von  $2^{-f}$ . Durch Einfügen dieser  $f$  Nachkommastellen wird aber natürlich auch das höchstwertige Bit in seinem Wert beeinflusst: bei gleichbleibender Wortlänge  $w$  entspricht das MSB nur noch dem Wert  $2^{w-1-f}$ . Der Zahlenbereich einer Binär-Zahl wird durch das Binärkomma also um Zweierpotenzen verschoben.

### **Quantisierungsfehler**

Dabei entstehen durch die zwangsläufige Rundung aufgrund der begrenzten Wortbreite Quantisierungsfehler. Für die Anwendung des LS-Verfahrens bedeutet dies, dass die im Speicher abgelegten Konstanten diesen Quantisierungsfehlern unterworfen sind, und zwar sowohl bei der herkömmlichen

Methode, die Pseudoinverse komplett im Voraus zu berechnen, als auch nach der vorgeschlagenen neuen Methode der online-Berechnung durch Addition des jeweiligen Inkrements zum zugehörigen Startwert.

Der maximale Quantisierungsfehler bei der herkömmlichen Methode beschränkt sich dabei auf den kleinsten darstellbaren Wert der verwendeten Festkomma-Darstellung, da jeder einzelne Wert der Pseudoinversen für sich von einer Fließkommazahl in eine Festkommazahl umgewandelt wird. Bei einer Festkomma-Darstellung mit  $f$  Nachkommastellen beträgt dieser

$$e_{Q,PSI} = e_{q,f} = 2^{-f} \quad (4.103)$$

Dieser Fehler gilt entsprechend auch für alle direkt in eine Festkommazahl umgewandelten Werte nach der neuen Methode, also für die Startwerte  $E_{N,1}$  und  $S_{N,1}$ , sowie für die jeweiligen Inkremente  $\Delta E_N$  und  $\Delta S_N$ . Dies sind allerdings ja nur die jeweils ersten Elemente und die zugehörigen Inkremente der entsprechenden Konstantenvektoren. Wie in Gleichung (4.95) und (4.96) beschrieben, werden die Konstanten durch  $n$ -malige Addition der Inkremente zu den Startwerten online im FPGA berechnet. Dadurch wird allerdings der Quantisierungsfehler des Inkrements selbst ebenfalls  $n$  mal addiert. Mit zunehmendem Messwertindex vergrößert sich der ursprüngliche Quantisierungsfehler und beträgt bei der  $n$ -ten Konstanten eines Messintervalls schlimmsten Falls:

$$e_{Q,SI}(n) = e_{Q,1} + (n-1) \cdot e_{Q,f} = n \cdot 2^{-f} \quad (4.104)$$

Durch die Multiplikation in Gleichung (4.104) wird deutlich, dass der resultierende Fehler maßgeblich vom ursprünglichen Quantisierungsfehler abhängt. Ist dieser Null, ist auch der aufsummierte Fehler Null. Gleichung (4.104) repräsentiert somit den maximal zu erwartenden Quantisierungsfehler. Auch wird in dieser Betrachtung keine eingehende Unterscheidung der verwendeten Rundungsmechanismen (beispielsweise „floor“, „ceil“, „nearest neighbor“, etc.) vorgenommen oder eine Normalverteilung des Fehlers zugrunde gelegt. Es handelt sich um eine Abschätzung des maximal denkbaren Fehlers, der schlimmsten Falls auftreten kann. Das bedeutet, dass der Wert um ein ganzes LSB vom tatsächlichen Wert abweicht.

Um die gleiche Genauigkeit zu erreichen, die auch mit einer komplett im Voraus berechneten Lookup-Tabelle sämtlicher Konstanten zu erreichen wäre, muss der Quantisierungsfehler der Startwerte und Inkremente durch Einfügen von zusätzlichen Nachkommastellen reduziert werden. Unter der Annahme, dass der Quantisierungsfehler gleichmäßig auf den Startwert und die Summe der  $n$  Inkremente aufgeteilt wird, reicht den Startwerten (als Index wird wieder „S“ verwendet) eine zusätzliche Nachkommastelle zur Halbierung ihres Quantisierungsfehlers.

Die Gesamtzahl der für diese Genauigkeit erforderlichen Nachkommastellen  $f_{\text{prec,S}}$  der Startwerte ist

$$e_{\text{Q},1} = 2^{-f_{\text{prec,S}}} \leq \frac{1}{2} e_{\text{Q},f} \quad (4.105)$$

$$2^{f_{\text{prec,S}}} \geq \frac{2}{e_{\text{Q},f}} = 2 \cdot 2^f = 2^{f+1} \quad (4.106)$$

$$f_{\text{prec,S}} \geq f + 1 \quad (4.107)$$

$$f_{\text{prec,S}} = \lceil f + 1 \rceil = f + 1 \quad \text{da } f \in \mathbb{N} \quad (4.108)$$

Die Differenz zur Nachkommastellenanzahl  $f$  der Referenz-Lookup-Tabelle entspricht den zusätzlich notwendigen Nachkommastellen  $f_{\text{add,S}}$  für die vorgeschlagene neue Implementierung mit teilweiser online-Berechnung der Konstanten bei gleichbleibender Genauigkeit:

$$f_{\text{add,S}} = f_{\text{prec,S}} - f = 1 \quad (4.109)$$

Die zusätzlichen Nachkommastellen der Inkremente (Index auch hier wieder „I“) dürfen dann in Summe ebenfalls nur die Hälfte des ursprünglichen

Quantisierungsfehler verursachen. Die Gesamtzahl der für diese Genauigkeit erforderlichen Nachkommastellen  $f_{\text{prec,I}}$  ist entsprechend

$$\begin{aligned}
 e_{Q,\Delta} &= n \cdot 2^{-f_{\text{prec,I}}} \leq \frac{1}{2} e_{q,f} \\
 2^{-f_{\text{prec,I}}} &\leq \frac{1}{2n} e_{q,f} \\
 2^{f_{\text{prec,I}}} &\geq \frac{2n}{e_{q,f}} = \frac{2n}{2^{-f}} = 2n \cdot 2^f = n \cdot 2^{f+1} \\
 f_{\text{prec,I}} &\geq \log_2(n \cdot 2^{f+1}) = \log_2(n) + \log_2(2^{f+1}) \\
 f_{\text{prec,I}} &\geq \log_2(n) + f + 1 \\
 f_{\text{prec,I}} &= \lceil \log_2(n) + f + 1 \rceil
 \end{aligned} \tag{4.110}$$

Die im Vergleich zur Referenz-Lookup-Tabelle zusätzlich benötigten Nachkommastellen sind dann

$$f_{\text{add,I}} = f_{\text{prec,I}} - f = \lceil \log_2(n) + 1 \rceil \tag{4.111}$$

Durch das Aufrunden des Zweierlogarithmus des Messwertindex kann bei kleinen Messwertindizes noch Speicher eingespart werden, indem immer erst dann eine zusätzliche Nachkommastelle für die Inkremente vorgesehen wird, wenn  $N$  die nächste Zweierpotenz überschreitet (siehe Tabelle 4.1).

Eine weitere Einsparung des notwendigen Speicherplatzes für die Lookup-Tabelle kann dadurch erreicht werden, dass für die Messung ohnehin zu kurze Messintervalle komplett ausgeblendet werden. Werden beispielsweise erst ab einer Messintervall-Länge von mindestens  $N_{\text{min}}$  Messwerten valide Ergebnisse erwartet, können die Konstanten für  $n = 1 \dots N_{\text{min}}$  in der Lookup-Tabelle schlicht weggelassen werden. In den Gleichungen (4.90)(4.91) und (4.92)(4.93) sowie auch in den Abbildungen 4.6(a) und 4.7(a) ist direkt ersichtlich, dass die Startwerte und Inkremente in Abhängigkeit der Messintervall-Länge  $N$  einen stark hyperbolischen Verlauf besitzen. Durch Verzicht auf die Nutzung der ersten  $N_{\text{min}}$  Messintervall-Längen wird somit ein erheblicher Teil der sonst notwendigen Vorkommastellen zur Darstellung der

$N >$	$f_{\text{add},1}$
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9

Tabelle 4.1: Zusätzliche Nachkommastellen zur Reduzierung des kumulativen Quantisierungsfehlers in Abhängigkeit der Anzahl der Messwerte einer Messreihe

großen Amplitude der Konstanten eingespart. Bei gleicher Wortbreite können diese unnötigen Vorkommastellen in Nachkommastellen umgewandelt werden und dadurch die Genauigkeit drastisch verbessert werden. So ist beispielsweise das Verhältnis des ersten Startwertes  $S_{N,1}$  zur Berechnung der Steigungen bei einer (ohnehin rein theoretischen) Messintervall-Länge von nur  $N = 1$  zum Startwert  $S_{N,N_{\min}}$

$$\frac{S_{1,1}}{S_{N_{\min},1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{N_{\min}(N_{\min} + 1)}{1} \tag{4.112}$$

Wird beispielsweise ein Messintervall erst als ausreichend lange betrachtet, wenn es mindestens 10 Messwerte enthält, so ist die Mindest-Messintervall-Länge  $N_{\min} = 10$  und es ist

$$\frac{S_{1,1}}{S_{N_{\min}=10,1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{110}{1} = 55 \tag{4.113}$$

Das bedeutet, dass bei Ausblenden von Messintervallen, die weniger als 10 Messwerte aufweisen, die Amplitude der zu speichernden Konstanten um den Faktor 55 kleiner ist, was einer Einsparung von  $\lceil \log_2(55) \rceil = 6$  bit im Vorkommabereich entspricht. Bei gleichbleibender Wortbreite kann demnach entsprechend die Genauigkeit um 6 bit oder um den Faktor 64 verbessert werden.

Der in Gleichung (4.101) beschriebene Vorteil durch die reduzierte notwendige Speicherkapazität wird durch den Quantisierungsfehler also etwas relativiert. Da der Quantisierungsfehler allerdings erst bei großen Messintervall-Längen relevant wird, ist allerdings zu überlegen, ob er in der Realität überhaupt von Bedeutung ist. Je länger nämlich das Messintervall wird, desto gleichmäßiger wird der Quantisierungsfehler sowohl in positive, als auch ins Negative um Null herum verteilt. Der Resultierende Gesamtfehler wird also eher kleiner. Hinzu kommt, dass das LS-Verfahren bereits ab sehr wenigen Messwerten stark konvergiert und den Fehler schlicht zusammen mit allen anderen Fehlern effektiv herausfiltert.

In der in Kapitel 5 vorgestellten Implementierung des Verfahrens wurde keine Anpassung der Nachkommastellen zur Kompensation des Quantisierungsfehlers vorgenommen. Die Ergebnisse sind dadurch allerdings nicht als schlecht zu bezeichnen. Störungen in der Strommessung selbst, verursacht durch die Schalthandlungen der hart schaltenden IGBTs der Drehstrombrückenschaltung und überlagerte mittelfrequente Schwingungen, vermutlich verursacht durch die Motoranschlusskabel, sind für ein valides Messergebnis jedenfalls wesentlich dominanter als der Quantisierungsfehler. Trotz dieser schweren Störeinflüsse liefert der vorgestellte Algorithmus dieselben Ergebnisse, wie ein in Fließkomma-Arithmetik nachträglich mit der gleichen Datenbasis verwendeter Referenz-Kurvenfit der Software Matlab (siehe Abschnitt 6).

#### **4.2.4 Alternative Implementierung ohne Lookup-Tabelle**

Die Herleitung nach Abschnitt 4.2 bietet eine weitere Möglichkeit das LS-Verfahren für die Identifikation der Stromsteigungen zu nutzen, die gänzlich ohne eine Lookup-Tabelle auskommt:

Mit den Gleichungen (4.90) (4.91) sowie (4.92) und (4.93) können die Startwerte und Inkremente für eine gegebene Messintervall-Länge direkt, analytisch berechnet werden. In den allermeisten Fällen wird die Maschinenregelung selbst (noch) nicht auf einem FPGA, sondern in einem DSP berechnet. Der aktuelle Trend geht diesbezüglich deutlich in Richtung sogenannter „System-on-Chip“-Lösungen, die sowohl einen FPGA, als auch DSP-Kerne

zur Verfügung stellen. Der Grund für die Verwendung von DSP-Kernen zur Berechnung der Maschinenregelung liegt oftmals in der einfacheren Programmierung mittels Hochsprache (z.B. C), aber auch ganz wesentlich daran, dass in einem DSP sequentieller Code mit Fließkomma-Arithmetik sehr leicht berechnet werden kann. Der Programmierer muss sich bei der Programmierung dann so gut wie keine Gedanken um Wertebereiche, Überläufe, Datenformate, korrigierende Shift-Operationen und dergleichen machen. Vor allem aber ist die Genauigkeit der Fließkommazahlen mehr als ausreichend genau, um Rundungsfehler als vernachlässigbar ausschließen zu können. Existiert aber ein solcher DSP in welchem ohnehin die Regelung und damit auch die neuen Aussteuergrade für den kommenden PWM-Takt berechnet werden, ist es ein leichtes, die Gleichungen (4.90) (4.91) sowie (4.92) und (4.93) ebenfalls im DSP zu berechnen. Für diesen stellen die Gleichungen keine besondere Herausforderung an die Rechenleistung dar und können im Vergleich zu der ursprünglich notwendigen Berechnung mittels Matrizeninvertierung sogar als einfach bezeichnet werden.

Die Alternative zur Speicherung der Startwerte und Inkremente in einer Lookup-Tabelle besteht nun darin, sie immer nur für den nächsten Takt in Abhängigkeit der von der Regelung zuvor berechneten Aussteuergrade zu berechnen. Bei einer üblichen Modulation mit „unterem“ und „oberen“ Freilauf sowie zwei aktiven Schaltzuständen wären lediglich 4 Startwerte und 4 Inkremente für die entsprechenden 4 Schaltzustandsdauern und die damit einhergehenden 4 Messintervall-Längen  $N_{S_x}$  zu berechnen und zusammen mit den Aussteuergraden an den FPGA/Modulator zu übertragen. Der Vorteil dieser Variante liegt ganz klar darin, dass der benötigte Speicherplatz der Lookup-Tabelle auf den Speicherplatz für lediglich 8 Variablen schrumpft. Einzig die zusätzliche Rechenzeit im DSP und die Übertragung der zusätzlichen 8 Werte pro Takt zu den Aussteuergraden könnte ein Engpass sein, den es von Fall zu Fall abzuwägen gilt.

## 4.3 Einordnung des Verfahrens

Das vorgestellte Verfahren entspricht im Wesentlichen dem ursprünglichen LS-Verfahren, das durch Ableitung und Umstellen des formulierten LS-Problems nach dem gesuchten Parametervektor auf die Lösung mittels der Pseudoinversen der Beobachtermatrix führte. Es ist im konkreten Anwendungsfall der Identifikation der Steigungen und Endwerte eines äquidistant abgetasteten Messsignals auf sehr einfache Weise zu implementieren. Die mathematischen Randbedingungen, die zur Bildung der Pseudoinverse vorausgesetzt werden müssen, werden aufgrund der sehr einfachen Struktur der Beobachtermatrix in dieser Anwendung für alle Messintervalllängen mit mehr als einem Messwert eingehalten. Im Betrieb ist das vorgestellte LS-Filter ein reines Skalarprodukt und damit sehr effizient in einem FPGA implementierbar.

### 4.3.1 Vergleich mit dem Savitzky-Golay-Filter

Eine ähnliche Struktur weist das sogenannte Savitzky-Golay-Filter auf. Bereits 1964 veröffentlichten Abraham Savitzky und Marcel J. E. Golay in [86] eine Methode, um Messreihen äquidistant aufgenommener Daten nach dem LS-Verfahren mit Hilfe von festen von ihnen veröffentlichten Koeffizienten sehr effizient in einem Rechner von IBM zu filtern. Das Savitzky-Golay-Filter berechnet dabei ebenfalls die Steigungen und die Absolutwerte der Messreihe, funktioniert in einigen Aspekten recht ähnlich, es existieren aber auch deutliche Unterschiede:

- Auch beim Savitzky-Golay-Filter ist im Betrieb ein Skalarprodukt aus den Koeffizienten und den Messwerten zu berechnen. Die Koeffizienten liegen dabei ebenfalls bereits vor der Messung vor.
- Der gefilterte Absolutwert entspricht dabei jedoch nicht dem Endwert, sondern dem arithmetischen Mittelwert der Messreihe.
- Die Koeffizienten des Savitzky-Golay-Filters sind sämtlich ganze Zahlen, was die Berechnung in einem FPGA zunächst sicherlich vereinfacht. Allerdings wird nach Berechnung des Skalarprodukts noch eine Division durch

einen Normierungsfaktor durchgeführt. Dies ist bei dem in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren nicht notwendig.

- Die Messintervalle des Savitzky-Golay-Filters müssen immer eine ungerade Zahl an Messwerten enthalten. Beim hier vorgestellten Verfahren kann jede beliebige Anzahl an Messwerten mit mehr als einem Messwert verarbeitet werden.

### 4.3.2 Vergleich mit rekursiven LS-Verfahren

Im Gegensatz zu rekursiven LS-Verfahren müssen bei dem in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren und beim Savitzky-Golay-Filter bereits vor Beginn der Messreihe die Anzahl der zu verarbeitenden Messwerte bekannt sein und auch die Konstanten zur Berechnung des Skalarprodukts müssen vorliegen. Beides ist aber in typischen Stromrichteranwendungen keine Einschränkung, sondern leicht zu implementieren. Im Gegenzug muss bei rekursiven LS-Verfahren eine zusätzliche Latenz nach dem letzten verfügbaren Messwert aufgrund der Iterationsschritte in Kauf genommen werden. Auch sind nicht alle rekursiven Verfahren numerisch stabil. Das hier vorgestellte Verfahren wird über die in Abschnitt 4.2.3 besprochene Quantisierungsfehler keine Fehler verstärken, da außer dem Skalarprodukt nichts weiter zu berechnen ist.

Zusammenfassend stellt das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren eine recht einfache, effiziente und sehr ressourcensparende Methode der Implementierung eines LS-Filters in einem FPGA zur Identifizierung der Endwerte und Steigungen eines äquidistant überabgetasteten Signals mit nach oben begrenzter Messintervalllänge dar.

# 5

## Realisierung der Verfahren am Prüfstand

*“Es ist nicht genug zu wissen, man muss es auch anwenden. Es ist nicht genug zu wollen, man muss es auch tun.”*

Johann Wolfgang von Goethe

### 5.1 Prüfstands Aufbau

Der in Kapitel 4 vorgestellte Algorithmus zur Stromsteigungsidentifikation sowie die Darstellung der gemessenen Stromsteigungen als Stromänderungsparameter nach Kapitel 3 wurden in einem Maschinenprüfstand am Elektrotechnischen Institut implementiert, um die Korrektheit der Theorie nachzuweisen und die Praxistauglichkeit zu testen. Hierzu wurde der „cLab-Drive“-Prüfstand des Elektrotechnischen Instituts verwendet. Dies ist ein Motoren-Prüfstand, der am ETI eigens zur Entwicklung und Validierung von Regelungsverfahren für elektrische Antriebe konzipiert und aufgebaut wurde. Die Bezeichnung „cLab“ steht abkürzend für „Control **L**aboratory“, der Zusatz „Drive“ kennzeichnet ihn als Automotive-Antriebsmotorenprüfstand und grenzt ihn von anderen Prüfständen des ETI zur Entwicklung weiterer Regelungsverfahren in anderen Anwendungsfeldern und Leistungsklassen ab. An diesem Prüfstand wurden bereits mehrere Maschinenregelungen für hoch ausgenutzte Drehstrom-Synchronmaschinen entwickelt und in Betrieb genommen [29, 31, 87–89]. Als Prüfling wurde eine anisotrope, hoch ausgenutzte Synchronmaschine verwendet. Das Blockschaltbild der Leistungselektronik-Komponenten des gesamten Prüfstandes ist in Abbildung 5.1 dargestellt.

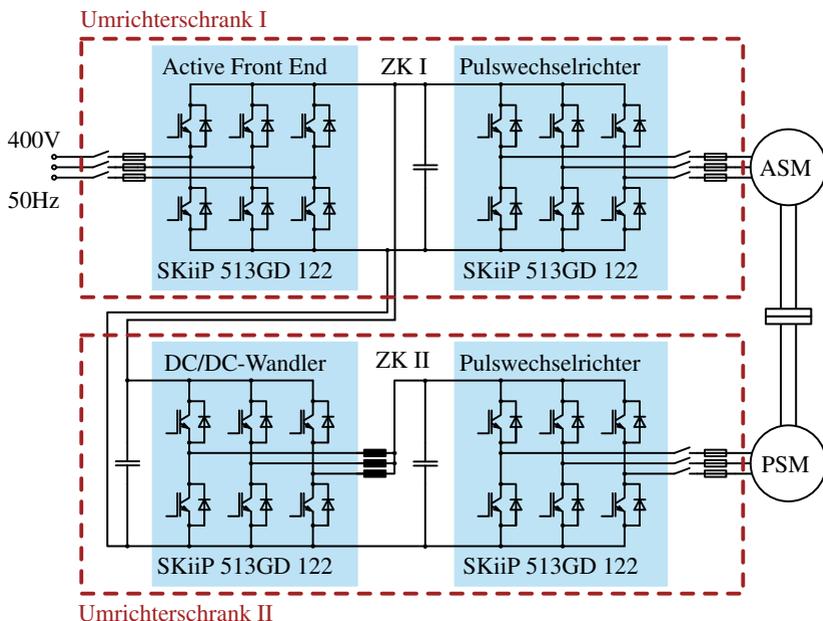


Abbildung 5.1: Übersichtsschaltbild der Leistungselektronik des Prüfstandsbaus

### 5.1.1 Leistungsteil

Der gesamte Prüfstand ist über einen dreiphasigen, aktiven und rückspeisefähigen Gleichrichter, das sogenannte „Active Front End“ (AFE), an das 400 V Drehstromnetz angeschlossen. Das AFE versorgt den ersten Zwischenkreis, in Abbildung 5.1 als „ZK I“ bezeichnet. Da sowohl der Prüfling als auch die Lastmaschine aus diesem Gleichspannungszwischenkreis versorgt werden, muss aus dem Netz lediglich die Verlustleistung der beiden Antriebe bezogen werden. Als Lastmaschine wird eine Asynchronmaschine (ASM) (Wittur 2SB 3-16.D-50I.44-1JLN-f6Z [D2, D3]) über einen Pulswechselrichter direkt am Zwischenkreis I drehzahlregelt betrieben. Die wichtigsten Kenndaten der Maschine sind in Tabelle 5.1 eingetragen.

Größe	Wert	Einheit
Nennspannung	400	V
Leistung	60	kW
Nennstrom	103	A
Nennzahl	4 000	U/min
Nennfrequenz	68,6	Hz
Max. Drehzahl	10 000	U/min
Max. Frequenz	172	Hz
$\cos \varphi$	0,93	
Polpaarzahl	2	

Tabelle 5.1: Kenndaten der Belastungsmaschine

Der für diese Arbeit verwendete Prüfling ist ein Prototyp einer 48V-Drehstrom-Synchronmaschine mit einer Nennleistung von 9 kW ( $P_{\max} = 16\text{ kW}$ ), die als Antriebsmotor eines Elektroautos entwickelt wurde. Für die Inbetriebnahme und den Nachweis der Funktion des LS-Verfahrens nach Kapitel 4 und der Darstellung der Stromänderungsparameter nach Kapitel 3 war die einzige Bedingung an den Prüfling, dass es eine anisotrope Drehstrom-Synchronmaschine sein sollte. Bei der verwendeten Maschine sind die Magnete aus mechanischen Gründen fest im Rotor eingebettet („vergrabene Magnete“), was zu einer ausreichenden Anisotropie der Luftspaltfeld-Induktivität führt. Die Induktivität in Richtung des Permanentmagnetflusses beträgt  $L_d = 72,6\mu\text{H}$ , die Induktivität senkrecht dazu ist  $L_q = 63,7\mu\text{H}$ .

Der Prüfling wird ebenfalls mit einem Pulswechselrichter angesteuert und stromgeregelt betrieben. Die Versorgung erfolgt hierbei aus dem separaten Zwischenkreis „ZK II“, dessen Gleichspannung über einen dreiphasigen Tiefsetzsteller eingestellt werden kann. Dieser wiederum ist an dem ersten Zwischenkreis angeschlossen, so dass die Spannung des zweiten Zwischenkreises zwischen der Spannung des ersten Zwischenkreises und (theoretisch) 0 V liegt.

Im Leistungsteil der Umrichter werden Drehstrombrücken-Module der Firma Semikron des Typs SKiiP513GD122 verwendet [D4, 90]. Die Nennspannung dieser Module beträgt 1200 V, die Stromtragfähigkeit liegt bei

Größe	Wert	Einheit
Nennspannung	48	V
Nennleistung	9	kW
Nennstrom	290	A
Nennzahl	750	U/min
Nennmoment	110	Nm
Max. Drehzahl	7 000	U/min
Polpaarzahl	10	
$L_d$	72,6	$\mu\text{H}$
$L_q$	63,7	$\mu\text{H}$

Tabelle 5.2: Kenndaten der anisotropen Synchronmaschine (Prüfling)

500 A Nennstrom. In diese Module sind jeweils drei einzeln ansteuerbare Halbbrückenschaltungen integriert, so dass damit sowohl eine Drehstrombrückenschaltung, als auch ein dreiphasiger Tiefsetzsteller mit versetzter Taktung realisiert werden kann. Im cLab-Prüfstand sind daher vier dieser Module in zwei 19“-Umrichterschränken verbaut. In Abbildung 5.1 sind die Drehstrombrückenmodule blau hinterlegt dargestellt. Die beiden Umrichterschränke sind durch die rot gestrichelte Umrandung skizziert.

Die vier Drehstrombrückenmodule werden alle mit einer PWM-Taktfrequenz von

$$f_{\text{PWM}} = 8 \text{ kHz} \quad (5.1)$$

betrieben. Die beiden Maschinen sind mechanisch über eine Kupplung und mit einer Drehmomentmesswelle starr verbunden.

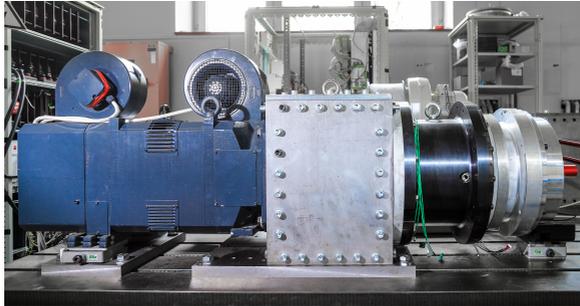


Abbildung 5.2: Foto des Maschinensatzes. Links ist die Belastungsmaschine, rechts der Prüfling.

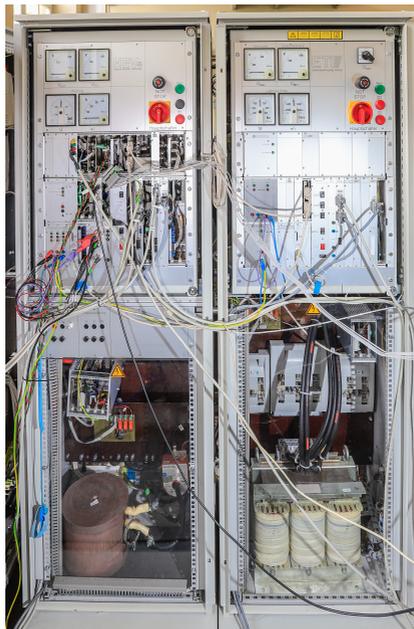


Abbildung 5.3: Foto der Prüfstandsrichter



Abbildung 5.4: Foto des gesamten Prüfstands

### 5.1.2 Signalverarbeitung und Prüfstandssteuerung

Eine Übersicht über die Signalverarbeitungskomponenten und deren Zusammenspiel ist in Abbildung 5.5 dargestellt. Die Steuerung des Prüfstands erfolgt mit einem Software-Interface am zentralen Prüfstands-PC, das neben der Vorgabe von Sollwerten auch eine Überwachung und die Erfassung und Darstellung von Messwerten erlaubt. Der Prüfstands-PC ist über USB-Anbindung an den beiden Umrichterschrank angeschlossen. Dabei hat sowohl der Umrichterschrank der Lastmaschine als auch der Umrichterschrank des Prüflings jeweils sein eigenes Signalverarbeitungs-System, dessen zentraler Rechnerbaustein ein DSP der Firma Texas Instruments ist (TMS320C6748 [D5, D6]), an den diverse Peripherie-Karten angeschlossen sind. Dies sind Platinen, die unterschiedlichste Aufgaben erfüllen können und mit einem am ETI entwickelten parallelen Datenbus, dem „ETI-Bus“ an den zentralen DSP angeschlossen sind. Im cLab-Prüfstand werden als wichtigste Peripherie-Karten Auswerteschaltungen für die Signale des Inkrementalgebers der ASM, des Resolvers der PSM, sowie der Drehmomentmesswelle verwendet. Daneben werden die Messsignale der Strom- und Spannungsmessungen in den A/D-Wandler-Karten in ein digitales Signal gewandelt. Die Schaltbefehle für die

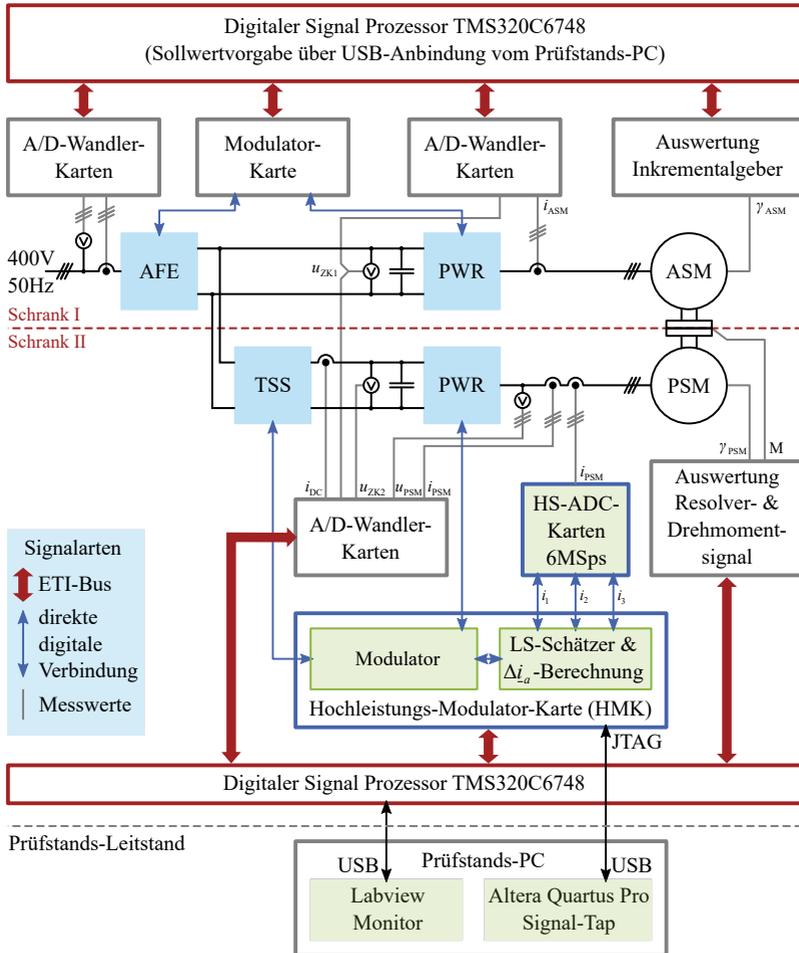


Abbildung 5.5: Prüfstands Aufbau: Signalverarbeitungscomponenten

Leistungshalbleiter werden im Modulator der jeweiligen Modulatorkarte erzeugt und als digitale Signal mit Logik-Pegel an die Gate-Treiber-Schaltungen des jeweiligen Umrichters übergeben.

## Der ETI-Bus

Der ETI-Bus ist ein paralleler Daten-Bus, der einen Datenaustausch zwischen dem zentralen DSP und den Peripherie-Modulen ermöglicht. Im cLab-Prüfstand wird er so genutzt, dass einmal pro PWM-Takt die Messwerte der verschiedenen Messgrößen an den DSP übermittelt werden. Umgekehrt übergibt der DSP die neuen Aussteuergrade ebenfalls einmal pro Takt an die Modulatorkarte. Die Datenrate auf dem ETI-Bus ist daher relativ langsam und entspricht lediglich der PWM-Taktfrequenz. Für die Berechnung des LS-Algorithmus zur Identifikation der taktfrequenten Stromsteigungen ist dieser Bus daher nicht geeignet und wird auch nicht dafür verwendet.

## FPGA-Karten

Die Modulatorkarte des ASM-Umrichters (siehe Abbildung 5.5 oben) besteht im Wesentlichen aus einem FPGA und der Bus-Anbindung an den ETI-Bus. Auf dieser Karte ist der Modulator des AFE und des ASM-Pulswechselrichters implementiert. Dieser übernimmt die von der Maschinenregelung im DSP berechneten Aussteuergrade zu Beginn jeder neuen Taktperiode und übersetzt sie in die richtigen Schaltzeitpunkte der Leistungshalbleiter. Dabei werden Sicherheitsfunktionen wie Kurzimpulsunterdrückung, Verriegelungszeit, Pulssperre, Watchdog und die prüfstandsweite Fehlerschleife ebenfalls in dieser Modulatorkarte realisiert. Die Ausgabe der Schaltzeitpunkte erfolgt als digitales Signal mit Logik-Pegel direkt an die Gate-Treiber-Schaltungen der angeschlossenen Leistungsteile.

Die FPGA-Karte des Prüflings-Umrichters ist eine Weiterentwicklung der Modulatorkarte und wird darum als „Hochleistungsmodulatorkarte“, oder kurz **HMK**, bezeichnet. Sie beinhaltet neben einem deutlich leistungsfähigeren FPGA (EP4CE40F23C6 der Firma Altera [D7, D8]) auch optionale Lichtwellenleiter-Anschlüsse und die Möglichkeit, über Steckverbindungen Peripherie-Karten direkt an den FPGA der HMK anzuschließen, ohne den Umweg über den ETI-Bus nehmen zu müssen. Dies ermöglicht eine deutlich gesteigerte Datenrate und Verarbeitungsgeschwindigkeit, was in dieser Arbeit

zur Implementierung der Überabtastung des Strommesssignals und des LS-Schätzers intensiv benutzt wurde. Die wichtigsten Kenndaten des verwendeten FPGAs sind in Tabelle 5.3 zusammengefasst.

Logik-Elemente	39 600
Speicher (in Kbits)	1 134
18x18 bit Multiplizierer	116
PLLs	4
I/O Pins	532

Tabelle 5.3: Kenndaten des verwendeten FPGAs Cyclone IV EP4CE40F23C6

Die Funktionalität des auf der HMK realisierten Modulators (dargestellt als grüner Block innerhalb der HMK in Abbildung 5.5) ist in der Standard-Konfiguration zunächst gleich wie bei der älteren Modulatorkarte und wurde im vorigen Absatz bereits beschrieben. Einige kleinere Änderungen, die spezifisch für die Realisierung des LS-Schätzers sind, werden in den folgenden Abschnitten beschrieben.

Was durch die vorliegende Arbeit vollständig neu hinzukommt, ist der innerhalb des HMK-Blocks in Abbildung 5.5 dargestellte grüne Block „LS-Schätzer &  $\Delta i_a$ -Berechnung“. In diesem Block steckt der Code zur Realisierung des in Kapitel 4 vorgestellten LS-Verfahrens und die Berechnung der Stromänderungsparameter nach Kapitel 3. Obwohl aus Platzgründen im Namen des Blocks nicht explizit darauf hingewiesen wird, so wird darin selbstverständlich auch  $\Delta i_f$  berechnet. Von allen zum Prüfstand gehörenden Signalverarbeitungskomponenten wurden für die Implementierung der Verfahren dieser Arbeit nur die Karten, die in Abbildung 5.5 mit blauem Rand gekennzeichnet sind und der zugehörige DSP des Prüflingsumrichters zur Auswertung und Übergabe der Messwerte an den Prüfstands-PC verwendet.

### Regelungskonzept des Prüflings

Die Regelung der angeschlossenen anisotropen Synchronmaschine erfolgte in dieser Arbeit noch nach den in Vorarbeiten entwickelten, Kennfeld-basierten

Regelungsverfahren. Der Fokus dieser Arbeit lag wie bereits eingangs beschrieben, mit zunehmendem Arbeitsfortschritt immer mehr auf der Entwicklung und Implementierung des neuen, effizienten LS-Verfahrens und der geschlossenen, analytischen Beschreibung und Interpretation der gemessenen Stromsteigungen. Die verwendete Regelung basiert auf den Mittelwerten der Ströme während eines PWM-Taktes. Die Strommessung für die Regelung erfolgt mit den in den Drehstrombrückenmodulen integrierten Stromwandlern. Diese werden in A/D-Wandler-Karten digitalisiert und einmal pro PWM-Takt über den ETI-Bus an den DSP übergeben. Im DSP wird der Regelungsalgorithmus ausgeführt und die berechneten Aussteuergrade wieder über den ETI-Bus an die HMK übergeben, die dann im integrierten Modulator die Ansteuerung der Halbleiter übernimmt.

Die zweimalige Benutzung des ETI-Busses stellt sich an dieser Stelle als zwar notwendiger Datenpfad zur Benutzung des DSP dar, macht aber deutlich, dass wenn die Regelung im FPGA der HMK ausgeführt werden könnte, ein ganzer Takt Latenz eingespart werden könnte. Speziell für die Anwendung eines Verfahrens wie der Adaptiven Direkten Stromregelung, das darauf basiert, dass sich die Parameter der Stromsteigungen von Takt zu Takt nicht wesentlich ändern, ist die Minimierung der Zeit zwischen dem Messzeitpunkt und dem Stellen der neuen Aussteuergrade extrem wichtig.

### **5.1.3 Messwerterfassung**

#### **Strommessung**

In den Skipp-Modulen des Prüfstands sind bereits Stromsensoren integriert, die für die bislang an diesem Prüfstand realisierten Regelungsverfahren verwendet wurden. Diese regelten alle den Mittelwert des Stroms eines PWM-Taktes. Dessen Erfassung erfolgte durch Bildung des arithmetischen Mittelwerts mehrerer Messwerte aus der Taktmitte, was für die Mittelwertregelungen völlig ausreichend war. Für die in dieser Arbeit zu lösende Aufgabe der Identifikation der Stromsteigungen war das Signal der integrierten Stromsensoren allerdings zu stark von Störungen überlagert, so dass hierfür eine separate, externe Messung der drei Phasenströme in den Zuleitungen der Maschine erfolgte. Hierfür

wurden Kompensationsstromwandler der Firma LEM mit einem Strommessbereich von  $\pm 100$  A eingesetzt (LEM LA100-P [91, D9]). Die Bandbreite dieser Stromsensoren beträgt 200 kHz, was für die Identifikation der taktfrequenten Stromsteigungen bei einer PWM-Taktfrequenz von 8 kHz ausreichend ist.

### Analog-Digital-Wandler-Karten

In den ADC-Karten werden analoge Messwertsignale mit 1,5MS/s abgetastet und in eine digitale Zahl mit einer Wortlänge von 12 bit umgewandelt. Diese Karten werden an etlichen Stellen in den beiden Umrichterschränken eingesetzt, um unterschiedlichste Messgrößen zu digitalisieren und dann über den ETI-Bus einmal pro PWM-Takt an den DSP zu übergeben. Der auf den ADC-Karten eingesetzte A/D-Wandler (THS1206 der Firma Texas Instruments [D10]) wird dabei in einem Modus betrieben, der die Digitalisierung von vier analogen Eingangssignalen mit jeweils 1,5MS/s ermöglicht.

Für die Implementierung des LS-Schätzers wird jedoch eine starke Überabtastung des Messsignals gefordert, was mit den 1,5MS/s nur für relativ lange Schaltzustandsdauern gegeben wäre und letztlich bei der angestrebten Implementierung des gesamten Verfahrens mit einer Taktfrequenz des Umrichters von 8 kHz keine ausreichend genauen Werte für die Stromsteigungen liefert. Aus diesem Grund wurde für diese Arbeit der A/D-Wandler THS1206 umkonfiguriert, so dass ein einzelner Baustein zwar nicht mehr vier, sondern nur noch ein einzelnes Messsignal digitalisieren kann, dafür aber eine Abtastrate von nun 6MS/s und die kontinuierliche Weitergabe der gewandelten Werte über eine Direktverbindung an die HMK mit ebenfalls 6MS/s ermöglicht. Der Umweg über den ETI-Bus und die damit verbundene Verzögerung wird durch die direkte Anbindung an die HMK vermieden. Die Wortbreite des digitalisierten Werts bleibt dabei unverändert bei 12 bit.

Diese Karten sind in Abbildung 5.5 als „High-Speed-A/D-Wandler-Karten“ (abgekürzt als **HS-ADC-Karten**), bezeichnet und werden ausschließlich zur Überabtastung des Strommesssignals der drei Phasenströme des Prüflings verwendet. Die HS-ADC-Karten erhalten ihr Taktsignal dabei über die Direktverbindung von der HMK. Dies sorgt für absolute Synchronität der drei

einzelnen Karten untereinander und mit der HMK. Eine zusätzliche Synchronisierung wird dadurch unnötig.

### Filterung der Strommesswerte

Das Signal des in der HMK ankommenden 6MS/s-Datenstroms der drei Phasenströme ist bis zu diesem Zeitpunkt lediglich durch das Tiefpass-Verhalten der Stromwandler in der Bandbreite begrenzt. Entsprechend ist das Strommesssignal noch stark mit hochfrequenten Störungen überlagert. Da die Messwerte aber ohnehin im FPGA vorliegen, bietet sich die Verwendung eines digitalen Filters geradezu an. Es wurde deshalb noch ein FIR-Filter 10. Ordnung mit einer Rechteck-Fenster-Funktion und einer Eckfrequenz von 200 kHz implementiert. Diese Filterstruktur entspricht einem gewichteten, gleitenden Mittelwert-Filter [92]. Die Koeffizienten hierfür wurden mit der Software „Filter Designer“ von Matlab berechnet. Die durch das Filter zusätzlich in die Messung eingebrachte Latenz  $T_{\text{Lat,FIR}}$  beträgt

$$T_{\text{Lat,FIR}} = 9T_{\text{AD}} \quad (5.2)$$

und muss in der Zuordnung der Messwerte zu den Schaltzuständen berücksichtigt werden. Ein Vergleich der im FPGA als Rohdaten verfügbaren Strommesswerte  $i_1(t)$  eines PWM-Taktes mit den zugehörigen gefilterten Werten  $i_{1,\text{FIR}}(t)$  nach dem FIR-Filter ist in Abbildung 5.6 zu sehen. Die hochfrequenten Störungen werden zuverlässig unterdrückt und durch die Möglichkeit, die Latenz in der Zuordnung zu den Schaltzuständen ohne Nachteile für den LS-Algorithmus zu kompensieren, stellt das implementierte Filter eine echte Verbesserung der Messkette dar.

### Auslesen interner FPGA-Signale

Für die Inbetriebnahme und die Verifikation des nach Kapitel 4 im FPGA implementierten LS-Schätzers ist es notwendig, Werte aus dem FPGA auszulesen, die innerhalb des FPGA zum Teil mit FPGA-Systemtakt verarbeitet werden. Dies ist deutlich schneller als dass eine Übertragung in Echtzeit zum angeschlossenen PC möglich wäre. Um dennoch die Daten auswerten zu

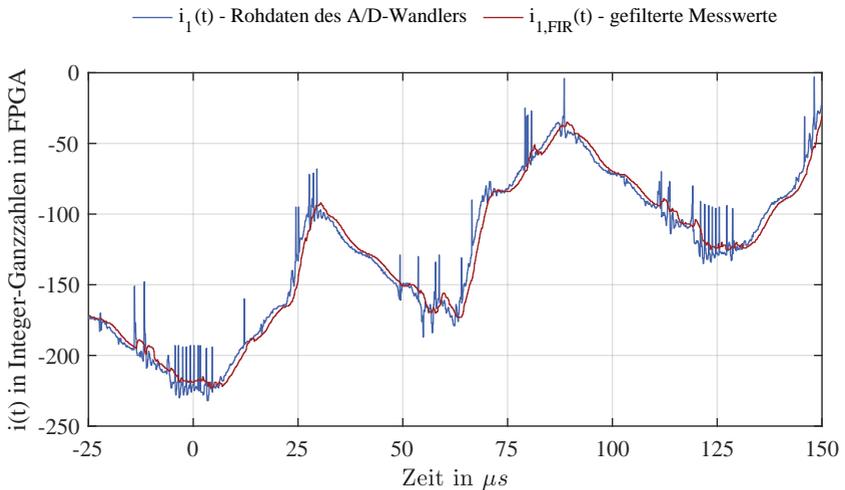


Abbildung 5.6: Messung des Phasenstromes der anisotropen Synchronmaschine am Prüfstand während eines PWM-Taktes zum Vergleich der unfilterten Strom-Messwerte  $i_1(t)$  mit den gefilterten Messwerten  $i_{1,FIR}(t)$

können, enthält die Programmierumgebung „Altera Quartus“ des FPGA das Software-Paket „SignalTap“, das zuvor festgelegte Signale bei einem ebenfalls zuvor festgelegten Trigger-Ereignis innerhalb des FPGA in Speicherzellen schreibt und dann sequentiell über die JTAG-Programmierschnittstelle des FPGA an den PC überträgt (siehe auch Abbildung 5.5). Damit können die internen FPGA-Signale wie mit einem getriggerten Oszilloskop aufgezeichnet und ausgewertet werden.

### Auslesen taktfrequenter Messwerte aus dem DSP

Um Messwerte auszulesen, die dem DSP von den unterschiedlichsten A/D-Karten zur Verfügung gestellt werden, wird das am ETI verwendete „Monitor“-Programm verwendet. Es wurde in Labview implementiert und stellt einmal pro PWM-Takt neue Daten zur Verfügung. Für die Auswertung der Stromsteigungen *innerhalb* eines Taktes wird daher SignalTap verwendet. Für längere Zeitspannen, zum Beispiel ganze Perioden der Grundschwingung der gestell-

ten Spannung, ist aber diese Möglichkeit aber ideal. Neben den Messwerten der verschiedenen Sensoren können über diesen Weg auch Variablen aus dem Regelungsalgorithmus, der im DSP berechnet wird, ausgelesen und ausgewertet werden.

## 5.2 „Timing“ – Zeitliche Ablaufsteuerung

Die korrekte zeitliche Ablaufsteuerung und die pünktliche Fertigstellung diverser Rechenergebnisse zum richtigen Zeitpunkt spielen in Echtzeitsystemen wie einer Maschinenregelung, oder wie im vorliegenden Fall, bei der bereits während des Taktes erfolgenden Stromsteigungsidentifikation eine zentrale Rolle. Es müssen hierzu nicht nur die unterschiedlichen Komponenten der Signalverarbeitung grundsätzlich synchronisiert sein, sondern auch die Messwerte zu jedem Zeitpunkt dem zugehörigen Schaltzustand zugeordnet werden können.

### 5.2.1 Zeitbasen

Zentraler Taktgeber für den Prüflings-Umrichter dieser Arbeit ist der FPGA auf der HMK. Er selbst wird mit einem Systemtakt von

$$f_{\text{FPGA}} = 120 \text{ MHz} \quad (5.3)$$

betrieben. Die zugehörige Periodendauer stellt zugleich die kürzeste, verwendete diskrete Zeitbasis  $T_{\text{FPGA}}$  dar:

$$T_{\text{FPGA}} = \frac{1}{120 \text{ MHz}} = 8,333 \text{ ns} \quad (5.4)$$

Wie bereits im vorigen Abschnitt beschrieben, wird die synchrone und kontinuierliche Analog/Digital-Wandlung der Strommesssignale der drei Phasenströme über die direkte Datenverbindungen von der HMK zu den HS-ADC-Karten mit einer Abtastrate von

$$f_{\text{AD}} = 6 \text{ MS/s} = 6 \text{ MHz} \quad (5.5)$$

sichergestellt und ebenso schnell, kontinuierlich an den FPGA übertragen. Die Zeit zwischen zwei Messwerten ist demnach

$$T_{AD} = \frac{1}{f_{AD}} = \frac{1}{6\text{MHz}} = 166,66\text{ ns} \quad (5.6)$$

Zwischen zwei Messwerten stehen im FPGA demnach exakt

$$\frac{f_{FPGA}}{f_{AD}} = \frac{120\text{MHz}}{6\text{MHz}} = 20 \quad (5.7)$$

20 Systemtakte zur Verfügung, um die Verarbeitung der Messwerte abzuschließen, bevor neue Daten zur Verarbeitung anliegen. In dieser Zeit wird das in Gleichung (4.51) beschriebene Skalarprodukt berechnet. Gleichzeitig werden die hierfür benötigten Konstanten bereits für den nächsten Messwert gemäß Gleichung (4.95) und (4.96) vorausberechnet, so dass sie zur Verfügung stehen, sobald der nächste Messwert zur Verfügung steht (siehe auch Abschnitt 5.3.2).

Die Taktfrequenz des Stromrichters wird ebenfalls vom FPGA der HMK gesteuert, indem der FPGA einmal pro PWM-Takt ein Interrupt-Signal über den ETI-Bus an den DSP und alle weiteren Busteilnehmer sendet. Damit ist über diesen Interrupt die Periodendauer der PWM festgelegt und PWM-taktfrequente Aufgaben werden zentral und synchron getriggert. Die PWM-Taktfrequenz wurde dabei bei der bereits zuvor am cLab-Prüfstand verwendeten Taktfrequenz von

$$f_{PWM} = 8\text{kHz} \quad (5.8)$$

belassen. Das Modulationsverfahren wurde, wie in Kapitel 2.2.4 beschrieben, mittels Trägerverfahren mit einem Dreieckssignal realisiert. Um dieses Dreieckssignal im Modulator zu erzeugen, wird ein Zähler in jedem Takt des FPGAs zwischen den zwei Grenzen Null und einem als  $\text{Count}_{\max}$  bezeichneten

ten Maximalwert inkrementiert, beziehungsweise dekrementiert. Damit dabei ein Dreieckssignal mit einer Periodendauer von

$$T_{\text{PWM}} = \frac{1}{f_{\text{PWM}}} = 125 \mu\text{s} \quad (5.9)$$

entsteht, beträgt das Maximum des Dreiecksignals

$$\text{Count}_{\text{max}} = \frac{f_{\text{FPGA}}}{2 \cdot f_{\text{PWM}}} = 7500 \quad (5.10)$$

Daraus ist schnell ersichtlich, dass eine Darstellung des Dreiecksignals als Treppenfunktion nur in sehr kleinen Ausschnitten realistisch ist. In den folgenden Diagrammen wird daher keine explizite Darstellung des Dreieckssignals als Treppenfunktion versucht, sondern wegen des hier verwendeten Maßstabs als Gerade dargestellt. Mit der Abtastrate der Strommesssignale von 6 MS/s ergeben sich pro PWM-Halbtakt

$$N_{\text{max}} = \frac{f_{\text{AD}}}{2 \cdot f_{\text{PWM}}} = \frac{6 \text{ MHz}}{2 \cdot 8 \text{ kHz}} = 375 \quad (5.11)$$

Messwerte für die Überabtastung. Es wird bewusst nur ein halber PWM-Takt betrachtet, da die Stromsteigungen sowohl während der steigenden, als auch während der fallenden Flanke des PWM-Trägersignals unabhängig voneinander identifiziert werden.

### 5.2.2 Latenz

Für die korrekte Zuordnung der Messwerte zu den jeweiligen ursächlichen Messzeitpunkten ist die Berücksichtigung der in einem realen System vorkommenden zeitlichen Verzögerung (Latenz) zwingend erforderlich. In Abbildung 5.7 sind zur Veranschaulichung der maßgeblichen Latenzen im oberen Bereich drei Dreieckssignale abgebildet.

Das grün dargestellte Dreieckssignal ist dabei das im Modulator realisierte Dreieckssignal  $\text{Count}_{\text{Mod}}$ , das mit den Halbbrückenaussteuergraden  $b_x$  vergli-

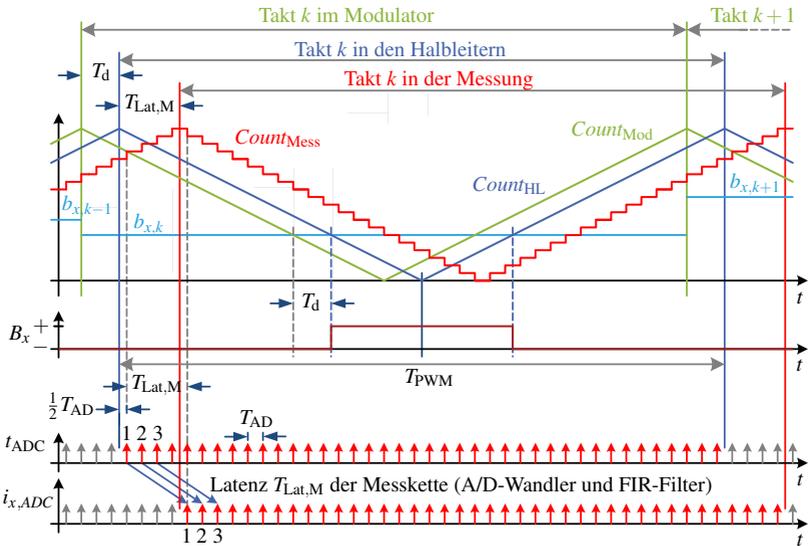


Abbildung 5.7: Darstellung der zeitlichen Verzögerung (Latenz) durch das reale Schaltverhalten der Leistungshalbleiter ( $T_d$ ) und der Messwert erfassung ( $T_{Lat,M}$ ). Die zum Takt  $k$  gehörenden Messzeitpunkte  $t_{ADC}$  und Messwerte  $i_{x,ADC}$  sind rot, die zum vorhergehenden und nachfolgenden Takt gehörenden grau dargestellt.

chen wird und die Umschaltung der drei Halbbrücken veranlasst (siehe auch Abschnitt 2.2.4). Eine Besonderheit der Implementierung des Modulators am cLab-Prüfstand ist hierbei, dass ein PWM-Takt aus historischen Gründen im Maximum des Dreieckssignals beginnt und nicht im Minimum. Für die Mittelwertbildung der Modulation an sich ist dieser Umstand jedoch unerheblich. Zwischen dem so erzeugten Kommutierungszeitpunkt im Modulator und dem tatsächlichen Kommutierungszeitpunkt in der Halbbrücke verstreicht die Verzögerungszeit  $T_d$ . Diese entsteht durch die Verzögerungszeiten der beteiligten Logik-Gatter, der Gate-Treiber-Schaltungen, der endlichen Ein-, beziehungsweise Ausschaltzeit der Leistungshalbleiter und der einzuhaltenden Verriegelungszeit zwischen dem Ausschalten des einen und dem Einschalten des anderen Halbleiterschalters einer Halbbrücke. Dabei ist im Modulator bereits eine von der Stromrichtung des Ausgangsstroms der einzelnen Halbbrücken abhängige Vorsteuerung und Kompensation der Verriegelungszeit

implementiert. Wahlweise kann auch eine pauschale Verzögerung um die halbe Verriegelungszeit eingestellt werden, was bei schlecht detektierbarer Stromrichtung vorteilhafter ist. Durch die Vorsteuerung mit Berücksichtigung der Stromrichtung des Ausgangsstrom wird im Modulator die Umschaltung der Halbbrückenspannung zum gewünschten Kommutierungszeitpunkt, verschoben um die konstante Verzögerungszeit  $T_d$  sichergestellt [E9].

Dass  $T_d$  als konstant angenommen werden kann, ist für eine zeitlich korrekte Steuerung der Messzeitpunkte zwingende Voraussetzung und führt zu dem blauen Dreieckssignal  $Count_{HL}$ , das synchron zu den Halbleiter-Schalthandlungen ist. Im Maximum dieses Signals wird der bereits erwähnte Trigger auf dem ETI-Bus ausgelöst und dadurch alle Signalverarbeitungs-komponenten synchron zur real in den Halbleitern realisierten PWM getriggert. Messungen im cLab-Prüfstand ergaben eine Verzögerungszeit von

$$T_d = 318 T_{FPGA} \quad (5.12)$$

Die HS-ADC-Karten müssen grundsätzlich nicht speziell getriggert werden, da sie so programmiert sind, dass sie die Strommesssignale kontinuierlich mit 6MS/s abtasten. Die Messzeitpunkte sollen aber ebenfalls symmetrisch zur Mitte des PWM-Taktes sein und werden daher um genau eine halbe Abtastzeit  $\frac{1}{2}T_{AD}$  des A/D-Wandlers relativ zum PWM-Trigger-Signal verschoben. Daraus ergeben sich die als  $t_{ADC}$  bezeichneten Messzeitpunkte, zu denen die A/D-Wandlung des Strommesssignals jeweils getriggert wird. In Abbildung 5.7 sind diese Triggerimpulse als Pfeile dargestellt, um deren kurze Dauer von nur einem FPGA-Takt darzustellen. Die zum Takt  $k$  gehörenden Messzeitpunkte sind dabei rot, die zum vorhergehenden und nachfolgenden Takt gehörenden sind grau dargestellt. Die ersten drei Elemente der Messwerte aus Takt  $k$  sind zusätzlich noch nummeriert um zum Einen die Verzögerung  $T_{Lat,M}$  zwischen den Messzeitpunkten und den fertigen, in eine digitale Zahl gewandelten Messwerten  $i_{x,ADC}$  deutlich zu machen. Zum Anderen werden die Messwerte in dieser Arbeit für die Steuerung des LS-Algorithmus und die richtige Zuordnung zu den Schaltzuständen tatsächlich in jedem Takt neu indiziert.

Die Latenz der Messkette wird maßgeblich von der A/D-Wandlung und der anschließenden Filterung bestimmt. Für die Umwandlung des analogen Eingangssignals in eine digitale Zahl benötigt der A/D-Wandler die Zeit  $T_{\text{Lat,ADC}}$ . Zu der Latenz des A/D-Wandlers kommt dann noch eine zwar kleine, aber dennoch vorhandene Verzögerung durch die Übertragung der Daten an die HMK und interne Gatterlaufzeiten des FPGAs hinzu. Diese Gesamtlatenz wurde am Prüfstand gemessen und beträgt

$$T_{\text{Lat,ADC}} = 6,65 T_{\text{AD}} = 133 T_{\text{FPGA}} \quad (5.13)$$

Nachdem der Messwert als digitale Zahl in der HMK zur Verfügung steht wird er noch durch das FIR-Filter geglättet, dessen Latenz  $9 T_{\text{AD}}$  beträgt (siehe Gleichung 5.2). Der Messwert des Stroms vom Messzeitpunkt  $t_{\text{ADC}}$  steht damit erst nach einer Gesamt-Verzögerung von

$$T_{\text{Lat,M}} = T_{\text{Lat,ADC}} + T_{\text{Lat,FIR}} = 15,65 T_{\text{AD}} = 313 T_{\text{FPGA}} \quad (5.14)$$

im FPGA als digitaler und gefilterter Wert  $i_{x\text{ADC}}$  zur Verfügung.

### 5.2.3 Messwertindex

Diese erneute Verzögerung führt zu der roten Treppenfunktion  $\text{Count}_{\text{Mess}}$  in Abbildung 5.7. Mit diesem Zähler werden die Messwerte in jedem Takt neu indiziert, um dadurch einen Messwertindex zu erhalten. Sobald der A/D-Wandler einen neuen Wert an die HMK übertragen hat, wird dieser Index inkrementiert und mit jedem Erreichen des Maximums, beziehungsweise auch des Minimums des Messwertindex auf Null zurückgesetzt. Dadurch werden sowohl während der steigenden Flanke, als auch während der fallenden Flanke der Modulation die Messwerte jeweils neu indiziert und die Steigungsidentifikation für beide Flanken realisiert.

Der Messwertindex ist für die Umsetzung des LS-Schätzers zwingend notwendig, da nach Gleichung (4.51) der  $n$ -te Messwert mit der zugehörigen  $n$ -ten Konstanten des jeweiligen Messintervalls multipliziert werden muss. Eine Verschiebung um nur ein Index-Inkrement führt zu massiven Fehlern im Ergebnis

der Schätzung, wie bei der Inbetriebnahme nicht ganz freiwillig beobachtet werden konnte. Ähnliche Auswirkungen hat auch eine falsch berechnete Anzahl zu erwartender Messwerte  $N$  eines Messintervalls. Die korrekte Indizierung der Messwerte ist daher für die Implementierung des LS-Schätzers sehr wichtig.

### 5.2.4 Synchronisierung der Messwerte mit den Schaltzuständen

Mit der Kenntnis der Schaltverzögerung, der Latenz des A/D-Wandlers und der nachgelagerten Filterung können die Messwerte trotz der zeitlichen Verschiebungen den Schaltzuständen innerhalb eines Taktes genau zugeordnet werden.

In Abbildung 5.8 sind die drei Phasenströme der Maschine farblich so gekennzeichnet, dass die Abschnitte des Zeitverlaufs durch die jeweilige Farbe den Schaltzuständen zugeordnet werden können. Für die Zuordnung der einzelnen Messwerte wird das im unteren Bild dargestellte Schaltzustandssignal verwendet. Für ausgeblendete Messwerte nimmt dieses Signal den Wert Null an, was in der Legende durch den fiktiven Schaltzustand  $X$  markiert ist. Das ist auch der Grund, warum das Schaltzustandssignal zwischen zwei Schaltzuständen immer kurz auf Null fällt und dann erst den nächsten Wert annimmt. In der Messung, die der Abbildung 5.8 zugrunde liegt, wurden allerdings die Schutzintervalle um die Umschaltzeitpunkte herum auf ein Minimum von lediglich einem Messwert vor und einen Messwert nach dem Umschaltzeitpunkt minimiert, um die korrekte zeitliche Zuordnung testen zu können. Wie in der Stromkurvenform deutlich zu sehen ist, werden die Flanken der einzelnen Schaltzustände zuverlässig den zugehörigen Schaltzuständen zugeordnet. Die Vorsteuerung der Kommutierungszeitpunkte im Modulator erfolgte hierbei mit dem Vorzeichenbit des FIR-gefilterten Stromsignals.

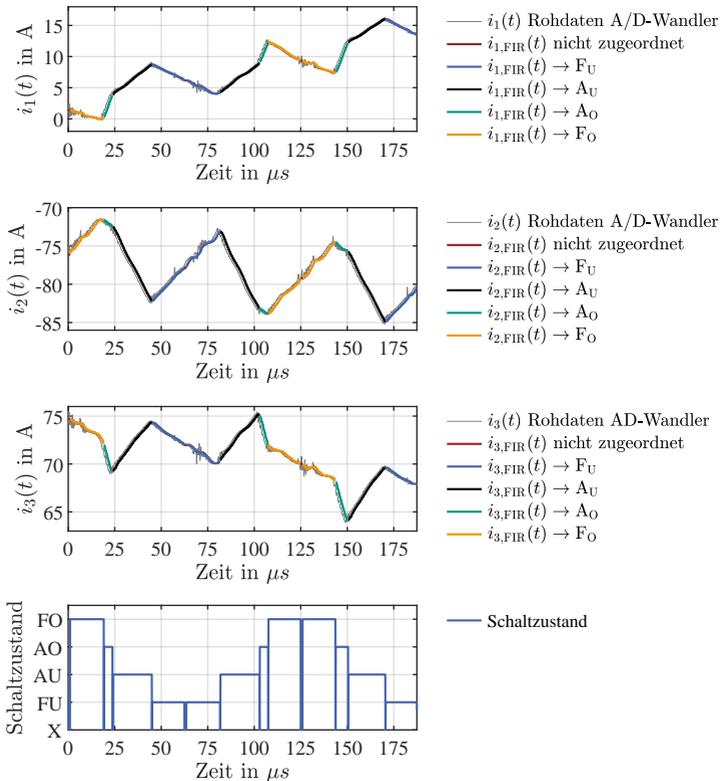


Abbildung 5.8: Synchronisierung und Zuordnung der Messwerte zu den Schaltzuständen

## 5.3 Realisierung des Algorithmus im FPGA

Durch die verschiedenen Verzögerungen ergeben sich für die Bearbeitung der Steigungsidentifikation nach Kapitel 4 verschiedene Trigger-Zeitpunkte und Bearbeitungszeiträume. Diese sind in Abbildung 5.9 dargestellt. Im cLab-Prüfstand wurde der LS-Algorithmus wie abgebildet implementiert, so dass sowohl während der fallenden, als auch während der steigenden Flanke die Endwerte und Steigungen identifiziert werden. Für die Erläuterung der einzelnen Phasen wird im Folgenden jedoch der besseren Übersicht wegen nur der

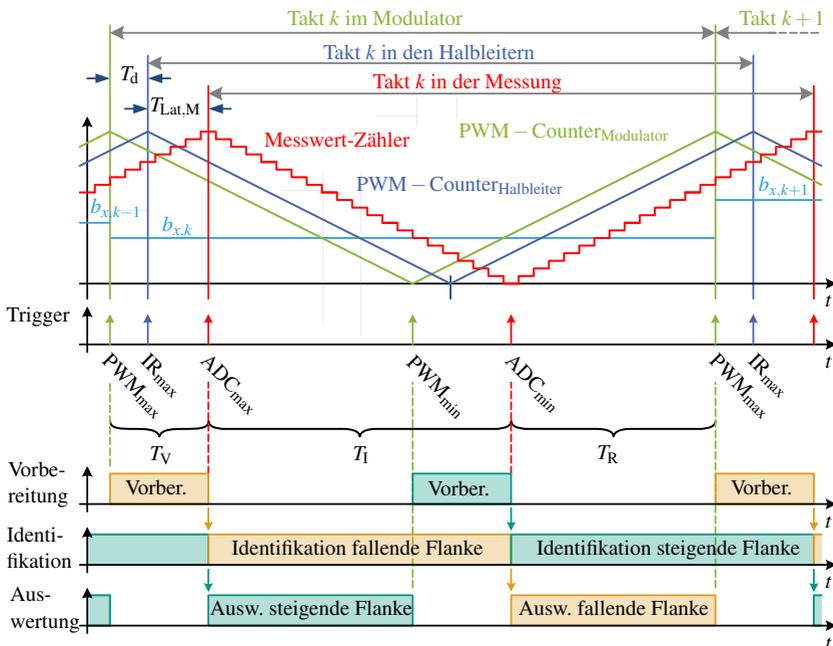


Abbildung 5.9: Darstellung der Trigger-Zeitpunkte und Bearbeitungszeiträume

Ablauf der hellbraun dargestellten Blöcke mit Beginn eines PWM-Taktes im Maximum des PWM-Dreiecksignals beschrieben.

### 5.3.1 Beginn der Taktperiode – Vorbereitungszeit $T_V$

Spätestens kurz vor Beginn einer Taktperiode  $k$  müssen die für diesen Takt geltenden Aussteuergrade von der Regelung berechnet worden sein und im Speicher des Modulators zur Verfügung stehen. Mit dem Triggersignal  $PWM_{max}$  werden diese dann in den Registern des Modulators als nun aktive und gültige Referenzsignale für den Vergleich mit dem Dreiecksignal übernommen. In Abbildung 5.9 ist dies durch den hellblau dargestellten Wechsel des Halbbrückenaussteuergrades von  $b_{x,k-1}$  auf  $b_{x,k}$  beispielhaft für einen

der drei Halbbrückenaussteuergrade dargestellt. Der Modulator beginnt sofort damit, die neuen Aussteuergrade mit dem PWM-Dreiecksignal zu vergleichen und entsprechend die neuen Schaltzeitpunkte umzusetzen.

In den Messwerten wird sich der Wechsel der Aussteuergrade aber erst nach Verstreichen der Schaltverzögerungszeit  $T_d$  und der Latenz der Messstrecke  $T_{\text{Lat},M}$  bemerkbar machen. In vielen Anwendungen ist eine solche Verzögerung unerwünscht, für die vorliegende Anwendung der Steigungsidentifikation mittels LS-Schätzer nach Kapitel 4 kann diese „Wartezeit“ auf die ersten gültigen Messwerte aus Takt  $k$  allerdings sehr sinnvoll zur Vorbereitung des LS-Schätzers genutzt werden.

Für die korrekte Verwendung des in Kapitel 4 vorgestellten LS-Verfahrens, ist die Kenntnis der Anzahl der zu verarbeitenden Messwerte  $N_{S_x}$  für jeden Schaltzustand  $S_x$  des aktuellen Taktes bereits *vor* Beginn der eigentlichen Messwertverarbeitung notwendige Voraussetzung. Sobald nun die Aussteuergrade für Takt  $k$  im FPGA bekannt sind, können daraus die Umschaltzeitpunkte und entsprechend auch die Anzahl der Messwerte für jeden Schaltzustand berechnet werden. Mit der Möglichkeit des FPGA, nebenläufige Aufgaben parallel und damit gleichzeitig zu bearbeiten [93–95], kann diese Berechnung bereits ab dem Zeitpunkt  $\text{PWM}_{\text{max}}$  begonnen werden, während das eigentliche Skalarprodukt des LS-Schätzers nach Gleichung 4.51 noch die kontinuierlich eintreffenden Messwerte aus Takt  $k - 1$  verarbeitet. Die Zeit zwischen dem Trigger  $\text{PWM}_{\text{max}}$  und dem ersten validen Messwert des Taktes  $k$  zum Zeitpunkt  $\text{ADC}_{\text{max}}$  wird darum, aus Sicht des aktuellen Taktes  $k$ , als **Vorbereitungszeit**  $T_V$  bezeichnet. Im cLab-Prüfstand betrug diese Zeit nach Messungen  $T_V = 631 T_{\text{FPGA}}$ , mehr als genug, um die in dieser Zeit anfallenden Aufgaben abzuarbeiten, welche in den folgenden Absätzen beschrieben werden.

### Sortierung der Schaltschwellen

In der Implementierung des LS-Algorithmus wurden als Signale an der Schnittstelle zur überlagerten Regelung bewusst nur die drei Halbbrückenaussteuergrade  $b_x$  gewählt. Auch der spätest mögliche Zeitpunkt der Kenntnis der Halb-

$b_x$	$\leq$	$b_x$	$\leq$	$b_x$		Sektor	$\sigma$	$g_1$	$g_2$	$g_3$
$b_1$	$\leq$	$b_2$	$\leq$	$b_3$	$\rightarrow$	I	1	$b_1$	$b_2$	$b_3$
$b_2$	$\leq$	$b_1$	$\leq$	$b_3$	$\rightarrow$	II	2	$b_2$	$b_1$	$b_3$
$b_2$	$\leq$	$b_3$	$\leq$	$b_1$	$\rightarrow$	III	3	$b_2$	$b_3$	$b_1$
$b_3$	$\leq$	$b_2$	$\leq$	$b_1$	$\rightarrow$	IV	4	$b_3$	$b_2$	$b_1$
$b_3$	$\leq$	$b_1$	$\leq$	$b_2$	$\rightarrow$	V	5	$b_3$	$b_1$	$b_2$
$b_1$	$\leq$	$b_3$	$\leq$	$b_2$	$\rightarrow$	VI	6	$b_1$	$b_3$	$b_2$

Tabelle 5.4: Abbildung der Halbbrückenaussteuergrade auf den Sektorindex und die sortierten Schaltschwellen  $g_1 \leq g_2 \leq g_3$

brückenaussteuergrade für den aktuellen Takt, nämlich der Beginn des Taktes im Modulator selbst ( $PWM_{max}$ ), war eine bewusste Design-Entscheidung. Der so implementierte LS-Algorithmus kann praktisch in allen am Elektrotechnischen Institut bestehenden Umrichter-Systemen direkt im FPGA parallel zu bestehender Software verwendet werden und benötigt keine speziellen Triggerzeitpunkte, oder weitere Daten von der Regelung. Damit ist er für etliche weitere Arbeiten kompatibel, leicht übertragbar auf andere Umrichtersysteme und besitzt dadurch einen hohen Mehrwert.

Um aus den von der Regelung zum Zeitpunkt  $PWM_{max}$  übergebenen Halbbrückenaussteuergraden die Schaltzustandsdauern und dadurch die Anzahl der zu erwartenden Messwerte  $N$  pro Schaltzustand zu berechnen, werden zunächst in einer Fallunterscheidung nach Tabelle 5.4 die drei Halbbrückenaussteuergrade auf die drei sogenannten „Schaltschwellen“  $g_x$  abgebildet, für die zu jedem Zeitpunkt gilt:

$$g_1 \leq g_2 \leq g_3 \tag{5.15}$$

Die entsprechende Abbildung ist in Tabelle 5.4 zusammengefasst. Neben den sortierten Schaltschwellen erhält man dadurch auch sofort den Sektorindex  $\sigma$ , der im FPGA für die spätere Rückrechnung aus der relativen Nomenklatur in die absoluten Schaltzustände verwendet wird.

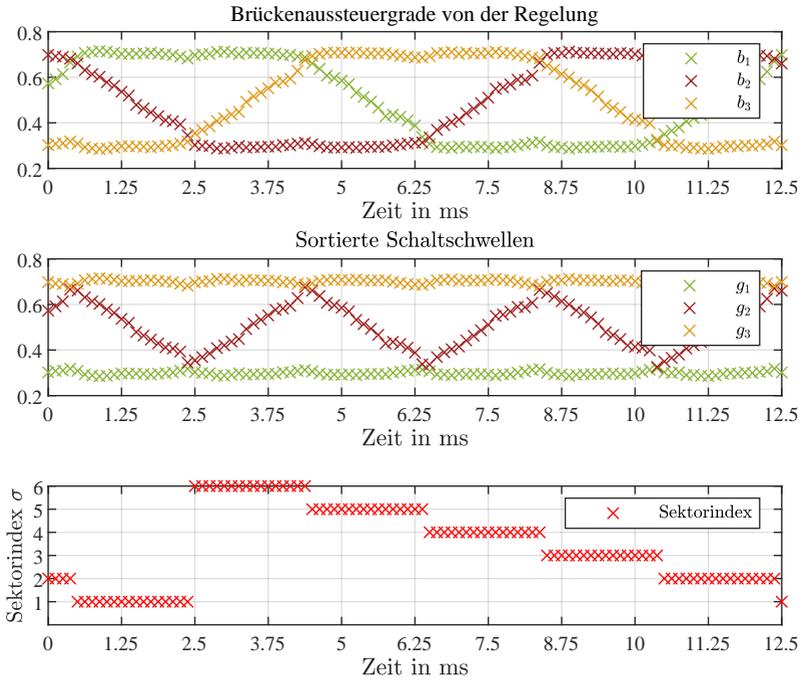


Abbildung 5.10: Aufzeichnung der Sortierung der Halbrückensteuergrade und der daraus errechneten Sektorindizes am Prüfstand bei 500 U/min,  $i_q=50$  A,  $i_d=-20$  A

### Berechnung der Schaltzustandsdauern

Die Sortierung dient zunächst der Vereinfachung bei der Berechnung der Zeiten der Schaltzustände zwischen den Schaltschwellen:

$$T_{FO} = (1 - g_3) \cdot T_{\text{PWM}} \quad (5.16)$$

$$T_{AO} = (g_3 - g_2) \cdot T_{\text{PWM}} \quad (5.17)$$

$$T_{AU} = (g_2 - g_1) \cdot T_{\text{PWM}} \quad (5.18)$$

$$T_{FU} = (g_1 - 0) \cdot T_{\text{PWM}} \quad (5.19)$$

In dieser Berechnung wird wieder die in Kapitel 2 eingeführte relative Nomenklatur der Schaltzustände (siehe Tabelle 2.5) verwendet. Die Vorteile der relativen Nomenklatur sind in dieser Berechnung direkt ersichtlich: nach der Sortierung der Schaltschwellen gilt diese Rechenvorschrift für alle sechs Sektoren gleichermaßen und kann unverändert für alle Sektoren so durchgeführt werden.

### **Berechnung der Messwertindizes der Messintervalle**

Mittels einer speziellen, eigens entwickelten Modulo-Division wird im Anschluss die Anzahl der Messwerte berechnet, die innerhalb der einzelnen Schaltzustände liegen. Damit der Algorithmus die kontinuierlich eintreffenden Messwerte den richtigen Schaltzuständen zuordnen kann, werden diese mit einem Messwertindex indiziert. Dieser wird sowohl zum Zeitpunkt  $ADC_{\max}$  als auch zum Zeitpunkt  $ADC_{\min}$  auf Null zurückgesetzt und jedes mal, wenn ein neuer Messwert zur Verfügung steht inkrementiert. Neben den berechneten Schaltzustandsdauern und der darin enthaltenen Anzahl an Messwerten wird deshalb noch für jeden Schaltzustand der erste und der letzte Messwertindex, der zu diesem Messintervall gehört berechnet. Auch diese Indizes werden in der relativen Nomenklatur mit „unterer“ und „oberer“ Wert, nun relativ zum Messwertindex, beschrieben.

Für jeden Schaltzustand gibt es einen unteren Messwertindex  $n_{\text{Low},S_x}$  und einen oberen  $n_{\text{High},S_x}$ . Während der steigenden Flanke markiert der untere Messwertindex den ersten Wert einer Messreihe und der obere den letzten. Bei der fallenden Flanke ist es genau umgekehrt: nun markiert der obere Messwertindex den ersten Wert einer Messreihe und der untere den letzten.

Die Messwerte unmittelbar vor und nach den Umschaltzeitpunkten werden nicht in der Messung berücksichtigt, da ihnen oft ein sehr hoher Störanteil überlagert ist. Dabei werden vor einem Umschaltzeitpunkt weniger Messwerte ausgeblendet, als danach, da die Störungen selten vorher auftreten und nach der Schalthandlung etwas Zeit benötigen um abzuklingen. Aus diesem Grund sind die Messzeiträume während der fallenden Flanke des PWM-Dreieckssignals zu denen während der steigenden Flanke des PWM-Dreieckssignals im Mess-

wertindex verschoben, obwohl die Aussteuergrade sich während des ganzen PWM-Taktes nicht ändern. Die Schaltzustandsdauern, die Anzahl der zu erwartenden Messwerte pro Schaltzustand und die Messwertindizes - kurz der gesamte Vorbereitungsblock - müssen daher für die fallende und für die steigende Flanke separat berechnet werden. Diese Fallunterscheidung wird intern im FPGA konsequent durchgeführt und ermöglicht die separate Anwendung des LS-Schätzers für die steigende und für die fallende Flanke der PWM-Periode. In der weiteren Erläuterung der Implementierung wird auf diesen Umstand jedoch nicht mehr explizit hingewiesen.

In den Messergebnissen des LS-Schätzers sind in den Abbildungen 6.1, 6.2 und 6.3 die Messwertindizes der einzelnen Schaltzustände eingezeichnet. In Abbildung 6.2 wurden die Schutzintervalle um die Umschaltzeitpunkte herum bewusst relativ großzügig gewählt. Hier sind im oberen Bild die Schutzintervalle und die einzelnen Messwertindizes deutlich zu sehen.

### Bereitstellung der Startwerte und Inkremente

Sind die Messwertindizes als Grenzen der Messintervalle bekannt, kann die Anzahl der zu verarbeitenden Messwerte pro Schaltzustand berechnet werden:

$$N_{F_U} = n_{\text{High},F_U} - n_{\text{Low},F_U} + 1 \quad (5.20)$$

$$N_{A_U} = n_{\text{High},A_U} - n_{\text{Low},A_U} + 1 \quad (5.21)$$

$$N_{A_O} = n_{\text{High},A_O} - n_{\text{Low},A_O} + 1 \quad (5.22)$$

$$N_{F_O} = n_{\text{High},F_O} - n_{\text{Low},F_O} + 1 \quad (5.23)$$

Mit diesen werden nun die Startwerte  $E_{N,1}$  und  $S_{N,1}$ , sowie die zugehörigen Inkremente  $\Delta E_N$  und  $\Delta S_N$  für alle vier  $N_{S_x}$  aus der Lookup-Tabelle  $LUT_{SI}$  geladen und für die Messwertverarbeitung ab dem Triggerzeitpunkt  $ADC_{\text{max}}$  bereitgestellt.

### 5.3.2 Identifikationsphase $T_I$

In dieser Phase wird das Skalarprodukt nach Gleichung (4.51) aus den kontinuierlich eintreffenden Messwerten mit ihren zugehörigen Konstanten

gebildet. Hierfür muss ein neu eintreffender Messwert mit seinen beiden Konstanten für die Steigungsberechnung und für die Endwertberechnung multipliziert werden und zum Ergebnis der vorhergehenden Multiplikation desselben Messintervalls addiert werden.

Für diese Aufgabe stehen nach Gleichung (5.7) 20 FPGA-Takte zur Verfügung. Die Verarbeitung der mit  $f_{AD}$  eintreffenden Messwerte in der Identifikationsphase kann als ein mit  $f_{AD}=6\text{ MHz}$  getakteter und sich kontinuierlich wiederholender Algorithmus verstanden werden. Lediglich die zu verarbeitenden Daten ändern sich, die Berechnungsvorschrift bleibt gleich. Um dabei Latenz durch die Berechnung der zugehörigen Konstanten auf ein Minimum zu reduzieren, werden diese immer bereits einen „Messwert-Takt“ vor dem zugehörigen Messwert durchgeführt.

Wurde also der  $n$ -te Messwert vom A/D-Wandler übermittelt, kann dieser sofort mit seinen zugehörigen Konstanten  $E_{N,n}$  und  $S_{N,n}$  multipliziert werden. Parallel dazu werden bereits die Konstanten  $E_{N,n+1}$  und  $S_{N,n+1}$  nach dem in Abschnitt 4.2.2 vorgestellten neuen Algorithmus durch Addition der Inkremente  $\Delta E_N$  und  $\Delta S_N$  zu den Startwerten  $E_{N,1}$  und  $S_{N,1}$  nach Gleichung (4.95) und (4.96) berechnet. Die Ergebnisse  $E_{N,n+1}$  und  $S_{N,n+1}$  werden dann bis zum Eintreffen des nächsten,  $(n+1)$ -ten Messwerts gespeichert und stehen dann sofort für das Skalarprodukt zur Verfügung.

Es wurde bereits im vorigen Abschnitt beschrieben, dass die korrekte Zuordnung der eintreffenden Messwerte zum jeweiligen Schaltzustand und damit zu den richtigen Konstanten nach dem LS-Algorithmus essentiell ist. Darum wird jeder Messwert ab dem Zeitpunkt  $ADC_{\max}$  bei 1 beginnend gezählt und anhand der von dem Vorbereitungsblock übergebenen Messwertindizes mit dem Messwert-Zähler verglichen und entsprechend zugeordnet. Dieser Vergleich wird auch dazu benutzt, um die Skalarprodukte nach Abarbeitung des letzten Messwerts eines Messintervalls zu speichern, so dass die Ergebnisse bereits abgearbeiteter Messintervalle nicht überschrieben werden.

### 5.3.3 Aufbereitung der geschätzten Steigungen und Endwerte – Auswertephase $T_R$

Nach dem Ende der Identifikationsphase verbleibt als restliche Zeit bis zum Beginn des neuen PWM-Taktes noch die Zeit  $T_R$ . In dieser Zeit werden die gemessenen Steigungen und Endwerte aus der Identifikationsphase weiter im FPGA aufbereitet und zum Triggerzeitpunkt  $\text{PWM}_{\max}$  über den ETI-Bus an den DSP übergeben.

Im ersten Schritt werden die Steigungen und Endwerte der drei gemessenen Phasenströme im FPGA mittels Clarke-Transformation in die komplexe  $\alpha\beta$ -Ebene transformiert [65–67]. Danach werden die mittels LS-Schätzer berechneten Endwerte der einzelnen Messintervalle vom Zeitpunkt des letzten Messwerts über den Zeitraum des gewählten Schutzintervalls hinaus auf den Kommutierungszeitpunkt umgerechnet. Dies geschieht mit den zuvor im Vorbereitungsblock berechneten Schaltzeiten, die noch nicht auf die möglichen Messzeitpunkte beschränkt waren, sondern auch noch beliebige Zwischenwerte im Rahmen der verwendeten Festkommadarstellung annehmen können. Die zu extrapolierende Zeit entspricht der Differenz zwischen dem Ende des Schaltzustands und dem Zeitpunkt des letzten Messwerts. Die benötigte Steigung für die Extrapolation wird direkt vom LS-Schätzer desselben Schaltzustands übernommen.

Aus den errechneten Steigungen werden dann die aktiven Stromänderungsparameter nach Gleichung (3.52) durch Subtraktion der Steigungen im Freilauf von den Steigungen in den aktiven Schaltzuständen und anschließender Multiplikation mit der Periodendauer  $T_{\text{PWM}}$  berechnet. Die so gewonnenen aktiven Stromänderungsparameter sind noch relativ zum PWM-Dreieckssignal für die Schaltzustände  $A_O$  und  $A_U$  angegeben. Sie werden deshalb nun auf den zum aktuellen Sektor gehörenden rechten und linken Schaltzustand  $A_R$  und  $A_L$  nach Tabelle 2.5 abgebildet. Damit wird die Berechnung des Mittelpunkt- und Radiusraumzeigers nach den Gleichungen (3.144) und (3.146) aus Abschnitt 3.3.4 möglich und deutlich vereinfacht.

Diese Berechnung liefert jeweils die  $\alpha$ - und  $\beta$ -Komponente des Mittelpunkt- und Radiusraumzeigers. In Abbildung 5.11 ist eine Messung der im FPGA be-

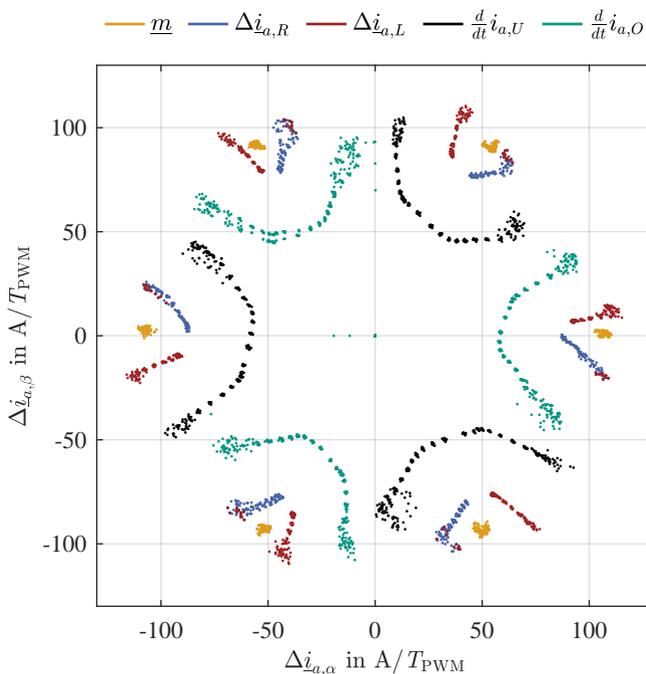


Abbildung 5.11: Messung der im FPGA berechneten Mittelpunktraumzeiger aus den gemessenen Strom-Steigungen der benutzten aktiven Schaltzustände

rechneten Mittelpunktraumzeiger in der komplexen  $\alpha\beta$ -Ebene dargestellt. Es sind hier die Ergebnisse der Steigungsidentifikation  $\frac{d}{dt}i_{a,U}$  und  $\frac{d}{dt}i_{a,O}$  mit dem LS-Schätzer aus 1 000 direkt aufeinander folgenden PWM-Takten bei einer Drehzahl des Prüfllings von 600 U/min, einem d-Strom von  $i_d = 0\text{ A}$  und einem q-Strom von  $i_q = 50\text{ A}$  aufgezeichnet.

Aus diesen gemessenen Stromsteigungen wurde dann, wie beschrieben, im FPGA noch die Stromänderungsparameter  $\Delta i_{a,R}$  und  $\Delta i_{a,L}$ , sowie die jeweils zum aktuellen Sektor gehörenden Mittelpunktraumzeiger  $\underline{m}_x$  berechnet und aufgezeichnet. Die Darstellung der Messwerte in  $\alpha\beta$ -Koordinaten entspricht genau der in Kapitel 3 vorgestellten, geometrischen Interpretation. Dass die

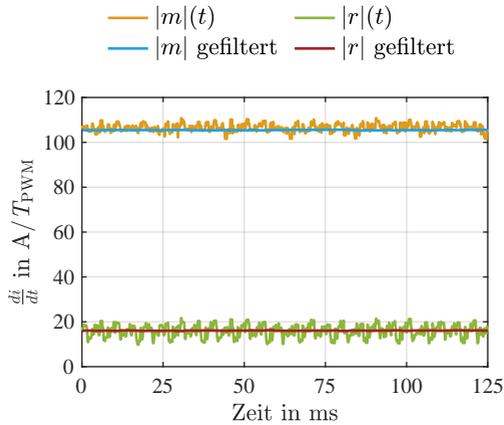


Abbildung 5.12: Filterung der Beträge der Mittelpunkt- und Radiusraumzeiger

aktiven Stromänderungsparameter dabei keine vollständigen Kreise beschreiben liegt daran, dass die Sektoren gewechselt werden, bevor die aktiven Stromänderungsparameter überall auf der Kreisbahn waren (siehe hierzu auch Abbildung 6.5).

Die Häufungen der Messwerte der Mittelpunktraumzeiger bilden deutlich ein regelmäßiges Sechseck (vergleiche hierzu Abbildung 3.7 auf Seite 90). Eine Besonderheit der relativen Nomenklatur tritt in dieser Darstellung in Erscheinung: Im Sektor I ist der Schaltzustand  $S_2$  der linke Schaltzustand, in Schaltzustand II hingegen ist er der rechte. Aus diesem Grund ist die Färbung der Stromänderungsparameter eines Schaltzustands aufgrund der relativen Nomenklatur mit rechts und links, einmal blau und einmal rot in Abbildung 5.11 abgebildet. In Relation zum PWM-Trägersignal hingegen ist der Schaltzustand  $S_2$  immer der obere aktive Schaltzustand (siehe Tabelle 2.5). In Abbildung 5.11 ist darum die gemessene Steigung in relativ zum PWM-Trägersignal angegebener Nomenklatur darum immer schwarz dargestellt.

Es ist auch gut zu erkennen, dass die Ungenauigkeit der Steigungsidentifikation an den Sektorengrenzen aufgrund der kurzen Schaltzustandsdauern

eines der beteiligten aktiven Schaltzustände größer wird. Dies ist gut an der größeren Streuung der Steigungen  $\frac{d}{dt}i_{a,U}$  und  $\frac{d}{dt}i_{a,O}$  zu sehen.

Mit einem HDL-optimierten CORDIC-Algorithmus wird von den Mittelpunkt- und Radiusraumzeigern anschließend der jeweilige Betrag und der Winkel berechnet [96]. Da die Beträge dieser Raumzeiger nach Gleichung (3.96) und (3.97) allerdings zeitlich nicht veränderlich sind, werden diese mit einem eigens programmierten gleitenden Mittelwertfilter geglättet. Dieses Filter wurde abschaltbar programmiert. Das bedeutet, dass es nur dann einen neuen Wert in seine Register aufnimmt, wenn das zugehörige Messintervall eine zuvor festgelegte Mindestlänge nicht unterschritt. Des Weiteren wird das Ausgangssignal des Filters je nach Anzahl der bereits in den Registern befindlichen Messwerte an unterschiedlichen Stellen abgegriffen, so dass die Filterlänge erst mit der Anzahl der validen Daten wächst. Dadurch reagiert das Filter nach einem Reset sehr dynamisch auf die ersten Werte und glättet bei wachsender Datenmenge immer besser. Die Filterzeitkonstante wächst quasi mit der Menge der validen Daten in Schritten von Zweierpotenzen mit.

In Abbildung 5.12 ist der in jedem Takt im FPGA berechnete Betrag der Mittelpunkt- und Radiusraumzeiger zusammen mit den gefilterten Beträgen über der Zeit dargestellt.

Die so gefilterten Beträge von Mittelpunkt- und Radiusraumzeiger werden dann dazu verwendet, um die aktiven Stromänderungsparameter nach Gleichung (3.95) zu berechnen.

# 6

## Messergebnisse

*“Miss alles, was sich messen lässt,  
und mach alles messbar, was sich nicht messen lässt.”*

Archimedes

### 6.1 Messungen der Stromsteigungen und Endwerte des LS-Schätzers

Die Messung der Ergebnisse des LS-Algorithmus wurden mit der in Abschnitt 5.1.3 beschriebenen Methode zum Auslesen FPGA-interner Daten mit dem Software-Paket „Signaltap“ von Altera durchgeführt. Mit dieser Methode können neben den Ergebnissen des LS-Schätzers auch sämtliche Zwischenergebnisse und Signale mit maximal der Taktfrequenz des FPGA getriggert und aufgezeichnet werden. In den vorliegenden Messungen wurde nur in jedem 10. FPGA-Takt ein Wert der ausgewählten Signale gespeichert, um auch längere Zeitabschnitte aufzeichnen zu können. Da zwischen zwei Messwerten vom A/D-Wandler jedoch 20 FPGA-Takte liegen, wird so jeder Messwert, der im FPGA vom A/D-Wandler vorliegt, zwei mal gespeichert. In den Abbildungen ist aufgrund des gewählten Maßstabs und der Darstellungsmöglichkeiten im Druck sowie der hohen Datendichte dennoch keine Rasterung zu erkennen.

Die Darstellung der einzelnen Messungen ist so gestaltet, dass übereinander angeordnete Bilder den gleichen zeitlichen Bereich beschreiben. Die Werte der übereinanderliegenden Einzelplots sind zeitlich also streng korreliert, was durch die konsistent einheitlich gehaltene Beschriftung der Zeitachse unterstrichen wird.

### 6.1.1 Validierung der Steigungsidentifikation des LS-Verfahrens

In Abbildung 6.1 ist die Validierung der Steigungsidentifikation des LS-Verfahrens dargestellt. Im oberen Bild ist rot der Messwert-Zähler zusammen mit den Messwertindizes der in diesem Takt gültigen Schaltzustände zu sehen. Es ist deutlich zu erkennen, dass der Messwert-Zähler in einem Halbtakt von Null bis zum zuvor schon benannten Maximum von  $N_{\max}=375$  inkrementiert wird. Die Zeitbereiche der einzelnen Schaltzustände sind zudem noch im Bild selbst grau beschriftet und durch entsprechend lange Doppelpfeile dargestellt.

Im mittleren Bild ist der dazu gehörende Stromverlauf des ausgewerteten Phasenstroms des Prüflings abgebildet. Zur Validierung des LS-Verfahrens wurde bewusst das noch nicht gefilterte, deutlich verrauschte Strommesssignal als Datenbasis gewählt. Dieses Signal ist in rot dargestellt und entspricht, bis auf eine Skalierung auf die Einheit Ampere, direkt den Strommesswerten, wie sie vom A/D-Wandler an die HMK übertragen werden. Es ist deutlich zu sehen, dass dem Strommesssignal zum Teil sehr hochfrequente Störungen im Frequenzbereich einiger MHz, aber auch Schwingungen niedrigerer Frequenz im Bereich von etwa 100 kHz überlagert sind. Die hochfrequenten Störungen werden mit dem bereits beschriebenen Filter zuverlässig unterdrückt. Die niederfrequenten Störungen jedoch sorgen bei Messintervall-Längen, die kürzer als die Periodendauer der Schwingungen sind, für fehlerhafte Ergebnisse des LS-Verfahrens. Um die Qualität des LS-Verfahrens validieren zu können, müssen also einer Vergleichsmöglichkeit dieselben Daten zugrunde gelegt werden, wie dem LS-Verfahren selbst. Sollte dann die Datenbasis schlecht sein, so müsste die Vergleichsmöglichkeit nur genau so schlecht die Steigung berechnen, wie der LS-Schätzer selbst, um ihn als richtig bewerten zu können.

Eine zuverlässige und geprüfte Methode um die Steigung eines überabgetasteten Signals zu bestimmen, stellt Matlab mit seiner „Polyfit“-Funktion bereit. Hinter dieser Funktion verbirgt sich ebenfalls ein LS-Algorithmus, der die Koeffizienten eines Polynoms n-ter Ordnung zurückgibt, so dass die Abweichung zu den zugrunde gelegten Messwerten minimal im Sinne des LS-Ansatzes

## 6.1 Messungen der Stromsteigungen und Endwerte des LS-Schätzers

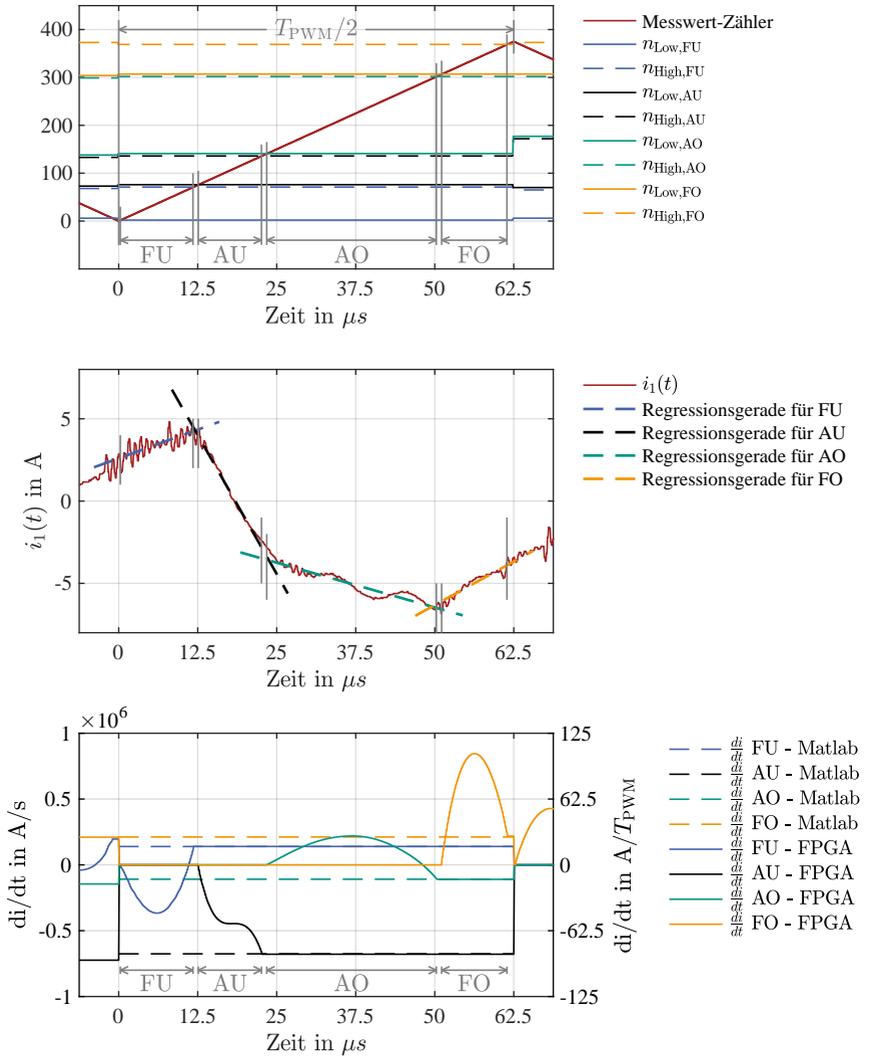


Abbildung 6.1: Vergleich der Steigungsmessung mittels des LS-Schätzers mit der „Polyfit“-Regressionsfunktion von Matlab

wird. In der vorliegenden Messung wurden daher der Matlab-Polyfit-Funktion die gleichen Messwerte als Datenbasis übergeben, die auch der im FPGA selbst programmierte LS-Schätzer nach Kapitel 4 hatte. Die Ergebnisse der Matlab-Polyfit-Funktion wurden im mittleren Bild von Abbildung 6.1 als Regressionsgerade in die jeweiligen Kurvenabschnitte eingezeichnet. Um die Übersichtlichkeit der Darstellung zu gewährleisten, wurden die so gewonnenen Regressionsgeraden etwas über das zugehörigen Messintervall hinaus gezeichnet, dann aber doch beschnitten. Anhand dieser Regressionsgeraden können die in Matlab berechneten Steigungen auch visuell mit der Stromkurvenform verglichen und validiert werden.

Die eigentliche Validierung des im FPGA implementierten LS-Verfahrens nach Kapitel 4 ist im unteren Bild von Abbildung 6.1 zu sehen. Hier sind die in Matlab berechneten Stromsteigungen gestrichelt dargestellt. Da in Matlab die Steigung der einzelnen Messintervalle nachträglich berechnet wird, steht hier das Ergebnis als ein einzelner, skalarer Wert zur Verfügung. Dieser wurde dann für den direkten Vergleich als waagrechte, gestrichelte Linie in den Zeitverlauf des Diagramms über die Zeit des ganzen Halbtaktes eingetragen.

Anders sieht es bei der Berechnung der Steigung im FPGA mittels LS-Schätzer nach Kapitel 4 aus. Hier wurde ja im FPGA während der ganzen Aufzeichnungsdauer jeder Zwischenwert des Skalarprodukts mit aufgezeichnet. Diese Skalarprodukte sind in diesem Diagramm daher sehr schön als Bogen, beziehungsweise als geschwungene Kurven zu sehen.

Die grundsätzliche parabelförmige Gestalt der Skalarprodukte ist durch den Vorzeichenwechsel in den Konstanten des LS-Verfahrens begründet. In den Abbildungen 4.7 und 4.6 ist dieser Vorzeichenwechsel gut zu sehen. Eine interessante Ausnahme ist hierbei in Abbildung 6.1 bei der Berechnung der Steigung von Schaltzustand  $A_U$  zu sehen. Da sowohl die Konstanten des LS-Schätzers, als auch die Messgröße  $i_1(t)$  während des Messintervalls das Vorzeichen wechseln, ist die resultierende Kurve des Skalarprodukts eine geschwungenen Kurve mit einem Wendepunkt.

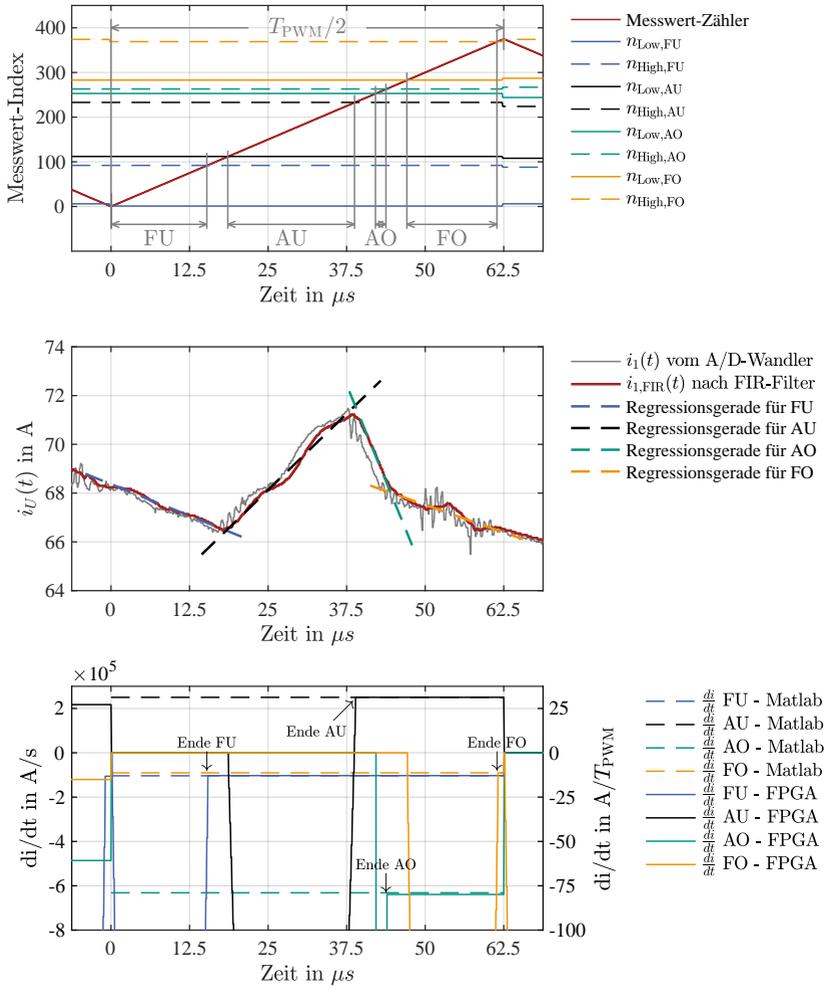


Abbildung 6.2: Vergleich der Steigungsmessung mittels LS-Schätzer mit Matlab für kurze Messintervalle

Das Ergebnis des LS-Schätzers ist mit der Verarbeitung des letzten Messwerts einer Messreihe erreicht und wird dann intern im FPGA bis zum Beginn der nächsten Identifikationsphase gespeichert. In Abbildung 6.1 ist dies daran zu

sehen, dass sich die Werte ab dem Ende des jeweiligen Messintervalls nicht mehr ändern und zum Zeitpunkt  $62,5 \mu\text{s}$  auf Null zurückgesetzt werden.

Es ist sehr gut zu sehen, dass die Ergebnisse des im FPGA implementierten LS-Schätzers mit den von Matlab berechneten Ergebnissen übereinstimmen. Der implementierte, neue, effiziente und speichersparende LS-Algorithmus funktioniert demnach sehr gut.

Dass der LS-Algorithmus auch bei sehr kurzen Messintervallen gute Ergebnisse liefert, ist in Abbildung 6.2 zu sehen. Der grundsätzliche Aufbau der gesamten Abbildung entspricht genau der bereits beschriebenen von Abbildung 6.1. Allerdings wurden in dieser Messung die Schutzintervalle um die Schalthandlungen großzügiger gewählt, was im oberen Bild in den Abständen der Messwertindizes zu sehen ist. Für das Messintervall im Schaltzustand  $A_0$  standen deshalb nur 10 Messwerte zur Verfügung. Dennoch ist im unteren Bild gut zu sehen, dass das Ergebnis des LS-Schätzers wieder dem von Matlab berechneten entspricht. Die Kurven der Skalarprodukte selbst sind in dieser Darstellung aufgrund ihrer im Vergleich zum Ergebnis sehr großen Amplitude, nicht vollständig abgebildet.

### **6.1.2 Validierung der Berechnung der Endwerte des LS-Verfahrens**

Die Berechnung der Endwerte kann recht einfach durch einen Vergleich der überabgetasteten Strommesswerte mit den vom LS-Algorithmus berechneten Endwerten erfolgen. In Abbildung 6.3 sind im oberen Bild wieder die Messwertindizes der einzelnen Schaltzustände und grau die Zeiträume der Schaltzustände selbst eingezeichnet. Im unteren Bild dagegen sind, ähnlich wie in Abbildung 6.1 die Skalarprodukte des LS-Schätzers, dieses mal allerdings zur Berechnung der Endwerte eingezeichnet. Es ist gut zu sehen, dass auch die Endwert-Berechnung des LS-Schätzers zuverlässig funktioniert und am Ende eines jeden Messintervalls dem Wert der Strommessung in diesem Zeitpunkt entspricht.

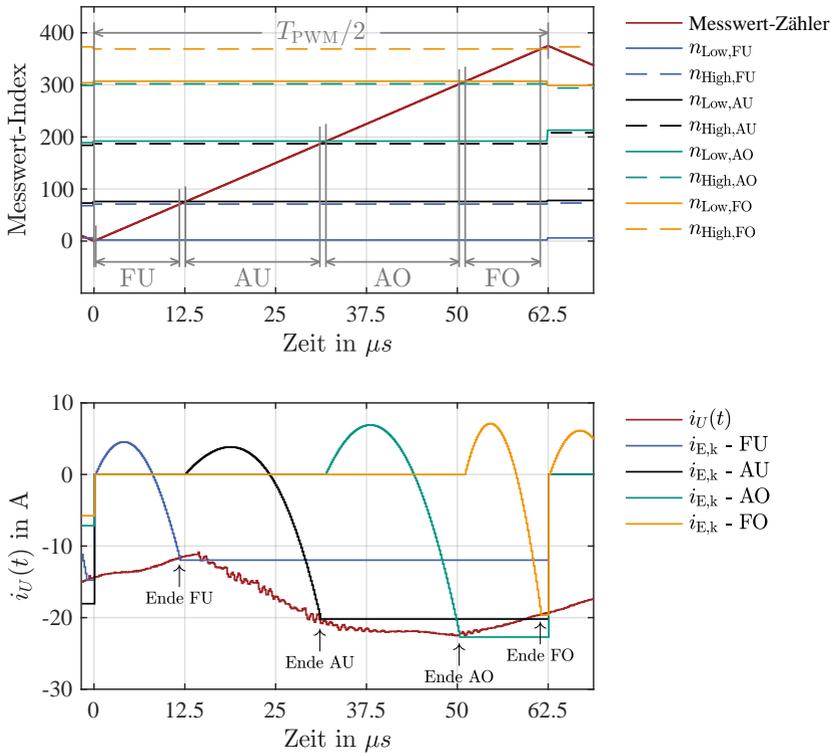


Abbildung 6.3: Berechnung der Endwerte mittels des LS-Schätzer

## 6.2 Messungen der Stromänderungsparameter

In Abbildung 6.4 sind Messungen der Stromänderungsparameter aus 250 PWM-Takten bei einer Drehzahl des Prüflings von 500 U/min aufgezeichnet. Bei dieser Drehzahl entsprechen die 250 PWM-Takte nicht ganz drei elektrischen Perioden, was im untersten Teilbild in der Darstellung des elektrischen Winkels deutlich wird. Neben dem elektrischen Winkel ist im untersten Teilbild auch noch der Sektorindex  $\sigma$  schwarz eingezeichnet.

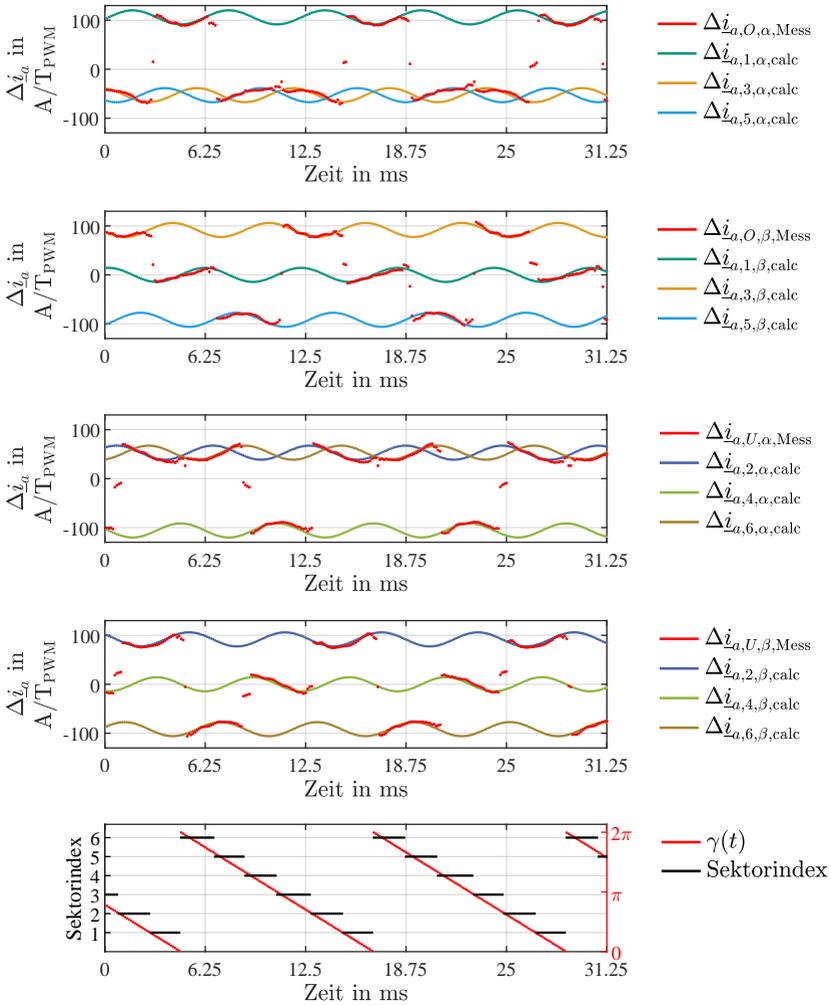


Abbildung 6.4: Vergleich des Zeitverlaufs der  $\alpha$ - und  $\beta$ -Komponenten der direkt in einem einzelnen Takt mittels LS-Verfahren gemessenen und der mit Hilfe des Rotorlagewinkels und dem Mittelpunkt- und Radiusraumzeiger berechneten Stromänderungsparameter

In den Teilbildern darüber sind in rot, die mit Hilfe des LS-Schätzers nach Kapitel 4 gemessenen aktiven Stromänderungsparameter der beiden im jeweiligen Takt benutzten aktiven Schaltzustände dargestellt. Um deren Zeitverlauf gut darstellen zu können, sind ihre  $\alpha$ - und  $\beta$ -Komponenten jeweils in eigenen Teilbildern abgebildet. Hierbei wurde die auf Seite 49 eingeführte zum PWM-Trägersignal relative Nomenklatur verwendet. Nach Tabelle 2.5 wechselt der obere aktive Schaltzustand immer zwischen den drei aktiven Schaltzuständen  $S_1, S_3$  und  $S_5$  und der untere aktive Schaltzustand zwischen  $S_2, S_4$  und  $S_6$ . In Verbindung mit der zeitgleichen Darstellung des Sektorindex ist dieser Zusammenhang der Schaltzustandsreihenfolge während einer elektrischen Periode gut in den Zeitverläufen zu sehen.

Zu den mittels LS-Schätzer direkt aus den Messwerten eines einzelnen Taktes berechneten Stromänderungsparametern sind in Abbildung 6.4 die nach Abschnitt 3.4.2 mit Hilfe der gefilterten Beträge der Mittelpunkt- und Radiusraumzeiger sowie des als bekannt vorausgesetzten Rotorlagewinkels berechneten aktiven Stromänderungsparameter eingezeichnet. Durch diese Darstellung wird direkt deutlich, dass immer nur zwei der sechs aktiven Stromänderungsparameter gemessen werden können. Durch die in Abschnitt 3.4.2 beschriebene Methode hingegen können alle sechs berechnet werden.

Zusätzlich fällt auf, dass die so gewonnenen Werte sehr glatt sind. Durch die Möglichkeit der langfristigen Filterung der Beträge des Mittelpunkt- und Radiusraumzeigers sind die Ergebnisse der darauf basierenden Berechnung ebenfalls gefiltert. Durch diese Möglichkeit der Berechnung aller Stromänderungsparameter zu jedem Zeitpunkt entfällt die Notwendigkeit einer Interpolation in der Stromsteigungsmessung bei zu kurzen Schaltzuständen.

Dieselben Daten sind in Abbildung 6.5 nicht aufgetrennt in  $\alpha$ - und  $\beta$ -Komponenten über der Zeit sondern als Raumzeiger in der  $\alpha\beta$ -Ebene dargestellt. Diese Darstellung entspricht genau der theoretischen Darstellung der Stromänderungsparameter gemäß Abbildung 3.7. Auch hier ist gut zu erkennen, dass die in jedem Takt einzeln gemessenen Stromänderungsparameter bei sehr kurzen Schaltzeiten durchaus fehlerhaft sein können (das sind

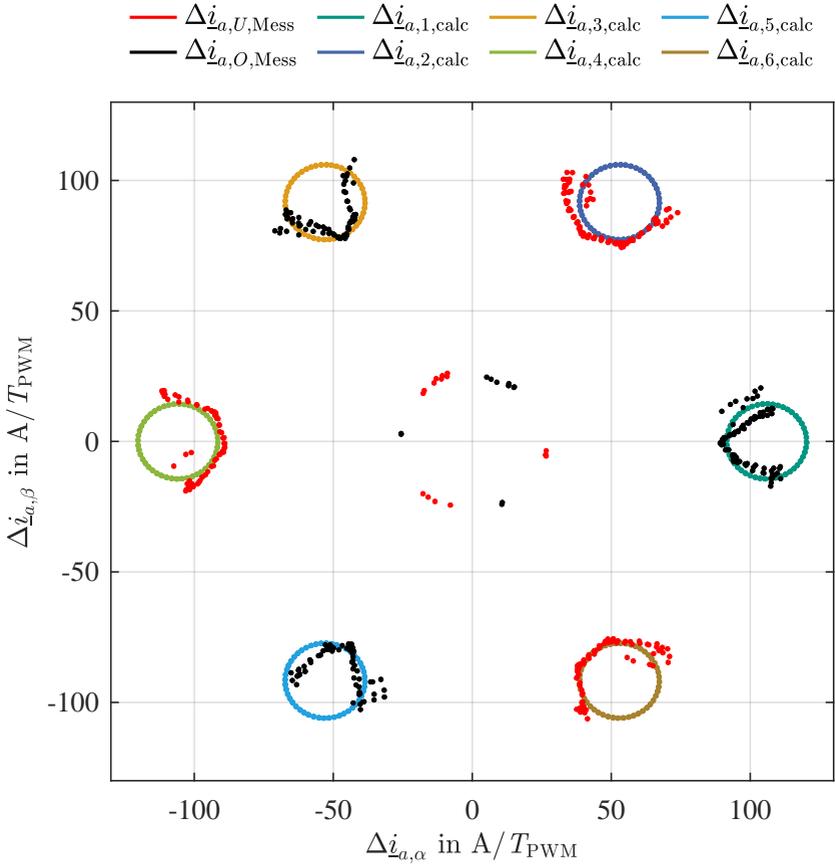


Abbildung 6.5: Vergleich der direkt in einem einzelnen Takt mittels LS-Verfahren gemessenen und der mit Hilfe des Rotorlagewinkels und dem Mittelpunkt- und Radiusraumzeiger berechneten Stromänderungsparameter, dargestellt als Raumzeiger in der statorfesten  $\alpha\beta$ -Ebene. In dieser Messung sind 250 PWM-Takte aufgezeichnet, jeder Punkt entspricht dem Ergebnis eines PWM-Taktes.

die einzelnen Messwerte nahe am Ursprung in Abbildung 6.6) und verworfen werden müssen, die berechneten hingegen glatte Kreise beschreiben.

Um das Zeitverhalten noch etwas deutlicher zu machen, sind in Abbildung 6.6 nur 10 Messwerte dargestellt, die die Ergebnisse aus 10 direkt aufeinander folgenden Taktperioden zeigen. In dieser Messreihe wurden nur die beiden aktiven Stromänderungsparameter des ersten Sektors verwendet. Der obere aktive Schaltzustand ist hierbei  $S_1$ , der untere ist  $S_2$ . Durch die analytische Darstellbarkeit der Stromänderungsparameter sind die anderen vier Stromänderungsparameter ebenfalls bekannt, auch wenn nur  $\Delta i_{-a,1}$  und  $\Delta i_{a,2}$  gemessen werden können.

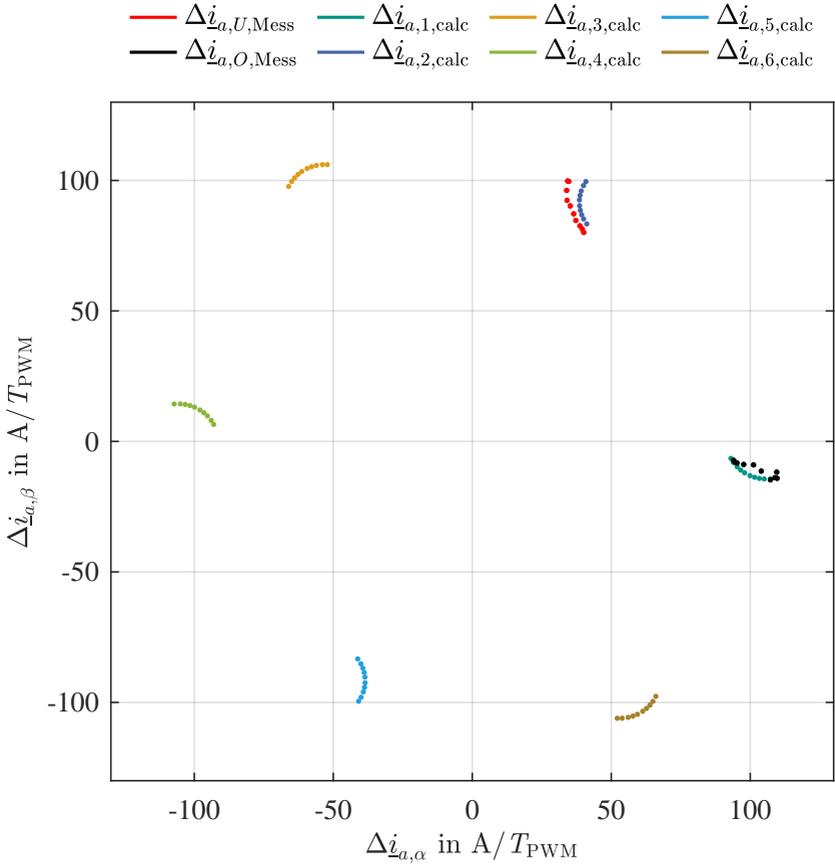


Abbildung 6.6: Vergleich von direkt in jeweils einem einzelnen Takt mittels LS-Verfahren gemessenen und der mit Hilfe des Rotorlagewinkels und dem Mittelpunkt- und Radiusraumzeiger berechneten Stromänderungsparameter, dargestellt als Raumzeiger in der statorfesten  $\alpha\beta$ -Ebene. In dieser Messung sind 10 PWM-Takte aufgezeichnet, jeder Punkt entspricht dem Ergebnis eines PWM-Taktes.

# 7

## Zusammenfassung und Ausblick

*“Wer hohe Türme bauen will, muss lange beim Fundament verweilen.”*

Anton Bruckner, österreichischer Komponist

In der vorliegenden Arbeit werden zwei neue Verfahren entwickelt und untersucht, mit denen sehr effizient und mathematisch geschlossen die Stromänderungen einer allgemeinen Drehstromsynchronmaschine im Betrieb gemessen und beschrieben werden können. Eine solche Analyse und Darstellbarkeit der Stromänderungen ist Grundlage für die Anwendung neuartiger stromsteigungsbasierter Regelungsverfahren, wie der Adaptiven Direkten Stromregelung. Aber auch für viele Verfahren zur online-Maschinenparameteridentifikation oder zur geberlosen Regelung ist die Messung und Beschreibung der Stromänderungen ein sehr wichtiger Bestandteil. Beide Verfahren werden in einem Antriebsprüfstand realisiert und die Gültigkeit der Theorie durch Messungen mit einer anisotropen Synchronmaschine nachgewiesen.

### **1. Verallgemeinerte Beschreibung der Stromänderungsparameter**

Das erste Verfahren ist eine mathematisch geschlossene, analytische Beschreibung der schaltzustandsabhängigen Stromsteigungen durch die sogenannten Stromänderungsparameter für eine allgemeine Drehstromsynchronmaschine. Sie deckt sowohl anisotrope als auch isotrope Synchronmaschinen gleichermaßen ab, wodurch die Anwendung der Adaptiven Direkten Stromregelung für magnetisch anisotrope Synchronmaschinen erst ermöglicht wird.

Für das Verfahren der Adaptiven Direkten Stromregelung wird die Kenntnis der Stromänderungen auch für die Freilaufschaltzustände in jedem

Takt benötigt. Wird aber beispielsweise bei Vollaussteuerung kein Freilauf geschaltet, sind bisherige Methoden nicht in der Lage den notwendigen Freilaufparameter zu bestimmen. Zur Lösung dieser Problematik werden zwei Algorithmen entwickelt und vorgestellt, mit denen der Freilaufparameter aus den Stromänderungen der aktiven Schaltzustände berechnet werden kann. Dies wird sowohl für magnetisch isotrope, als auch für magnetisch anisotrope Synchronmaschinen durchgeführt. Dadurch wird die in Vorarbeiten bislang implementierte Mindestfreilaufzeit hinfällig und der mögliche Modulationsgrad bei Verwendung der Adaptiven Direkten Stromregelung wird massiv erhöht.

Durch die in dieser Arbeit entwickelte Beschreibung der Stromänderungsparameter können, mit Kenntnis des Rotorlagewinkels, zu jedem Zeitpunkt alle sechs Stromänderungsparameter berechnet werden. Eine Interpolation bei zu kurzen Messzeiten während eines Taktes wird dadurch nicht mehr benötigt. Durch die Rückführung der Stromänderungsparameter auf zeitlich konstante Größen und den Rotorlagewinkel sind die so berechneten Stromänderungsparameter nahezu frei von überlagerten Störungen.

## 2. Neuer effizienter Least-Squares-Schätzer

Das zweite Verfahren ist eine neue, sehr effiziente, numerisch robuste und ressourcenschonende Implementierung eines Least-Squares-Schätzers mit minimaler Latenz. Dieser LS-Schätzer liefert als Grundlage für das erste Verfahren die gemessenen Stromsteigungen und die Absolutwerte der Maschinenströme in den einzelnen Schaltzuständen des Antriebsumrichters.

Der entwickelte LS-Algorithmus besteht dabei im Wesentlichen aus einem simplen Skalarprodukt aus den kontinuierlich eintreffenden Messwerten des A/D-Wandlers und zuvor berechenbaren Konstanten. Mit jedem neuen Messwert einer Messreihe wird also lediglich eine Multiplikation und Addition als Rechenoperation notwendig, was in einem FPGA sehr effizient implementierbar ist und innerhalb eines FPGA-Taktes durchgeführt werden kann. Am Ende einer Messreihe liegt das Ergebnis der LS-Schätzung bereits unmittelbar nach Verarbeitung des letzten Messwerts eines Messin-

tervals vor. Die Latenz nach dem letzten Messwert beträgt demnach nur einen FPGA-Takt.

Im Gegensatz zu gängigen rekursiven LS-Algorithmen wird beim in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren keine Division benötigt, was für die Implementierung in einem FPGA und die benötigte Rechenzeit sehr vorteilhaft ist.

Für die Berechnung der zur Signalverarbeitungszeit benötigten Konstanten wird in dieser Arbeit ein Verfahren hergeleitet und entwickelt, das entweder eine teilweise online Berechnung in Verbindung mit einer sehr kleinen Lookup-Tabelle gestattet, oder gänzlich ohne Speicherbedarf auskommt, da die Konstanten durchaus auch online im FPGA berechenbar sind.

Wie bei allen Least-Squares-Verfahren muss hierzu das zu messende Signal stark überabgetastet werden. Da die vorgestellten Verfahren konsequent auf eine praktikable Umsetzungsmöglichkeit in realistischer Hardware ausgerichtet sind, wird in der Validierung der vorgestellten Verfahren ein regulärer Antriebs-Prüfstand mit in der Industrie gebräuchlichen Komponenten verwendet, um die Realisierbarkeit zu zeigen.

Sowohl der neue LS-Schätzer, als auch die neue, verallgemeinerte Theorie der Stromänderungsparameter wurde in dem FPGA der Signalverarbeitungs-Hardware des verwendeten Antriebsprüfstands implementiert und mit einer magnetisch anisotropen Synchronmaschine am Prüfstand überprüft. Die Messergebnisse, sowohl des neuen LS-Schätzers, als auch der Darstellung der damit gemessenen Stromänderungsparameter, stimmen mit den theoretischen, mathematischen Darstellungen vollständig überein und zeigen die Gültigkeit der Theorie.

Die verallgemeinerte Beschreibung der Stromsteigungen ermöglicht eine analytische und geometrisch gut interpretierbare Beschreibung der Stromänderungen der Synchronmaschine, wodurch die ADSR für anisotrope Synchronmaschinen überhaupt erst ermöglicht wird. Daneben werden dadurch Zusammenhänge erschlossen, die eine maximale Aussteuerung des verwendeten Umrichters ermöglicht. Die Kombination aus der verallgemeinerten

Beschreibung der Stromänderungsparameter mit dem effizienten LS-Schätzer ermöglicht die Realisierung der kompletten ADSR für isotrope und anisotrope Synchronmaschinen in einem FPGA.

### **Ausblick**

Mit den in dieser Arbeit entwickelten Verfahren sind die Grundlagen für die Implementierung der Adaptiven Direkten Stromregelung mit einer anisotropen Synchronmaschine gelegt. In einer Simulation konnte deren Funktion auf Basis der verallgemeinerten Beschreibung der Stromänderungsparameter bereits gezeigt werden. Die Implementierung am Prüfstand steht allerdings noch aus. Für die Realisierung der ADSR ist es wichtig, dass die Totzeit zwischen dem letzten tatsächlichen Messwert und den gestellten Schaltzuständen so gering wie möglich ist. Aus diesem Grund sollte der Algorithmus der ADSR möglichst ebenfalls im FPGA realisiert werden, was durch den neuen effizienten und ressourcensparenden LS-Schätzer nun leicht möglich ist.

Die Adaptive Direkte Stromregelung kann darüber hinaus auch bei weiteren Maschinentypen angewendet werden, beispielsweise mit einer Asynchronmaschine. Der in dieser Arbeit vorgestellte Algorithmus kann auch hierfür verwendet werden.

Da in der aktuellen Implementierung die Ströme als Geradenabschnitte während der Schaltzustände angenommen werden, sind hohe Drehzahlen mit dem vorliegenden Verfahren noch nicht abbildbar, da dann die Ströme eher Parabelabschnitten gleichen und die lineare Näherung nicht mehr zulässig ist. Um diese Probleme zu lösen, existieren bereits verschiedene Ansätze, die in Folgearbeiten weiterentwickelt werden können. Beispielsweise könnte der Least-Squares-Schätzer durch eine veränderte Basisfunktion zur Näherung der Stromkurven durch Polynome höherer Ordnung ertüchtigt werden. Die Geradenabschnitte würden dann beispielsweise durch Parabelabschnitte genähert. Eine weitere Idee ist, die Steigung des Stromsteigungssignals, also gewissermaßen die „Strombeschleunigung“ zu messen und damit den künftigen Stromverlauf zu präzisieren.

Neben der Anwendung zur Stromregelung in Synchronmaschinen kann das Verfahren aber auch auf andere Größen angewendet werden, die sich näherungsweise linear ändern und ganz grundsätzlich als steigungsbasiertes Regelungsverfahren verstanden werden.

Die Anwendung des neuen LS-Schätzers ist ebenfalls nicht auf die Anwendung der Strommessung beschränkt, sondern steht ganz im Gegenteil für eine sehr weite Verwendung als effizientes LS-Verfahren zur Verfügung. Sind die Voraussetzungen einer äquidistanten Abtastung und einer bekannten Messintervalllänge gegeben, kann dieses Verfahren auf beliebige Messreihen angewendet werden.



# A

## Herleitungen

*“Mathematik ist die einzige perfekte Methode, sich selber an der Nase herumzuführen.”*

Albert Einstein

### A.1 Detaillierte Herleitung der Stromänderungsparameter anisotroper Synchronmaschinen

#### A.1.1 Berechnung von $\frac{d}{dt}i_\alpha$ (siehe Seite 84)

Die Gleichungen für die  $\alpha$ - und die  $\beta$ -Komponente (3.72) und (3.73) der Statorspannung werden jeweils nach  $\frac{d}{dt}i_\beta$  umgestellt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}i_\beta &= \frac{2}{3L_B \sin(2\gamma)} \cdot \left\{ u_\alpha - (R_S - 3L_B \omega \sin(2\gamma)) i_\alpha \right. \\ &\quad - \left( \frac{3}{2}L_A + \frac{3}{2}L_B \cos(2\gamma) \right) \frac{d}{dt}i_\alpha - 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\beta \\ &\quad \left. + \omega \Psi_{PM} \sin(\gamma) \right\} = \frac{Z_{\beta,a}}{N_{\beta,a}} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}i_\beta &= \frac{2}{3L_A - 3L_B \cos(2\gamma)} \cdot \left\{ u_\beta - 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\alpha \right. \\ &\quad - \frac{3}{2}L_B \sin(2\gamma) \frac{d}{dt}i_\alpha - (R_S + 3L_B \omega \sin(2\gamma)) i_\beta \\ &\quad \left. - \omega \Psi_{PM} \cos(\gamma) \right\} = \frac{Z_{\beta,b}}{N_{\beta,b}} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Im nächsten Schritt werden (A.1) und (A.2) gleichgesetzt und nach  $\frac{d}{dt}i_\alpha$  aufgelöst.

$$\frac{Z_{\beta,a}}{N_{\beta,a}} = \frac{Z_{\beta,b}}{N_{\beta,b}} \quad \Leftrightarrow \quad Z_{\beta,a}N_{\beta,b} = Z_{\beta,b}N_{\beta,a} \quad (\text{A.3})$$

Zunächst wird nur die linke Seite berechnet und vereinfacht:

$$\begin{aligned} Z_{\beta,a}N_{\beta,b} &= \left[ u_\alpha - (R_S - 3L_B \omega \sin(2\gamma)) i_\alpha \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{3}{2}L_A + \frac{3}{2}L_B \cos(2\gamma) \right) \frac{d}{dt}i_\alpha - 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\beta \right. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} &\quad \left. + \omega \Psi_{PM} \sin(\gamma) \right] \cdot \left( \frac{3}{2}L_A - \frac{3}{2}L_B \cos(2\gamma) \right) \\ &= \left[ u_\alpha - (R_S - 3L_B \omega \sin(2\gamma)) i_\alpha - 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\beta \right. \\ &\quad \left. + \omega \Psi_{PM} \sin(\gamma) \right] \left( \frac{3}{2}L_A - \frac{3}{2}L_B \cos(2\gamma) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} &\quad - \left( \frac{3}{2}L_A + \frac{3}{2}L_B \cos(2\gamma) \right) \left( \frac{3}{2}L_A - \frac{3}{2}L_B \cos(2\gamma) \right) \frac{d}{dt}i_\alpha \\ &= \left[ u_\alpha - R_S i_\alpha + 3L_B \omega \sin(2\gamma) i_\alpha - 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\beta \right. \\ &\quad \left. + \omega \Psi_{PM} \sin(\gamma) \right] \left( \frac{3}{2}L_A - \frac{3}{2}L_B \cos(2\gamma) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} &\quad - \left( \frac{9}{4}L_A^2 - \frac{9}{4}L_B^2 \cos^2(2\gamma) \right) \frac{d}{dt}i_\alpha \end{aligned}$$

Dann die rechte Seite:

$$\begin{aligned} Z_{\beta,b}N_{\beta,a} &= \left[ u_\beta - 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\alpha - \frac{3}{2}L_B \sin(2\gamma) \frac{d}{dt}i_\alpha \right. \\ &\quad \left. - (R_S + 3L_B \omega \sin(2\gamma)) i_\beta - \omega \Psi_{PM} \cos(\gamma) \right] \left( \frac{3}{2}L_B \sin(2\gamma) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ u_\beta - 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\alpha - R_S i_\beta - 3L_B \omega \sin(2\gamma) i_\beta \right. \\
&\quad \left. - \omega \Psi_{PM} \cos(\gamma) \right] \left( \frac{3}{2} L_B \sin(2\gamma) \right) \tag{A.7} \\
&\quad - \left( \frac{3}{2} L_B \sin(2\gamma) \frac{d}{dt} i_\alpha \right) \left( \frac{3}{2} L_B \sin(2\gamma) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ u_\beta - 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\alpha - R_S i_\beta - 3L_B \omega \sin(2\gamma) i_\beta \right. \\
&\quad \left. - \omega \Psi_{PM} \cos(\gamma) \right] \left( \frac{3}{2} L_B \sin(2\gamma) \right) \tag{A.8} \\
&\quad - \left( \frac{9}{4} L_B^2 \sin^2(2\gamma) \right) \frac{d}{dt} i_\alpha
\end{aligned}$$

So umgeformt werden die beiden Terme gleichgesetzt und sukzessive nach  $\frac{d}{dt} i_\alpha$  umgeformt:

$$Z_{\beta,a} N_{\beta,b} = Z_{\beta,b} N_{\beta,a} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left[ u_\alpha - R_S i_\alpha + 3L_B \omega \sin(2\gamma) i_\alpha - 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\beta \right. \\
&\quad \left. + \omega \Psi_{PM} \sin(\gamma) \right] \cdot \left( \frac{3}{2} L_A - \frac{3}{2} L_B \cos(2\gamma) \right) \\
&\quad - \left( \frac{9}{4} L_A^2 - \frac{9}{4} L_B^2 \cos^2(2\gamma) \right) \frac{d}{dt} i_\alpha \\
&= \left[ u_\beta - 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\alpha - R_S i_\beta - 3L_B \omega \sin(2\gamma) i_\beta \right. \\
&\quad \left. - \omega \Psi_{PM} \cos(\gamma) \right] \cdot \left( \frac{3}{2} L_B \sin(2\gamma) \right) \\
&\quad - \left( \frac{9}{4} L_B^2 \sin^2(2\gamma) \right) \frac{d}{dt} i_\alpha \tag{A.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \left[ u_\alpha - R_S i_\alpha + 3L_B \omega \sin(2\gamma) i_\alpha - 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\beta \right. \\
 &\quad \left. + \omega \Psi_{PM} \sin(\gamma) \right] \cdot \left( \frac{3}{2} L_A - \frac{3}{2} L_B \cos(2\gamma) \right) \\
 &\quad - \left[ u_\beta - 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\alpha - R_S i_\beta - 3L_B \omega \sin(2\gamma) i_\beta \right. \\
 &\quad \left. - \omega \Psi_{PM} \cos(\gamma) \right] \cdot \left( \frac{3}{2} L_B \sin(2\gamma) \right) \\
 &= \left( \frac{9}{4} L_A^2 - \frac{9}{4} L_B^2 \cos^2(2\gamma) \right) \frac{d}{dt} i_\alpha - \left( \frac{9}{4} L_B^2 \sin^2(2\gamma) \right) \frac{d}{dt} i_\alpha \quad (\text{A.11})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \left[ u_\alpha - (R_S - 3L_B \omega \sin(2\gamma)) i_\alpha - 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\beta \right. \\
 &\quad \left. + \omega \Psi_{PM} \sin(\gamma) \right] \cdot (L_A - L_B \cos(2\gamma)) \\
 &\quad - \left[ u_\beta - 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\alpha - (R_S + 3L_B \omega \sin(2\gamma)) i_\beta \right. \\
 &\quad \left. - \omega \Psi_{PM} \cos(\gamma) \right] \cdot (L_B \sin(2\gamma)) \\
 &= \frac{2}{3} \left[ L_A^2 - L_B^2 \cos^2(2\gamma) - L_B^2 \sin^2(2\gamma) \right] \frac{9}{4} \frac{d}{dt} i_\alpha \quad (\text{A.12})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow (L_A - L_B \cos(2\gamma)) u_\alpha \\
 &\quad - (R_S - 3L_B \omega \sin(2\gamma)) (L_A - L_B \cos(2\gamma)) i_\alpha \\
 &\quad - 3L_B \omega \cos(2\gamma) (L_A - L_B \cos(2\gamma)) i_\beta \\
 &\quad + (L_A - L_B \cos(2\gamma)) \omega \Psi_{PM} \sin(\gamma) \\
 &\quad - (L_B \sin(2\gamma)) u_\beta + 3L_B \omega \cos(2\gamma) (L_B \sin(2\gamma)) i_\alpha \\
 &\quad + (R_S + 3L_B \omega \sin(2\gamma)) (L_B \sin(2\gamma)) i_\beta \\
 &\quad + (L_B \sin(2\gamma)) \omega \Psi_{PM} \cos(\gamma) \\
 &= \frac{3}{2} \left[ L_A^2 - L_B^2 \underbrace{(\cos^2(2\gamma) + \sin^2(2\gamma))}_{=1} \right] \frac{d}{dt} i_\alpha \quad (\text{A.13})
 \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2} \left[ L_A^2 - L_B^2 \right] \frac{d}{dt} i_\alpha \quad (\text{A.14})$$

In den folgenden Gleichungen wird im Wesentlichen der bislang linke Teil der Gleichung umgeformt. Die Darstellung wechselt deshalb an dieser Stelle und der bislang linke Teil steht nun rechts und umgekehrt:

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{2} [L_A^2 - L_B^2] \frac{d}{dt} i_\alpha \\
&= (L_A - L_B \cos(2\gamma)) u_\alpha - (L_B \sin(2\gamma)) u_\beta \\
&\quad - (R_S - 3L_B \omega \sin(2\gamma)) (L_A - L_B \cos(2\gamma)) i_\alpha \\
&\quad + 3L_B \omega \cos(2\gamma) (L_B \sin(2\gamma)) i_\alpha \\
&\quad - 3L_B \omega \cos(2\gamma) (L_A - L_B \cos(2\gamma)) i_\beta \\
&\quad + (R_S + 3L_B \omega \sin(2\gamma)) (L_B \sin(2\gamma)) i_\beta \\
&\quad + (L_A - L_B \cos(2\gamma)) \omega \Psi_{PM} \sin(\gamma) \\
&\quad + (L_B \sin(2\gamma)) \omega \Psi_{PM} \cos(\gamma)
\end{aligned} \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned}
&= (L_A - L_B \cos(2\gamma)) u_\alpha - (L_B \sin(2\gamma)) u_\beta \\
&\quad + [3L_B \omega \cos(2\gamma) (L_B \sin(2\gamma)) \\
&\quad\quad - (R_S - 3L_B \omega \sin(2\gamma)) (L_A - L_B \cos(2\gamma))] i_\alpha \\
&\quad + [(R_S + 3L_B \omega \sin(2\gamma)) (L_B \sin(2\gamma)) \\
&\quad\quad - 3L_B \omega \cos(2\gamma) (L_A - L_B \cos(2\gamma))] i_\beta \\
&\quad + (L_A - L_B \cos(2\gamma)) \omega \Psi_{PM} \sin(\gamma) \\
&\quad - (L_B \sin(2\gamma)) \omega \Psi_{PM} \cos(\gamma)
\end{aligned} \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned}
&= (L_A - L_B \cos(2\gamma)) u_\alpha - (L_B \sin(2\gamma)) u_\beta \\
&\quad + [3L_B^2 \omega \cos(2\gamma) \sin(2\gamma) - (R_S L_A - 3L_A L_B \omega \sin(2\gamma) \\
&\quad\quad - R_S L_B \cos(2\gamma) + 3L_B^2 \omega \cos(2\gamma) \sin(2\gamma))] i_\alpha \\
&\quad + [(R_S L_B \sin(2\gamma) + 3L_B^2 \omega \sin^2(2\gamma)) \\
&\quad\quad - 3L_A L_B \omega \cos(2\gamma) + 3L_B^2 \omega \cos^2(2\gamma)] i_\beta \\
&\quad + [(L_A - L_B \cos(2\gamma)) \sin(\gamma) + (L_B \sin(2\gamma)) \cos(\gamma)] \omega \Psi_{PM}
\end{aligned} \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned}
 &= (L_A - L_B \cos(2\gamma)) u_\alpha - (L_B \sin(2\gamma)) u_\beta \\
 &\quad + [3L_B^2 \omega \cos(2\gamma) \sin(2\gamma) - R_S L_A + 3L_A L_B \omega \sin(2\gamma) \\
 &\quad\quad + R_S L_B \cos(2\gamma) - 3L_B^2 \omega \cos(2\gamma) \sin(2\gamma)] i_\alpha \\
 &\quad + [R_S L_B \sin(2\gamma) + 3L_B^2 \omega \sin^2(2\gamma) - 3L_A L_B \omega \cos(2\gamma) \\
 &\quad\quad + 3L_B^2 \omega \cos^2(2\gamma)] i_\beta
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned}
 &+ [L_A \sin(\gamma) - L_B \cos(2\gamma) \sin(\gamma) + L_B \sin(2\gamma) \cos(\gamma)] \omega \Psi_{\text{PM}} \\
 &= (L_A - L_B \cos(2\gamma)) u_\alpha - (L_B \sin(2\gamma)) u_\beta \\
 &\quad + [-R_S L_A + 3L_A L_B \omega \sin(2\gamma) + R_S L_B \cos(2\gamma)] i_\alpha \\
 &\quad + [R_S L_B \sin(2\gamma) + 3L_B^2 \omega - 3L_A L_B \omega \cos(2\gamma)] i_\beta \\
 &\quad + \left[ L_A \sin(\gamma) + L_B \underbrace{(\sin(2\gamma) \cos(\gamma) - \cos(2\gamma) \sin(\gamma))}_{=\sin(2\gamma-\gamma)=\sin(\gamma)} \right] \omega \Psi_{\text{PM}}
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

$$\begin{aligned}
 &= (L_A - L_B \cos(2\gamma)) u_\alpha - (L_B \sin(2\gamma)) u_\beta \\
 &\quad + [-R_S L_A + 3L_A L_B \omega \sin(2\gamma) + R_S L_B \cos(2\gamma)] i_\alpha \\
 &\quad + [R_S L_B \sin(2\gamma) + 3L_B^2 \omega - 3L_A L_B \omega \cos(2\gamma)] i_\beta \\
 &\quad + [L_A \sin(\gamma) + L_B \sin(\gamma)] \omega \Psi_{\text{PM}}
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

Umgestellt nach  $\frac{d}{dt} i_\alpha$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} i_\alpha &= \frac{2}{3(L_A^2 - L_B^2)} \\
 &\quad \cdot \left\{ (L_A - L_B \cos(2\gamma)) u_\alpha - (L_B \sin(2\gamma)) u_\beta \right. \\
 &\quad\quad + [-R_S L_A + 3L_A L_B \omega \sin(2\gamma) + R_S L_B \cos(2\gamma)] i_\alpha \\
 &\quad\quad + [R_S L_B \sin(2\gamma) + 3L_B^2 \omega - 3L_A L_B \omega \cos(2\gamma)] i_\beta \\
 &\quad\quad \left. + [L_A \sin(\gamma) + L_B \sin(\gamma)] \omega \Psi_{\text{PM}} \right\}
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

### A.1.2 Berechnung von $\frac{d}{dt}i_\beta$ bei einer anisotropen PSM

In diesem Abschnitt werden nun die gleichen Rechenschritte für die Berechnung von  $\frac{d}{dt}i_\alpha$  durchgeführt. Der Verweis auf diese Zwischenrechnung erfolgte auf Seite 85. Zunächst werden die Gleichungen für die  $\alpha$ - und die  $\beta$ -Komponente (3.72) und (3.73) der Statorspannung jeweils nach  $\frac{d}{dt}i_\alpha$  umgestellt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}i_\alpha = \frac{2}{3L_A + 3L_B \cos(2\gamma)} \cdot \left\{ u_\alpha - (R_S - 3L_B \omega \sin(2\gamma)) i_\alpha \right. \\ \left. - 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\beta - \frac{3}{2}L_B \sin(2\gamma) \frac{d}{dt}i_\beta \right. \\ \left. + \omega \Psi_{PM} \sin(\gamma) \right\} = \frac{Z_{\alpha,a}}{N_{\alpha,a}} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}i_\alpha = \frac{2}{3L_B \sin(2\gamma)} \cdot \left\{ u_\beta - 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\alpha \right. \\ \left. - (R_S + 3L_B \omega \sin(2\gamma)) i_\beta - \left( \frac{3}{2}L_A - \frac{3}{2}L_B \cos(2\gamma) \right) \frac{d}{dt}i_\beta \right. \\ \left. - \omega \Psi_{PM} \cos(\gamma) \right\} = \frac{Z_{\alpha,b}}{N_{\alpha,b}} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Gleichung (A.22) und (A.23) werde wieder gleichgesetzt und dann nach  $\frac{d}{dt}i_\beta$  aufgelöst.

$$\frac{Z_{\alpha,a}}{N_{\alpha,a}} = \frac{Z_{\alpha,b}}{N_{\alpha,b}} \quad \Leftrightarrow \quad Z_{\alpha,a}N_{\alpha,b} = Z_{\alpha,b}N_{\alpha,a} \quad (\text{A.24})$$

Zunächst wird nur die linke Seite berechnet und vereinfacht:

$$\begin{aligned} Z_{\alpha,a}N_{\alpha,b} = \left[ u_\alpha - (R_S - 3L_B \omega \sin(2\gamma)) i_\alpha \right. \\ \left. - 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\beta - \frac{3}{2}L_B \sin(2\gamma) \frac{d}{dt}i_\beta \right. \\ \left. + \omega \Psi_{PM} \sin(\gamma) \right] \left( \frac{3}{2}L_B \sin(2\gamma) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

$$= \left[ u_\alpha - (R_S - 3L_B \omega \sin(2\gamma)) i_\alpha \right. \\ \left. - 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\beta + \omega \Psi_{PM} \sin(\gamma) \right] \left( \frac{3}{2} L_B \sin(2\gamma) \right) \quad (\text{A.26})$$

$$- \left( \frac{3}{2} L_B \sin(2\gamma) \frac{d}{dt} i_\beta \right) \left( \frac{3}{2} L_B \sin(2\gamma) \right) \\ = \left[ u_\alpha - (R_S - 3L_B \omega \sin(2\gamma)) i_\alpha \right. \\ \left. - 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\beta + \omega \Psi_{PM} \sin(\gamma) \right] \left( \frac{3}{2} L_B \sin(2\gamma) \right) \quad (\text{A.27}) \\ - \left( \frac{9}{4} L_B^2 \sin^2(2\gamma) \right) \frac{d}{dt} i_\beta$$

Dann die rechte Seite:

$$Z_{\alpha,b} N_{\alpha,a} = \left[ u_\beta - 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\alpha - (R_S + 3L_B \omega \sin(2\gamma)) i_\beta \right. \\ \left. - \left( \frac{3}{2} L_A - \frac{3}{2} L_B \cos(2\gamma) \right) \frac{d}{dt} i_\beta \right. \\ \left. - \omega \Psi_{PM} \cos(\gamma) \right] \left( \frac{3}{2} L_A + \frac{3}{2} L_B \cos(2\gamma) \right) \quad (\text{A.28})$$

$$= \left[ u_\beta - 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\alpha - (R_S + 3L_B \omega \sin(2\gamma)) i_\beta \right. \\ \left. - \omega \Psi_{PM} \cos(\gamma) \right] \left( \frac{3}{2} L_A + \frac{3}{2} L_B \cos(2\gamma) \right) \quad (\text{A.29}) \\ - \left( \frac{3}{2} L_A - \frac{3}{2} L_B \cos(2\gamma) \right) \left( \frac{3}{2} L_A + \frac{3}{2} L_B \cos(2\gamma) \right) \frac{d}{dt} i_\beta$$

$$= \left[ u_\beta - 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\alpha - (R_S + 3L_B \omega \sin(2\gamma)) i_\beta \right. \\ \left. - \omega \Psi_{PM} \cos(\gamma) \right] \left( \frac{3}{2} L_A + \frac{3}{2} L_B \cos(2\gamma) \right) \quad (\text{A.30}) \\ - \left( \frac{9}{4} L_A^2 - \frac{9}{4} L_B^2 \cos^2(2\gamma) \right) \frac{d}{dt} i_\beta$$

Jetzt werden die beiden Terme gleichgesetzt und sukzessive nach  $\frac{d}{dt}i_\beta$  umgeformt:

$$Z_{\alpha,a}N_{\alpha,b} = Z_{\alpha,b}N_{\alpha,a} \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \left[ u_\beta - 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\alpha - (R_S + 3L_B \omega \sin(2\gamma)) i_\beta \right. \\ & \left. - \omega \Psi_{\text{PM}} \cos(\gamma) \right] \left( \frac{3}{2} L_A + \frac{3}{2} L_B \cos(2\gamma) \right) \\ & - \left( \frac{9}{4} L_A^2 - \frac{9}{4} L_B^2 \cos^2(2\gamma) \right) \frac{d}{dt} i_\beta \\ = & \left[ u_\alpha - (R_S - 3L_B \omega \sin(2\gamma)) i_\alpha \right. \\ & \left. - 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\beta + \omega \Psi_{\text{PM}} \sin(\gamma) \right] \left( \frac{3}{2} L_B \sin(2\gamma) \right) \\ & - \left( \frac{9}{4} L_B^2 \sin^2(2\gamma) \right) \frac{d}{dt} i_\beta \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \left( \frac{9}{4} L_B^2 \sin^2(2\gamma) \right) \frac{d}{dt} i_\beta - \left( \frac{9}{4} L_A^2 - \frac{9}{4} L_B^2 \cos^2(2\gamma) \right) \frac{d}{dt} i_\beta \\ = & \left[ u_\alpha - (R_S - 3L_B \omega \sin(2\gamma)) i_\alpha \right. \\ & \left. - 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\beta + \omega \Psi_{\text{PM}} \sin(\gamma) \right] \left( \frac{3}{2} L_B \sin(2\gamma) \right) \\ & - \left[ u_\beta - 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\alpha - (R_S + 3L_B \omega \sin(2\gamma)) i_\beta \right. \\ & \left. - \omega \Psi_{\text{PM}} \cos(\gamma) \right] \left( \frac{3}{2} L_A + \frac{3}{2} L_B \cos(2\gamma) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot [L_B^2 \sin^2(2\gamma) - L_A^2 + L_B^2 \cos^2(2\gamma)] \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{d}{dt} i_\beta \\
 &= [u_\alpha - (R_S - 3L_B \omega \sin(2\gamma)) i_\alpha \\
 &\quad - 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\beta + \omega \Psi_{PM} \sin(\gamma)] (L_B \sin(2\gamma)) \\
 &\quad - [u_\beta - 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\alpha - (R_S + 3L_B \omega \sin(2\gamma)) i_\beta \\
 &\quad - \omega \Psi_{PM} \cos(\gamma)] (L_A + L_B \cos(2\gamma))
 \end{aligned} \tag{A.34}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot [-L_A^2 + L_B^2 (\sin^2(2\gamma) + \cos^2(2\gamma))] \frac{d}{dt} i_\beta \\
 &= [L_B \sin(2\gamma) u_\alpha - L_B \sin(2\gamma) (R_S - 3L_B \omega \sin(2\gamma)) i_\alpha \\
 &\quad - 3L_B \omega L_B \sin(2\gamma) \cos(2\gamma) i_\beta + L_B \sin(2\gamma) \omega \Psi_{PM} \sin(\gamma)] \\
 &\quad - [(L_A + L_B \cos(2\gamma)) u_\beta \\
 &\quad - (L_A + L_B \cos(2\gamma)) 3L_B \omega \cos(2\gamma) i_\alpha \\
 &\quad - (L_A + L_B \cos(2\gamma)) (R_S + 3L_B \omega \sin(2\gamma)) i_\beta \\
 &\quad - (L_A + L_B \cos(2\gamma)) \omega \Psi_{PM} \cos(\gamma)]
 \end{aligned} \tag{A.35}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow -\frac{3}{2} \cdot [L_A^2 - L_B^2] \frac{d}{dt} i_\beta \\
 &= L_B \sin(2\gamma) u_\alpha - [R_S L_B \sin(2\gamma) - 3L_B^2 \omega \sin^2(2\gamma)] i_\alpha \\
 &\quad - 3L_B^2 \omega \sin(2\gamma) \cos(2\gamma) i_\beta + L_B \sin(2\gamma) \sin(\gamma) \omega \Psi_{PM} \\
 &\quad - [L_A + L_B \cos(2\gamma)] u_\beta + [3L_A L_B \omega \cos(2\gamma) \\
 &\quad + 3L_B^2 \omega \cos^2(2\gamma)] i_\alpha \\
 &\quad + [R_S L_A + R_S L_B \cos(2\gamma) + 3L_A L_B \omega \sin(2\gamma) \\
 &\quad + 3L_B^2 \omega \cos(2\gamma) \sin(2\gamma)] i_\beta \\
 &\quad + (L_A + L_B \cos(2\gamma)) \omega \Psi_{PM} \cos(\gamma)
 \end{aligned} \tag{A.36}$$

$$\begin{aligned}
&=L_B \sin(2\gamma)u_\alpha - [L_A + L_B \cos(2\gamma)]u_\beta \\
&\quad - [R_S L_B \sin(2\gamma) - 3L_B^2 \omega \sin^2(2\gamma)] i_\alpha \\
&\quad + [3L_A L_B \omega \cos(2\gamma) + 3L_B^2 \omega \cos^2(2\gamma)] i_\alpha \\
&\quad - 3L_B^2 \omega \sin(2\gamma) \cos(2\gamma) i_\beta + [R_S L_A + R_S L_B \cos(2\gamma) \\
&\quad\quad + 3L_A L_B \omega \sin(2\gamma) + 3L_B^2 \omega \cos(2\gamma) \sin(2\gamma)] i_\beta \\
&\quad + L_B \sin(2\gamma) \sin(\gamma) \omega \Psi_{PM} \\
&\quad + (L_A + L_B \cos(2\gamma)) \omega \Psi_{PM} \cos(\gamma)
\end{aligned} \tag{A.37}$$

$$\begin{aligned}
&=L_B \sin(2\gamma)u_\alpha - [L_A + L_B \cos(2\gamma)]u_\beta \\
&\quad + [3L_A L_B \omega \cos(2\gamma) + 3L_B^2 \omega \cos^2(2\gamma) - R_S L_B \sin(2\gamma) \\
&\quad\quad + 3L_B^2 \omega \sin^2(2\gamma)] i_\alpha \\
&\quad + [R_S L_A + R_S L_B \cos(2\gamma) + 3L_A L_B \omega \sin(2\gamma) \\
&\quad\quad + 3L_B^2 \omega \cos(2\gamma) \sin(2\gamma) - 3L_B^2 \omega \sin(2\gamma) \cos(2\gamma)] i_\beta \\
&\quad + [L_B \sin(2\gamma) \sin(\gamma) + (L_A + L_B \cos(2\gamma)) \cos(\gamma)] \omega \Psi_{PM}
\end{aligned} \tag{A.38}$$

$$\begin{aligned}
&=L_B \sin(2\gamma)u_\alpha - [L_A + L_B \cos(2\gamma)]u_\beta \\
&\quad + [3L_A L_B \omega \cos(2\gamma) + 3L_B^2 \omega (\cos^2(2\gamma) + \sin^2(2\gamma)) \\
&\quad\quad - R_S L_B \sin(2\gamma)] i_\alpha \\
&\quad + [R_S L_A + R_S L_B \cos(2\gamma) + 3L_A L_B \omega \sin(2\gamma)] i_\beta \\
&\quad + [L_B \sin(2\gamma) \sin(\gamma) + L_A \cos(\gamma) \\
&\quad\quad + L_B \cos(2\gamma) \cos(\gamma)] \omega \Psi_{PM}
\end{aligned} \tag{A.39}$$

$$\begin{aligned}
&=L_B \sin(2\gamma)u_\alpha - [L_A + L_B \cos(2\gamma)]u_\beta \\
&\quad + [3L_A L_B \omega \cos(2\gamma) + 3L_B^2 \omega - R_S L_B \sin(2\gamma)] i_\alpha \\
&\quad + [R_S L_A + R_S L_B \cos(2\gamma) + 3L_A L_B \omega \sin(2\gamma)] i_\beta \\
&\quad + [L_A \cos(\gamma) + L_B (\sin(2\gamma) \sin(\gamma) \\
&\quad\quad + \cos(\gamma) \cos(2\gamma))] \omega \Psi_{PM}
\end{aligned} \tag{A.40}$$

In mathematischen Formelsammlungen zu trigonometrischen Funktionen findet sich der Zusammenhang [97]:

$$\sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y)) \quad (\text{A.41})$$

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2} (\cos(x - y) + \cos(x + y)) \quad (\text{A.42})$$

Wird in diesen Gleichungen  $x$  durch  $2\gamma$  und  $y$  durch  $\gamma$  ersetzt, gilt damit

$$\sin(2\gamma) \sin(\gamma) = \frac{1}{2} (\cos(2\gamma - \gamma) - \cos(2\gamma + \gamma)) \quad (\text{A.43})$$

$$\cos(\gamma) \cos(2\gamma) = \frac{1}{2} (\cos(2\gamma - \gamma) + \cos(2\gamma + \gamma)) \quad (\text{A.44})$$

Die Summe aus Gleichung (A.43) und (A.44) ist im letzten Term der Gleichung (A.40) enthalten und ergibt:

$$\begin{aligned} & \sin(2\gamma) \sin(\gamma) + \cos(\gamma) \cos(2\gamma) \\ &= \frac{1}{2} (\cos(\gamma) - \cos(3\gamma)) + \frac{1}{2} (\cos(\gamma) + \cos(3\gamma)) \\ &= \frac{1}{2} [\cos(\gamma) - \cos(3\gamma) + \cos(\gamma) + \cos(3\gamma)] \\ &= \cos(\gamma) \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Dieser Zusammenhang wird in Gleichung (A.40) eingesetzt:

$$\begin{aligned} & -\frac{3}{2} \cdot [L_A^2 - L_B^2] \frac{d}{dt} i_\beta \\ &= L_B \sin(2\gamma) u_\alpha - [L_A + L_B \cos(2\gamma)] u_\beta \\ & \quad + [3L_A L_B \omega \cos(2\gamma) + 3L_B^2 \omega - R_S L_B \sin(2\gamma)] i_\alpha \\ & \quad + [R_S L_A + R_S L_B \cos(2\gamma) + 3L_A L_B \omega \sin(2\gamma)] i_\beta \\ & \quad + [L_A \cos(\gamma) + L_B \cos(\gamma)] \omega \Psi_{PM} \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Damit liegt nun das Ergebnis  $\frac{d}{dt}i_\beta$  vor:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}i_\beta = & \frac{2}{3(L_A^2 - L_B^2)} \\ & \cdot \left\{ -L_B \sin(2\gamma)u_\alpha + [L_A + L_B \cos(2\gamma)]u_\beta \right. \\ & - [3L_A L_B \omega \cos(2\gamma) + 3L_B^2 \omega - R_S L_B \sin(2\gamma)]i_\alpha \\ & - [R_S L_A + R_S L_B \cos(2\gamma) + 3L_A L_B \omega \sin(2\gamma)]i_\beta \\ & \left. - [L_A \cos(\gamma) + L_B \cos(\gamma)]\omega \Psi_{PM} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

### A.1.3 Berechnung des aktiven Stromänderungsparameters

Diese Zwischenrechnung setzt die Herleitung von Seite 88 zur Berechnung der aktiven Stromänderungsparameter detailliert fort.

Aus den  $\alpha$ - und  $\beta$ -Komponenten nach den Gleichungen (3.79) und (3.80) wird der Raumzeiger des aktiven Stromänderungsparameters gebildet:

$$\Delta \underline{i}_{a,x} = \begin{pmatrix} \Delta i_{a,x,\alpha} \\ \Delta i_{a,x,\beta} \end{pmatrix} = \Delta i_{a,x,\alpha} + j \Delta i_{a,x,\beta} \quad (\text{A.48})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{3(L_A^2 - L_B^2)} \cdot T_{\text{PWM}} \\ & \cdot [(L_A - L_B \cos(2\gamma))u_{x,\alpha} - (L_B \sin(2\gamma))u_{x,\beta}] \\ & + \frac{2}{3(L_A^2 - L_B^2)} \cdot T_{\text{PWM}} \\ & \cdot [-jL_B \sin(2\gamma)u_{x,\alpha} + jL_A u_{x,\beta} + jL_B \cos(2\gamma)u_{x,\beta}] \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Die  $\alpha$ - und die  $\beta$ -Komponente des Statorspannungsraumzeigers  $u_{x,\alpha}$  und  $u_{x,\beta}$  wird jeweils durch den Betrag des Raumzeigers (siehe Gleichung (2.29)) und die zugehörige Winkelfunktion gemäß

$$\underline{u}_x = u_{x,\alpha} + ju_{x,\beta} \quad (\text{A.50})$$

$$u_{x,\alpha} = |\underline{u}_x| \cdot \cos \varphi_x = \frac{2}{3} U_d \cdot \cos \varphi_x \quad (\text{A.51})$$

$$u_{x,\beta} = |\underline{u}_x| \cdot \sin \varphi_x = \frac{2}{3} U_d \cdot \sin \varphi_x \quad (\text{A.52})$$

ersetzt:

$$\begin{aligned} \Delta i_{a,x} &= \frac{2}{3(L_A^2 - L_B^2)} \cdot T_{\text{PWM}} \\ &\cdot \left[ (L_A - L_B \cos(2\gamma)) \frac{2}{3} U_d \cdot \cos \varphi_x \right. \\ &\quad - (L_B \sin(2\gamma)) \frac{2}{3} U_d \cdot \sin \varphi_x \\ &\quad - jL_B \sin(2\gamma) \frac{2}{3} U_d \cdot \cos \varphi_x + jL_A \frac{2}{3} U_d \cdot \sin \varphi_x \\ &\quad \left. + jL_B \cos(2\gamma) \frac{2}{3} U_d \cdot \sin \varphi_x \right] \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

Die Terme werden nun so zusammengefasst, dass die einzelnen Real- und Imaginärteile in der Eulerschen Darstellung

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi) \quad (\text{A.54})$$

zusammengefasst werden können:

$$\begin{aligned} \Delta i_{a,x} &= \frac{4}{9(L_A^2 - L_B^2)} \cdot U_d \cdot T_{\text{PWM}} \\ &\cdot [L_A \cdot \cos \varphi_x - L_B \cos(2\gamma) \cdot \cos \varphi_x - L_B \sin(2\gamma) \cdot \sin \varphi_x \\ &\quad - jL_B \sin(2\gamma) \cdot \cos \varphi_x + jL_A \cdot \sin \varphi_x \\ &\quad + jL_B \cos(2\gamma) \cdot \sin \varphi_x] \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{9(L_A^2 - L_B^2)} \cdot U_d \cdot T_{\text{PWM}} \\
&\quad \cdot [L_A \cos \varphi_x + jL_A \sin \varphi_x \\
&\quad \quad - L_B \cos \varphi_x \cos(2\gamma) + jL_B \sin \varphi_x \cos(2\gamma) \\
&\quad \quad - L_B \sin \varphi_x \sin(2\gamma) - jL_B \cos \varphi_x \sin(2\gamma)] \quad (\text{A.56})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{9(L_A^2 - L_B^2)} \cdot U_d \cdot T_{\text{PWM}} \\
&\quad \cdot [L_A \cos \varphi_x + jL_A \sin \varphi_x \\
&\quad \quad - L_B (\cos \varphi_x - j \sin \varphi_x) \cos(2\gamma) \\
&\quad \quad - L_B (\sin \varphi_x + j \cos \varphi_x) \sin(2\gamma)] \quad (\text{A.57})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{9(L_A^2 - L_B^2)} \cdot U_d \cdot T_{\text{PWM}} \\
&\quad \cdot [L_A (\cos \varphi_x + j \sin \varphi_x) \\
&\quad \quad - L_B (\cos \varphi_x - j \sin \varphi_x) \cos(2\gamma) \\
&\quad \quad - L_B (\cos \varphi_x - j \sin \varphi_x) \cdot j \sin(2\gamma)] \quad (\text{A.58})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{9(L_A^2 - L_B^2)} \cdot U_d \cdot T_{\text{PWM}} \\
&\quad \cdot [L_A \cdot e^{j\varphi_x} - L_B (\cos \varphi_x - j \sin \varphi_x) (\cos(2\gamma) + j \sin(2\gamma))] \quad (\text{A.59})
\end{aligned}$$

$$= \frac{4}{9(L_A^2 - L_B^2)} \cdot U_d \cdot T_{\text{PWM}} \cdot [L_A \cdot e^{j\varphi_x} - L_B \cdot e^{-j\varphi_x} \cdot e^{j2\gamma}] \quad (\text{A.60})$$

Damit ist das Ergebnis mit Einbeziehung der expliziten Darstellung der Zeitabhängigkeit des Rotorlagewinkels:

$$\Delta i_{-a,x} = \frac{4}{9(L_A^2 - L_B^2)} \cdot U_d \cdot T_{\text{PWM}} \cdot [L_A \cdot e^{j\varphi_x} - L_B \cdot e^{j(2\gamma(t) - \varphi_x)}] \quad (\text{A.61})$$



# Symbolverzeichnis

## Abkürzungen

A/D	Analog/Digital	5
ADC	Analog/Digital-Wandler	5
ADSR	Adaptive Direkte Stromregelung	3
AFE	Active Front End	168
ASM	Asynchronmaschine	168
DSP	Digitaler Signal Prozessor	5
FIR	Filter mit endlicher Impulsantwort (Finite Impulse Response)	178
FPGA	Field Programmable Gate Array	5
HMK	Hochleistungs-Modulator-Karte	174
HS-ADC	High Speed - Analog/Digital-Wandler	177
IGBT	Insulated Gate Bipolar Transistor	36
LS	„Least-Squares“= wörtlich „kleinste Quadrate“-gängige Abkürzung des Verfahrens zur Minimierung der Fehlerquadrate	3
LS-Filter	Least-Squares-Filter	113
LS-Verfahren	Least-Squares-Verfahren	113
LSB	Least Significant Bit - das kleinstwertige Bit einer Binarzahl	158
MPC	Model Predictive Control	9
MPC-CCS	Model Predictive Control mit Continuous Control Set	14
MPC-FCS	Model Predictive Control mit Finite Control Set	14
MS/s	Mega Samples per second - Einheit der Abtastrate	133
MSB	Most Significant Bit - das höchstwertige Bit einer Binarzahl	158

PSM	permanentmagneterregte Synchronmaschine	57
PWM	Pulsweitenmodulation	1

## Formelzeichen

### Stromänderungsparameter

$a$	relative Einschaltzeit / Aussteuergrad	5
$A_L$	Aktiver Schaltzustand innerhalb eines Sektors, vom Ursprung aus betrachtet links	52
$A_O$	Aktiver Schaltzustand, rel. zum PWM-Trägersignal oben	48
$A_R$	Aktiver Schaltzustand innerhalb eines Sektors, vom Ursprung aus betrachtet rechts	52
$\underline{a}$	komplexer Operator für die Raumzeigerdarstellung	44
$A_U$	Aktiver Schaltzustand, rel. zum PWM-Trägersignal unten	48
$a_x$	relative Einschaltzeit / Aussteuergrad des Schaltzustands $S_x$	93
$b$	Substitution $b = -T_{AD}$ zur übersichtlicheren Herleitung der Pseudoinversen	143
$\beta$	mechanischer Rotorlagewinkel der Maschine	27
+	Symbol für den High-Zustand einer Halbbrücke	39
-	Symbol für den Low-Zustand einer Halbbrücke	39
$B_x$	Brückenschaltfunktion und Bezeichnung der Halbbrücke $B_x$	36
$b_x$	Halbbrückenaussteuergrad der Halbbrücke $B_x$	40
$Count_{HL}$	PWM-Dreieckssignal, synchron zu den Umschaltzeitpunkten der Leistungshalbleiter	184
$Count_{max}$	Maximum des PWM-Dreieckszählers im FPGA	181
$Count_{Mess}$	PWM-Dreieckssignal, synchron zu den Messwerten	185
$Count_{Mod}$	PWM-Dreieckssignal im FPGA	182

$D_{1H}$	High Side Diode der Halbbrücke B1	38
$D_{1L}$	Low Side Diode der Halbbrücke B1	38
$D_{2H}$	High Side Diode der Halbbrücke B2	38
$D_{2L}$	Low Side Diode der Halbbrücke B2	38
$D_{3H}$	High Side Diode der Halbbrücke B3	38
$D_{3L}$	Low Side Diode der Halbbrücke B3	38
$\delta$	Hilfswinkel zur Berechnung des Mittelpunkt- und Radiusraumzeigers	102
$\Delta i_a$	Stromänderungsparameter in der $\alpha\beta$ -Ebene für einen aktiven Schaltzustand	175
$\Delta i_a$	Stromänderungsparameter für den aktiven Schaltzustand	32
$\Delta i_{a,L}$	Stromänderungsparameter in der $\alpha\beta$ -Ebene für den linken aktiven Schaltzustand	78
$\Delta i_{a,L,k}$	Stromänderungsparameter in der $\alpha\beta$ -Ebene für den linken aktiven Schaltzustand in Takt k	79
$\Delta i_{a,L,M}$	„gemessener“ Stromänderungsparameter in der $\alpha\beta$ -Ebene für den linken aktiven Schaltzustand	97
$\Delta i_{a,R}$	Stromänderungsparameter in der $\alpha\beta$ -Ebene für den rechten aktiven Schaltzustand	78
$\Delta i_{a,R,k}$	Stromänderungsparameter in der $\alpha\beta$ -Ebene für den rechten aktiven Schaltzustand in Takt k	79
$\Delta i_{a,R,M}$	„gemessener“ Stromänderungsparameter in der $\alpha\beta$ -Ebene für den rechten aktiven Schaltzustand	97
$\Delta i_{a,x}$	Stromänderungsparameter in der $\alpha\beta$ -Ebene für den aktiven Schaltzustand x	72
$\Delta i_{a,x,\alpha}$	$\alpha$ -Komponente des Stromänderungsparameters in der $\alpha\beta$ -Ebene für einen aktiven Schaltzustand	86
$\Delta i_{a,x,\beta}$	$\beta$ -Komponente des Stromänderungsparameters in der $\alpha\beta$ -Ebene für den aktiven Schaltzustand $S_x$	86
$\Delta i_{a,x,k}$	Stromänderungsparameter in der $\alpha\beta$ -Ebene für den aktiven Schaltzustand x in Takt k	72

$\Delta i_{a,x}^*$	gedrehter Stromänderungsparameter in der $\alpha\beta$ -Ebene für den aktiven Schaltzustand x	101
$\Delta i_f$	Stromänderungsparameter in der $\alpha\beta$ -Ebene für einen Freilauf-Schaltzustand	72
$\Delta i_f$	Stromänderungsparameter für einen Freilauf-Schaltzustand	32
$\Delta i_{f,\alpha}$	$\alpha$ -Komponente des Stromänderungsparameters in der $\alpha\beta$ -Ebene für einen Freilauf-Schaltzustand	85
$\Delta i_{f,\beta}$	$\beta$ -Komponente des Stromänderungsparameters in der $\alpha\beta$ -Ebene für einen Freilauf-Schaltzustand	86
$\Delta i_{f,k}$	Stromänderungsparameter in der $\alpha\beta$ -Ebene für einen Freilauf-Schaltzustand in Takt k	73
$\frac{d}{dt} i_{a,L}$	Steigung des Stroms des linken aktiven Schaltzustand in der $\alpha\beta$ -Ebene	78
$\frac{d}{dt} i_{a,L,k}$	Steigung des Stroms des linken aktiven Schaltzustand in der $\alpha\beta$ -Ebene in Takt k	79
$\frac{d}{dt} i_{a,R}$	Steigung des Stroms des rechten aktiven Schaltzustand in der $\alpha\beta$ -Ebene	78
$\frac{d}{dt} i_{a,R,k}$	Steigung des Stroms des rechten aktiven Schaltzustand in der $\alpha\beta$ -Ebene in Takt k	79
$\frac{d}{dt} i_{a,x}$	Steigung des Stroms im aktiven Schaltzustand x in der $\alpha\beta$ -Ebene	11
$\frac{d}{dt} i_f$	Steigung des Stroms im Freilauf in der $\alpha\beta$ -Ebene	71
$\left(\frac{di}{dt}\right)_{f,k}$	Steigung des Stroms im Freilauf	30
$\left(\frac{di}{dt}\right)_{f,k+1}$	Steigung des Stroms im Freilauf	30
$\left(\frac{di}{dt}\right)_{a,k}$	Steigung des Stroms im aktiven Schaltzustand	30
$\left(\frac{di}{dt}\right)_{a,k+1}$	Steigung des Stroms im aktiven Schaltzustand	30
$d_x$	Aussteuergrad des Schaltzustands $S_x$	47
<b>E</b>	Einheitsmatrix	65
$f_{AD}$	Abtastfrequenz des Analog-Digital-Wandlers	130
$f_{FPGA}$	Taktfrequenz des FPGA	180

$F_O$	Freilauf, rel. zum PWM-Trägersignal oben	48
$f_{PWM}$	Taktfrequenz der Pulsweitenmodulation (PWM)	28
$F_U$	Freilauf, rel. zum PWM-Trägersignal unten	48
$\gamma$	Rotorlagewinkel - Winkel zwischen der statorfesten $\alpha$ -Achse und der Rotorbezugsachse	27
$g_x$	Schaltsschwelle x	190
$i_0$	Null-Komponente der transformierten Ströme der Maschine im statorfesten ( $\alpha\beta 0$ )-Bezugssystem	66
$i_\alpha$	$\alpha$ -Komponente der transformierten Ströme der Maschine im statorfesten ( $\alpha\beta 0$ )-Bezugssystem	v
$i_\beta$	$\beta$ -Komponente der transformierten Ströme der Maschine im statorfesten ( $\alpha\beta 0$ )-Bezugssystem	vi
$i_d$	d-Komponente der transformierten Ströme der Maschine im rotorfesten ( $dq0$ )-Bezugssystem	191
$i_q$	q-Komponente der transformierten Ströme der Maschine im rotorfesten ( $dq0$ )-Bezugssystem	191
$i_{a,k+1,\alpha}$	Sollwert des Raumzeigers der aktiven Stromänderungsparameter im Takt k+1	93
$i_{a,k+1,\beta}$	Sollwert des Raumzeigers der aktiven Stromänderungsparameter im Takt k+1	93
$\hat{i}_{a,k+1}$	Sollwert des Raumzeigers der aktiven Stromänderungsparameter im Takt k+1	74
$\hat{i}_{a,x,k+1}$	Raumzeiger des Stromänderungsparameters $\Delta \hat{i}_{a,x}$ im Takt k+1	74
$i_e$	Endwert des Stroms, am Ende des aktuellen Schaltzustandsintervalls	132
$i_{e,k}$	Endwert des Stroms, am Ende des Taktes k	30
$i_{e,k+1}$	Endwert des Stroms, am Ende des Taktes k+1	30
$\hat{i}_{e,k+1}$	Raumzeiger des Statorstroms am Ende des Taktes k+1	74
$\hat{i}_{e,k}$	Raumzeiger des Statorstroms am Ende des Taktes k	73
$\hat{i}_{f,k+1}$	Stromraumzeiger zum Ursprung des Hexagons der aktiven Stromänderungsparameter des Taktes k+1	73

$i_L$	Strom in der Induktivität $L$	1
$\mathbf{i}_S$	Matrix der drei Statorströme im Dreiphasensystem	59
$\tilde{\mathbf{i}}_S$	transformierte Matrix der drei Statorströme im statorfesten $(\alpha\beta 0)$ -Bezugssystem	64
$i_S$	Raumzeiger des Statorstroms im statorfesten $(\alpha\beta 0)$ -Bezugssystem	11
$i_x$	Ausgangsstrom der Halbbrücke $B_x$ / Statorstrom der Statorphase x	38
$i_{x,\text{FIR}}$	gefilterter Messwert des Ausgangsstrom der Halbbrücke $B_x$ / Statorstrom der Statorphase x	178
$i_w$	Stromsollwert	5
$i_x$	Stromistwert	5
$k$	Index der k-ten Regelperiode	133
$K_P$	Proportionalverstärkung des PI-Reglers	7
$L$	Induktivität $L$	1
L1	Anschlussklemme L1 der Maschine - Ausgang der Halbbrücke B1	36
L2	Anschlussklemme L2 der Maschine - Ausgang der Halbbrücke B2	36
L3	Anschlussklemme L3 der Maschine - Ausgang der Halbbrücke B3	36
$L_A$	Gleichanteil der Induktivität der Maschine, betrachtet über den Polumfang	62
$\lambda$	magnetischer Leitwert	60
$L_B$	Wechselanteil der Induktivität der Maschine, betrachtet über den Polumfang	62
$L_d$	Induktivität der Maschine in direkte Richtung des Rotorflusses (d-Achse)	7
$L$	Induktivität der Maschine bei isotropen Synchronmaschinen	69
$L_q$	Induktivität der Maschine in Quer-Richtung zum Rotorfluss (q-Achse)	7

$\mathbf{L}_{SA}$	Induktivitätsmatrix der Maschine mit winkelunabhängigen Komponenten im Dreiphasensystem	27
$\tilde{\mathbf{L}}_{SA}$	transformierte Induktivitätsmatrix der Maschine mit winkelunabhängigen Komponenten im statorfesten ( $\alpha\beta 0$ )-Bezugssystem	66
$\frac{d}{dt}\tilde{\mathbf{L}}_{SB}$	zeitliche Ableitung der transformierten Induktivitätsmatrix der Maschine mit winkelabhängigen Komponenten im statorfesten ( $\alpha\beta 0$ )-Bezugssystem	82
$\mathbf{L}_{SB}$	Induktivitätsmatrix der Maschine mit winkelabhängigen Komponenten im Dreiphasensystem	27
$\tilde{\mathbf{L}}_{SB}$	transformierte Induktivitätsmatrix der Maschine mit winkelabhängigen Komponenten im statorfesten ( $\alpha\beta 0$ )-Bezugssystem	66
$\mathbf{L}_{SS}$	Induktivitätsmatrix der Maschine im Dreiphasensystem	60
$\tilde{\mathbf{L}}_{SS}$	Induktivitätsmatrix der Maschine im statorfesten ( $\alpha\beta 0$ )-Bezugssystem	65
$m$	Betrag des Mittelpunktraumzeigers der aktiven Stromänderungsparameter	88
$\mu_{r,\text{Eisen}}$	magnetische Permeabilität in Eisen	61
$\mu_{r,\text{Luft}}$	magnetische Permeabilität in Luft	61
$\underline{m}_x$	Mittelpunktraumzeiger des aktiven Stromänderungsparameters des Schaltzustands $S_x$	88
$\Omega$	Drehzahl	5
$\omega_e$	Fehler der Winkelgeschwindigkeit	12
$\Omega_w$	Sollwert der Drehzahl	5
$\omega_w$	Sollwert der Winkelgeschwindigkeit	13
$p$	Polpaarzahl der Maschine	27

$\Phi$	magnetische Fluss	60
$\varphi_x$	Winkel des Schaltzustandsraumzeiger $\underline{S}_x$	45
$\Psi$	magnetische Flussverkettung	60
$\Psi_{PM}$	Permanentmagnetfluss	58
$\Psi_{PMS,\alpha}$	$\alpha$ -Komponente des transformierten Statorflusses der Maschine im statorfesten $(\alpha\beta 0)$ -Bezugssystem	70
$\Psi_{PMS,\beta}$	$\beta$ -Komponente des transformierten Statorflusses der Maschine im statorfesten $(\alpha\beta 0)$ -Bezugssystem	70
$\Psi_{PMS}$	Matrix des durch den Permanentmagnet verursachten Statorflusses im Dreiphasensystem	60
$\tilde{\Psi}_{PMS}$	Matrix des durch den Permanentmagnet verursachten Statorflusses im statorfesten $(\alpha\beta 0)$ -Bezugssystem	65
$\frac{d}{dt} \tilde{\Psi}_{PMS}$	zeitliche Ableitung der Matrix des durch den Permanentmagnet verursachten Statorflusses im statorfesten $(\alpha\beta 0)$ -Bezugssystem	82
$\underline{\Psi}_{PMS}$	Raumzeiger des vom Permanentmagneten verursachten Statorflusses im statorfesten $(\alpha\beta 0)$ -Bezugssystem	70
$\Psi_S$	Statorflussmatrix im Dreiphasensystem	59
$\Psi_{SS}$	Matrix des durch die Statorströme verursachten Statorflusses im Dreiphasensystem	60
$r$	Betrag des Radiusraumzeigers der aktiven Stromänderungsparameter	88
$\rho$	Hilfswinkel zur Berechnung des Mittelpunkt- und Radiusraumzeigers	102
$R_S$	Widerstand einer Statorwicklungen	59
$\mathbf{R}_S$	Widerstandsmatrix der Statorwicklungswiderstände im Dreiphasensystem	59
$\tilde{\mathbf{R}}_S$	transformierte Widerstandsmatrix der Statorwicklungswiderstände im statorfesten $(\alpha\beta 0)$ -Bezugssystem	65

$L_x$	Radiusraumzeiger des aktiven Stromänderungsparameters des Schaltzustands $S_x$	88
$L_x^*$	gedrehter Radiusraumzeiger des aktiven Stromänderungsparameters des Schaltzustands $S_x$	101
$\sigma$	Sektorindex der Raumzeigersektoren	46
$\sigma_{S,ii}$	Streuterm der Wechselwirkung der i-ten Statorwicklung mit sich selbst	62
$\sigma_{S,ik}$	Streuterm der Wechselwirkung der i-ten Statorwicklung mit der k-ten Statorwicklung	62
$\underline{s}$	Sehne zur Berechnung des Mittelpunkt- und Radiusraumzeigers	102
$S_x$	Schaltzustand $x$ mit $x \in \{\mathbb{N} 1 \dots 6\}$	2
$\underline{S}_x$	Schaltzustandsraumzeiger des Schaltzustands $x$ mit $x \in \{\mathbb{N} 1 \dots 6\}$	45
$SZ_{RL}$	Schaltzustand, relativ zum Sektor rechts bzw. links	53
$SZ_{UO}$	Schaltzustand, relativ zum PWM-Trägersignal „unten“ bzw. „oben“	48
<b>T</b>	Transformationsmatrix vom Dreiphasensystem zum statorfesten $(\alpha\beta 0)$ -Bezugssystem nach Edith Clarke	64
$T_{1H}$	High Side IGBT der Halbbrücke B1	38
$T_{1L}$	Low Side IGBT der Halbbrücke B1	38
$T_{2H}$	High Side IGBT der Halbbrücke B2	38
$T_{2L}$	Low Side IGBT der Halbbrücke B2	38
$T_{3H}$	High Side IGBT der Halbbrücke B3	38
$T_{3L}$	Low Side IGBT der Halbbrücke B3	38
$T_{AD}$	Abtastzeit des Analog-Digital-Wandlers	115
$t_{ADC}$	Messzeitpunkte der 6MS/s A/D-Wandler	183
$T_d$	Verzögerungszeit zwischen Kommutierungszeitpunkt im Modulator und tatsächlichem Kommutierungszeitpunkt in der Halbbrücke	183

$T_{\text{FPGA}}$	Dauer eines Systemtaktes des FPGAs	180
$\Theta$	magnetische Durchflutung	60
$T_{\text{I}}$	Identifikationszeit - Zeit, in der der LS-Schätzers die Steigung identifiziert	v
$\mathbf{T}^{-1}$	Inverse der Transformationsmatrix vom Dreiphasensystem zum statorfesten ( $\alpha\beta 0$ )-Bezugssystem nach Edith Clarke	64
$T_{\text{Lat,ADC}}$	Latenz der A/D-Wandler	185
$T_{\text{Lat,FIR}}$	Latenz des FIR-Filters	178
$T_{\text{Lat,M}}$	Latenz der gesamten Messkette	183
$T_N$	Nachstellzeit des PI-Reglers	7
$T_{\text{f}}$	Ausschaltdauer eines Leistungshalbleiters	30
$T_{\text{a}}$	Einschaltdauer eines Leistungshalbleiters	28
$T_{\text{PWM}}$	Periodendauer der Pulsweitenmodulation	2
$T_{\text{R}}$	Zeit nach der Identifikation, bis zum nächsten Taktbeginn	v
$\text{ADC}_{\text{max}}$	Trigger-Zeitpunkte im Maximum des Dreieckssignals, synchron zu den Messwerten	188
$\text{ADC}_{\text{min}}$	Trigger-Zeitpunkte im Minimum des Dreieckssignals, synchron zu den Messwerten	188
$\text{IR}_{\text{max}}$	Trigger-Zeitpunkte im Maximum des Dreieckssignals, synchron zu den Schalthandlungen der Leistungshalbleiter	188
$\text{PWM}_{\text{max}}$	Trigger-Zeitpunkte im Maximum des PWM-Dreieckssignals	188
$\text{PWM}_{\text{min}}$	Trigger-Zeitpunkte im Minimum des PWM-Dreieckssignals	188
$T_V$	Zeit zur Vorbereitung des LS-Schätzers	v
$T_x$	Einschaltdauer des Schaltzustands $S_x$	47
$u_0$	Null-Komponente der transformierter Spannung der Maschine im statorfesten ( $\alpha\beta 0$ )-Bezugssystem	66

$u_{10}$	Spannung zwischen dem Ausgang der Halbbrücke B1 und dem Nullpunkt des Zwischenkreises	37
$u_{20}$	Spannung zwischen dem Ausgang der Halbbrücke B1 und dem Nullpunkt des Zwischenkreises	37
$u_{30}$	Spannung zwischen dem Ausgang der Halbbrücke B1 und dem Nullpunkt des Zwischenkreises	37
$u_{\alpha}$	$\alpha$ -Komponente der transformierter Spannung der Maschine im statorfesten ( $\alpha\beta 0$ )-Bezugssystem	66
$u_{\beta}$	$\beta$ -Komponente der transformierter Spannung der Maschine im statorfesten ( $\alpha\beta 0$ )-Bezugssystem	66
$U_d$	Zwischenkreisspannung	37
0	Nullpunkt des geteilten Zwischenkreises	37
$u_{DC}$	Eingangsgleichspannung des Tiefsetzstellers	30
$u_g$	gesamte Gegenspannung der Last	30
$u_{i\alpha}$	$\alpha$ -Komponente der Gegenspannung im statorfesten ( $\alpha\beta 0$ )-Bezugssystem	70
$u_{i\beta}$	$\beta$ -Komponente der Gegenspannung im statorfesten ( $\alpha\beta 0$ )-Bezugssystem	70
$\underline{u}_i$	Raumzeiger der Gegenspannung im statorfesten ( $\alpha\beta 0$ )-Bezugssystem	70
$u_L$	Spannung an der Induktivität $L$	1
$u_{Last}$	Spannung der Last	7
$u_{N0}$	Spannung zwischen dem Sternpunkt der Maschine und dem Nullpunkt des Zwischenkreises	38
$\underline{u}$	Raumzeiger der Spannung im statorfesten ( $\alpha\beta 0$ )-Bezugssystem	5
$u_{S1}$	Spannung zwischen dem Ausgang der Halbbrücke B1 und dem Sternpunkt der Maschine	38
$u_{S2}$	Spannung zwischen dem Ausgang der Halbbrücke B1 und dem Sternpunkt der Maschine	38
$u_{S3}$	Spannung zwischen dem Ausgang der Halbbrücke B1 und dem Sternpunkt der Maschine	38

$\mathbf{u}_S$	Matrix der drei Statorspannungen im Dreiphasensystem	59
$\tilde{\mathbf{u}}_S$	transformierte Matrix der drei Statorspannung im statorfesten $(\alpha\beta 0)$ -Bezugssystem	64
$\underline{u}_S$	Raumzeiger der Statorspannung im statorfesten $(\alpha\beta 0)$ -Bezugssystem	71
$\underline{u}_w$	Raumzeiger des Sollwerts der Spannung im statorfesten $(\alpha\beta 0)$ -Bezugssystem	46
$u_{x0}$	Spannung zwischen dem Ausgang einer beliebigen Halbbrücke $B_x$ und dem Nullpunkt des Zwischenkreises	41
$u_{x,\alpha}$	$\alpha$ -Komponente der Statorspannung des Schaltzustands $S_x$ im statorfesten $(\alpha\beta 0)$ -Bezugssystem	86
$u_{x,\beta}$	$\beta$ -Komponente der Statorspannung des Schaltzustands $S_x$ im statorfesten $(\alpha\beta 0)$ -Bezugssystem	86
$\underline{u}_x$	Raumzeiger der Spannung im statorfesten $(\alpha\beta 0)$ -Bezugssystem	45
$w$	Windungszahl	60
$X$	fiktiver Schaltzustand "X" - ausgeblendete Messwerte	186
$x$	Ort $x$ einer Lageregelung	5
$x_w$	Sollwert des Orts $x$ einer Lageregelung	5

### Least-Squares-Verfahren

$\mathbf{A}$	Matrix A	144
$A_{inv,11}(N)$	Element (1,1) der Inversen der Matrix A	146
$A_{inv,12}(N)$	Element (1,2) der Inversen der Matrix A	146
$A_{inv,21}(N)$	Element (2,1) der Inversen der Matrix A	146
$A_{inv,22}(N)$	Element (2,2) der Inversen der Matrix A	146
$\Delta E_N$	Inkrement zur Berechnung der Konstanten der Pseudoinverse für die Berechnung der Endwerte	149

$\Delta S_N$	Inkrement zur Berechnung der Konstanten der Pseudoinverse für die Berechnung der Steigungen	149
$\mathbf{e}$	Fehlervektor	124
$\mathbf{E}_N$	Vektor der Konstanten zur Berechnung des Endwerts in einem Messintervall mit N Messwerten	138
$E_{N,n}$	n-tes Element des Vektors der Konstanten zur Berechnung des Endwerts in einem Messintervall mit N Messwerten	194
$e_n$	Fehler des n-ten Messwerts einer Messreihe	115
$E_N$	Konstanten zur Berechnung des Endwerts in einem Messintervall mit N Messwerten	138
$e_{Q,1}$	Quantisierungsfehler der Startwerte	159
$e_{Q,\Delta}$	Quantisierungsfehler der Inkremente	161
$e_{Q,f}$	Quantisierungsfehler in Abhängigkeit der f Nachkommabits	159
$e_{Q,PSI}$	max. Quantisierungsfehler nach alter Methode	159
$e_{Q,SI}$	max. Quantisierungsfehler nach neuer Methode	159
$f_{add,I}$	<i>zusätzliche</i> Nachkommastellen der Startwerte, um den erhöhten Quantisierungsfehler auszugleichen	161
$f_{add,S}$	<i>zusätzliche</i> Nachkommastellen der Startwerte, um den erhöhten Quantisierungsfehler auszugleichen	160
$f_{prec,I}$	Gesamt-Nachkommastellen der Startwerte, um den erhöhten Quantisierungsfehler auszugleichen	161
$f_{prec,S}$	Gesamt-Nachkommastellen der Startwerte, um den erhöhten Quantisierungsfehler auszugleichen	160
$\Gamma_n$	„natürlicher Wert“ des n-ten Messwerts einer Messreihe	115
$LUT_{PSI}$	Lookup-Tabelle, die alle Elemente der Pseudoinversen enthält (alte Methode)	138
$LUT_{SI}$	Lookup-Tabelle, die die Startwerte und Inkremente zur online-Berechnung der Pseudoinversen enthält (neue Methode)	154

$m$	Zeilenindex der Beobachtermatrix	127
$M_{PSI}$	Anzahl der Elemente der Lookup-Tabelle, die alle Elemente der Pseudoinversen enthält (alte Methode)	141
$M_{SI}$	Anzahl der Speichervariablen zur Berechnung der Elemente der Pseudoinversen nach der vorgestellten neuen Methode	155
$N$	Anzahl aller Messwerte einer Messreihe (Samples pro Schaltzustand)	122
$n$	Spaltenindex der Beobachtermatrix	127
$n$	Index eines Messwerts innerhalb einer Messreihe („Messwertindex“)	122
$N_{\alpha,a}$	Nenner des Terms für $\frac{d}{dt}i_{\alpha}$ aus der Gleichung für $u_{\alpha}$ bei der Herleitung der Stromänderungsparameter	223
$N_{\alpha,b}$	Nenner des Terms für $\frac{d}{dt}i_{\alpha}$ aus der Gleichung für $u_{\beta}$ bei der Herleitung der Stromänderungsparameter	223
$N_{\beta,a}$	Nenner des Terms für $\frac{d}{dt}i_{\beta}$ aus der Gleichung für $u_{\alpha}$ bei der Herleitung der Stromänderungsparameter	217
$N_{\beta,b}$	Nenner des Terms für $\frac{d}{dt}i_{\beta}$ aus der Gleichung für $u_{\beta}$ bei der Herleitung der Stromänderungsparameter	217
$N_{\max}$	Maximale Anzahl an Messwerten pro Schaltzustand	132
$N_{\min}$	Minimale Anzahl an Messwerten pro Schaltzustand ab der ein valides Messergebnis erwartet wird	161
<b>O</b>	Beobachtermatrix	123
<b>O<sup>+</sup></b>	Pseudoinverse der Beobachtermatrix	128
<b>O<sub>N</sub><sup>+</sup></b>	Pseudoinverse der Beobachtermatrix für N Messwerte	137
<b>p</b>	Parametervektor	123
$r_n$	Residuum des n-ten Messwerts einer Messreihe	120
<b>SI<sub>N</sub></b>	Matrix in der neuen Lookup-Tabelle, die für eine bestimmte Messintervall-Länge $N$ die Startwerte und Inkremente für die Berechnung von Steigung und Endwert enthält.	154

$\mathbf{S}_N$	Vektor der Konstanten zur Berechnung der Steigung in einem Messintervall mit N Messwerten	138
$S_{N,n}$	n-tes Element des Vektors der Konstanten zur Berechnung der Steigung in einem Messintervall mit N Messwerten	194
$S_N$	Konstanten zur Berechnung der Steigung in einem Messintervall mit N Messwerten	138
$w_{PSI}$	Wortlänge der Speichervariablen in der Lookup-Tabelle, die alle Elemente der Pseudoinversen enthält (alte Methode)	141
$w_{SI}$	Wortlänge der Speichervariablen zur Berechnung der Elemente der Pseudoinversen nach der vorgestellten neuen Methode	155
$\mathbf{y}$	Messwertvektor	123
$y_n$	n-ter Messwert einer Messreihe	115
$Z_{\alpha,a}$	Zähler des Terms für $\frac{d}{dt}i_\alpha$ aus der Gleichung für $u_\alpha$ bei der Herleitung der Stromänderungsparameter	223
$Z_{\alpha,b}$	Zähler des Terms für $\frac{d}{dt}i_\alpha$ aus der Gleichung für $u_\beta$ bei der Herleitung der Stromänderungsparameter	223
$Z_{\beta,a}$	Zähler des Terms für $\frac{d}{dt}i_\beta$ aus der Gleichung für $u_\alpha$ bei der Herleitung der Stromänderungsparameter	217
$Z_{\beta,b}$	Zähler des Terms für $\frac{d}{dt}i_\beta$ aus der Gleichung für $u_\beta$ bei der Herleitung der Stromänderungsparameter	217



# Abbildungsverzeichnis

1.1	Prinzipieller Stromverlauf während einer halben Taktperiode . . . . .	2
1.2	Struktur einer konventionellen Kaskadenregelung . . . . .	5
1.3	Blockschaltbild einer linearen Stromregelung für einen Tiefsetzsteller . . . . .	7
1.4	Klassifizierung von Antriebsregelungsverfahren . . . . .	8
1.5	Prinzip der Deabeat-Regelung . . . . .	10
1.6	Prädiktiver Hystereseregler . . . . .	11
1.7	Prädiktive Trajektorienregelung . . . . .	13
1.8	Modellprädiktive Regelung . . . . .	14
1.9	Überblick Methoden zur Stromsteigungsmessung . . . . .	15
1.10	in die Leiterplatte integrierte planare Sensorspule . . . . .	18
1.11	Prinzip der „Easy Current Slope Detection“ . . . . .	21
1.12	Struktureller Aufbau des Buches . . . . .	23
2.1	$L(\gamma)$ anisotrope Synchronmaschine . . . . .	27
2.2	Funktionsprinzip der Adaptiven Direkten Stromregelung . . . . .	30
2.3	Blockschaltbild der Adaptiven Direkten Stromregelung für einen Tiefsetzsteller . . . . .	34
2.4	Drehstrombrückenschaltung mit IGBTs . . . . .	38
2.5	Drehstrombrückenschaltung mit idealen Wechselschaltern . . . . .	39
2.6	Brückenschaltfunktion . . . . .	41
2.7	Schaltzustände der Drehstrombrückenschaltung in Raumzeigerdarstellung . . . . .	46
2.8	Raumzeigermodulation mit Trägerverfahren . . . . .	48
3.1	Wicklungsanordnung und Bezugssysteme einer PSM . . . . .	57
3.2	Ersatzschaltbild einer symmetrischen PSM . . . . .	59
3.3	Winkelabhängigkeit der Induktivität der Synchronmaschine . . . . .	61
3.4	Stromänderungsparameter einer isotropen Synchronmaschine . . . . .	72

3.5	Stromänderungsparameter ohne Abzug der Stromänderung im Freilauf einer isotropen Synchronmaschine . . . . .	77
3.6	Konstruktion des Freilaufparameters aus den aktiven Stromänderungsparametern . . . . .	78
3.7	Stromänderungsparameter einer anisotropen Synchronmaschine . . . . .	90
3.8	Regelungskonzept einer anisotropen Synchronmaschine . . . . .	92
3.9	Berechnung aller sechs aktiver Stromänderungsparameter einer anisotropen Synchronmaschine im Takt $k$ . . . . .	94
3.10	Berechnung des Freilaufparameters aus den Stromänderungen der aktiven Schaltzustände bei der anisotropen Synchronmaschine . . . . .	98
3.11	Berechnung des Mittelpunktraumzeigers . . . . .	101
3.12	Berechnung aller sechs aktiver Stromänderungsparameter einer anisotropen Synchronmaschine im Takt $k$ . . . . .	108
3.13	Blockschaltbild der Adaptiven Direkten Stromregelung für anisotrope Synchronmaschinen . . . . .	111
4.1	Messwerte mit überlagertem Fehler . . . . .	116
4.2	Kurven-Fit mit einem Polynoms 1. Ordnung . . . . .	118
4.3	Illustration der Unterschiede in der Interpretation der Messreihe aus Abbildung 4.1 durch die Wahl unterschiedlicher Modellfunktionen . . . . .	120
4.4	Definition Residuum . . . . .	121
4.5	Prinzipielle Darstellung der Messwerte während einer halben Taktperiode . . . . .	132
4.6	Detaildarstellung der Struktur der Lookup-Tabelle $LUT_{PSI}$ , in der alle Elemente $E_{N,n}$ zur Berechnung der <b>Endwerte</b> aller $N$ Pseudoinversen gespeichert sind. . . . .	151
4.7	Detaildarstellung der Struktur der Lookup-Tabelle $LUT_{PSI}$ , in der alle Elemente $S_{N,n}$ zur Berechnung der <b>Steigungen</b> aller $N$ Pseudoinversen gespeichert sind. . . . .	152
4.8	Struktur einer binären Festkommazahl . . . . .	157
5.1	Übersichtsschaltbild der Leistungselektronik des Prüfstandsbaus	168
5.2	Foto des Maschinensatzes . . . . .	171

---

5.3	Foto der Prüfstandsumrichter . . . . .	171
5.4	Foto des gesamten Prüfstands . . . . .	172
5.5	Prüfstands Aufbau: Signalverarbeitung . . . . .	173
5.6	Filterung der Messwerte . . . . .	179
5.7	Darstellung des Zeitverhaltens (Latenz) . . . . .	183
5.8	Zuordnung der Messwerte zu den Schaltzuständen . . . . .	187
5.9	Darstellung des Zeitverhaltens (Trigger) . . . . .	188
5.10	Sortierung der Halbbrückenaussteuergrade . . . . .	191
5.11	Messung der Mittelpunktraumzeiger . . . . .	196
5.12	Filterung der Beträge der Mittelpunkt- und Radiusraumzeiger . . .	197
6.1	Vergleich der Steigungsmessung mittels LS-Schätzer mit Matlab .	201
6.2	Vergleich der Steigungsmessung mittels LS-Schätzer mit Matlab für kurze Messintervalle . . . . .	203
6.3	Messung der Endwertberechnung mittels LS-Schätzer . . . . .	205
6.4	Vergleich der gemessenen Stromänderungsparameter und der berechneten . . . . .	206
6.5	Vergleich der gemessenen Stromänderungsparameter und der berechneten in Raumzeigerdarstellung (250 Messwerte) . . . . .	208
6.6	Vergleich der gemessenen Stromänderungsparameter und der berechneten in Raumzeigerdarstellung (10 Messwerte) . . . . .	210



# Tabellenverzeichnis

2.1	Schaltzustände der Drehstrombrückenschaltung . . . . .	43
2.2	Tabelle der acht möglichen Raumzeiger der Drehstrombrückenschaltung . . . . .	45
2.3	Schaltspiele in den einzelnen Sektoren gemäß der verwendeten Modulation . . . . .	50
2.4	Zusammenhang der Sektoren mit der Reihenfolge der Brückenumschaltungen . . . . .	52
2.5	Zuordnung der absoluten Schaltzustände zu den relativen Schaltzuständen $SZ_{UO}$ und $SZ_{RL}$ . . . . .	53
4.1	Zusätzliche Nachkommastellen zur Reduzierung des kumulativen Quantisierungsfehlers in Abhängigkeit der Anzahl der Messwerte einer Messreihe . . . . .	162
5.1	Kenndaten der Belastungsmaschine . . . . .	169
5.2	Kenndaten der anisotropen Synchronmaschine (Prüfling) . . . . .	170
5.3	Kenndaten des verwendeten FPGAs Cyclone IV EP4CE40F23C6 . . . . .	175
5.4	Abbildung der Halbbrückenaussteuergrade auf den Sektorindex und die sortierten Schaltschwellen $g_1 \leq g_2 \leq g_3$ . . . . .	190



# Literaturverzeichnis

## Eigene Veröffentlichungen

- [E1] A. LISKE, F. STAMER und M. BRAUN, „Easy current slope detection for low cost implementation of the direct adaptive current control for DC-DC-converters,“ in *IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE)*, Montreal, Kanada, September 2015, S. 180–186.
- [E2] S. DECKER, A. LISKE, D. SCHWEIKER, J. KOLB und M. BRAUN, „Measurement of two-level inverter induced current slopes at high switching frequencies for control and identification algorithms of electrical machines,“ in *International Power Electronics Conference (IPEC - ECCE Asia)*, Niigata, Japan, Mai 2018, S. 2848–2853.
- [E3] A. LISKE, S. DECKER und M. BRAUN, „Resource optimal FPGA implementation of a Least-Squares-Estimator for fast and robust on-line measurement of current slope and absolute value,“ in *European Conference on Power Electronics and Applications (EPE '19 ECCE Europe)*, Genua, Italien, September 2019.
- [E4] A. LISKE, „Messung der taktfrequenten Stromsteigungen in Stromrichterschaltungen,“ *eingeladener Vortrag beim ECPE-Cluster-Seminar „Echtzeitanalyse und Leistungsmessung von elektrischen Maschinen und Stromrichtern“*, März 2020, Aschaffenburg, Deutschland.
- [E5] S. DECKER, J. STOSS, A. LISKE, M. BRODATZKI, J. KOLB und M. BRAUN, „Online Parameter Identification of Permanent Magnet Synchronous Machines with Nonlinear Magnetics based on the Inverter Induced Current Slopes and the dq-System Equations,“ in *European Conference on Power Electronics and Applications (EPE '19 ECCE Europe)*, Genua, Italien, September 2019.

- [E6] A. LISKE, P. HOFMEIER und M. BRAUN, „Extended straightforward current control for permanent magnet synchronous machines,“ in *European Conference on Power Electronics and Applications (EPE '13 ECCE Europe)*, Lille, Frankreich, September 2013.
- [E7] A. LISKE und M. BRAUN, „Direct Adaptive Current Control - A universal current control scheme for electrical machines,“ in *The 40th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (IECON)*, Dallas, TX, USA, November 2014.
- [E8] A. LISKE und M. BRAUN, „Direct adaptive current control in space vector overmodulation mode,“ in *12th International Conference on Power Electronics and Drive Systems (PEDS)*, Honolulu, HI, USA, Dezember 2017, S. 715–720.
- [E9] A. LISKE, „Stromrichtersteuerungstechnik,“ Manuskript zur gleichnamigen Vorlesung, Elektrotechnisches Institut (ETI), KIT, Karlsruhe, 2010-2020.
- [E10] A. LISKE, „Schaltungstechnik in der Industrieelektronik,“ Manuskript zur gleichnamigen Vorlesung, Elektrotechnisches Institut (ETI), KIT, Karlsruhe, 2010-2019.

## Studentische Arbeiten

- [S1] F. STAMER, *Aufbau eines Stromrichters mit Siliziumkarbid-Mosfets und Inbetriebnahme mit der direkten adaptiven Stromregelung*. Masterarbeit, Elektrotechnisches Institut, Karlsruher Institut für Technologie, 2015.
- [S2] D. SCHWEIKER, *Vergleich verschiedener Verfahren zur Identifikation der Stromsteigungen in leistungselektronischen Schaltungen*. Masterarbeit, Elektrotechnisches Institut, Karlsruher Institut für Technologie, 2017.
- [S3] D. MÜLLER, *Implementierung eines adaptiven Stromregelverfahrens in MatLab/Simulink*. Diplomarbeit, Elektrotechnisches Institut, Karlsruher Institut für Technologie, 2011.

- [S4] P. HOFMEIER, *Adaptives Stromregelverfahren für permanentmagneterregte Synchronmaschinen mit Reluktanz*. Diplomarbeit, Elektrotechnisches Institut, Karlsruher Institut für Technologie, 2012.
- [S5] M. ALBRECHT, *Inbetriebnahme eines neuen, adaptiven Stromregelverfahrens*. Diplomarbeit, Elektrotechnisches Institut, Karlsruher Institut für Technologie, 2014.
- [S6] R. KEMPF, *Implementierung eines echtzeitfähigen Verfahrens zur Identifikation von Stromsteigungen für eine prädiktive Regelung*. Diplomarbeit, Elektrotechnisches Institut, Karlsruher Institut für Technologie, 2015.
- [S7] T. HENGRICH, *Aufbau und Inbetriebnahme eines Prüfstandes zur Stromsteigungsidentifikation in Stromrichtern*. Masterarbeit, Elektrotechnisches Institut, Karlsruher Institut für Technologie, 2019.
- [S8] I. GEORGIEV, *Realisierung der Direkten Adaptiven Stromregelung mit einem Mikrocontroller*. Bachelorarbeit, Elektrotechnisches Institut, Karlsruher Institut für Technologie, 2016.
- [S9] S. MERSCHKE, *Realisierung der Direkten Adaptiven Stromregelung mit einem Mikrocontroller*. Bachelorarbeit, Elektrotechnisches Institut, Karlsruher Institut für Technologie, 2014.
- [S10] M. HECHLER, *Ermittlung der Lage und Drehzahl permanentmagneterregter Synchronmaschinen aus den gemessenen, taktfrequenten Stromsteigungen*. Masterarbeit, Elektrotechnisches Institut, Karlsruher Institut für Technologie, 2019.

## Datenblätter und Applikationshinweise

- [D1] *dsPIC30F3010/3011 Data Sheet, High-Performance, 16-Bit Digital Signal Controllers*, Microchip Technology Inc., 2355 West Chandler Blvd., Chandler, Arizona, USA 85224-6199, 2010.

- [D2] *2SB 3 Schnelldrehende Prüfstandsmaschinen - Betriebsanleitung*, WITTUR Electric Drives GmbH, Offenburger Straße 3, 01189 Dresden, Deutschland, 2008.
- [D3] *Wittur 2SB 3-16.D-50I.44-1JLN-f6Z - Datenblatt*, WITTUR Electric Drives GmbH, Offenburger Straße 3, 01189 Dresden, Deutschland, 2008.
- [D4] *Skiip 513GD122-3DUL*, SEMIKRON Elektronik GmbH & Co. KG., Sigmundstr. 200, 90431 Nürnberg, Deutschland, 2007.
- [D5] *DSP TMS320C6748 Technical Reference Manual (Rev. C)*, Texas Instruments Incorporated, P.O. Box 660199 Dallas, Texas 75266-0199, USA, 2016.
- [D6] *DSP TMS320C6748 - Fixed- and Floating-Point DSP datasheet (Rev. G)*, Texas Instruments Incorporated, P.O. Box 660199 Dallas, Texas 75266-0199, USA, 2017.
- [D7] *EP4CE40F23C6 Datasheet*, Altera Corporation, 101 Innovation Drive, San Jose, CA 95134, USA, 2016.
- [D8] *Cyclone IV Device Handbook*, Altera Corporation, 101 Innovation Drive, San Jose, CA 95134, USA, 2016.
- [D9] *Current Transducer LA 100-P*, LEM International SA, Chemin des Aulx 8, P.O. Box 35, CH 1228 Plan les Ouates, 2018.
- [D10] *THS1206: 12-Bit, 6 MSPS, Simultaneous Sampling Analog-to-Digital Converter (Rev. H)*, Texas Instruments Incorporated, P.O. Box 660199 Dallas, Texas 75266-0199, USA.

## Fremdliteratur

- [1] F. BECKER, *Ein neues adaptives Verfahren zur hochdynamischen Stromregelung*. Dissertation, Elektrotechnisches Institut, Karlsruher Institut für Technologie, 2011.

- 
- [2] S. ZIEGLER, R. C. WOODWARD, H. H.-C. IU und L. J. BORLE, „Current Sensing Techniques: A Review,“ *IEEE Sensors Journal*, Jg. 9, S. 354–376, 2009.
- [3] S. IYER und M. OLJACA, „High Accuracy AC Current Measurement Reference Design Using PCB Rogowski Coil Sensor,“ in *TI Designs*, Texas Instruments Incorporated, Juli 2016.
- [4] Y. XUE, J. LU, Z. WANG, L. M. TOLBERT, B. J. BLALOCK und F. WANG, „A compact planar Rogowski coil current sensor for active current balancing of parallel-connected Silicon Carbide MOSFETs,“ in *IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE)*, Pittsburgh, PA, USA, September 2014, S. 4685–4690.
- [5] L. ZHAO, J. D. VAN WYK und W. G. ODENDAAL, „Planar embedded pick-up coil sensor for integrated power electronic modules,“ in *19th Annual IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC '04)*, Anaheim, CA, USA, Februar 2004, S. 945–951.
- [6] P.-H. LIU, Y. YAN, F. C. LEE und P. MATTAVELLI, „External ramp autotuning for current mode control of switching converters,“ in *28th Annual IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC '13)*, Long Beach, CA, USA, März 2013, S. 276–280.
- [7] M. SCHRÖDL, „Sensorless Control of Permanent Magnet Synchronous Motors,“ *Electric Machines & Power Systems*, Jg. 22, Nr. 2, S. 173–185, 1994.
- [8] M. SCHRÖDL, „Sensorless Control of AC Machines at Low Speed and Standstill Based on the „INFORM“ Method,“ in *IEEE Industry Applications Conference Thirty-First IAS Annual Meeting*, San Diego, CA, USA, Oktober 1996, S. 270–277.
- [9] M. SCHRÖDL und C. SIMETZBERGER, „Sensorless Control of PM Synchronous Motors Using a Predictive Current Controller with Integrated INFORM and EMF Evaluation,“ in *Power Electronics and Motion Control Conference (EPE-PEMC)*, Poznan, Polen, September 2008, S. 2275–2282.

- [10] Y. DUAN und M. SUMNER, „A novel current derivative measurement using recursive least square algorithms for sensorless control of permanent magnet synchronous machine,“ in *7th International Power Electronics and Motion Control Conference (ECCE Asia)*, Harbin, China, Juni 2012, S. 1193–1200.
- [11] Q. GAO, G. ASHER, S. M. und P. MAKYS, „Sensorless Control of Induction Machines, including Zero Frequency using only Fundamental PWM Excitation,“ in *32nd Annual Conference on IEEE Industrial Electronics (IECON)*, Paris, Frankreich, November 2006, S. 793–798.
- [12] D. HIND, C. LI, M. SUMNER und C. GERADA, „Realising robust low speed sensorless PMSM control using current derivatives obtained from standard current sensors,“ in *IEEE International Electric Machines and Drives Conference (IEMDC)*, Miami, FL, USA, Mai 2017.
- [13] E. ROBEISCHL und M. SCHRÖDL, „Optimized INFORM Measurement Sequence for Sensorless PM Synchronous Motor Drives With Respect to Minimum Current Distortion,“ *IEEE Transactions on Industry Applications*, Jg. 40, S. 591–598, 2004.
- [14] S. DECKER, J. RICHTER und M. BRAUN, „Predictive current control and online parameter identification of interior permanent magnet synchronous machines,“ in *18th European Conference on Power Electronics and Applications (EPE'16 ECCE Europe)*, Karlsruhe, Deutschland, September 2016.
- [15] K. WANG, J. CHIASSON, M. BODSON und L. M. TOLBERT, „An Online Rotor Time Constant Estimator for the Induction Machine,“ *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Jg. 15, S. 339–348, 2007.
- [16] T. M. WOLBANK, P. NUSSBAUMER, H. CHEN und P. E. MACHEINER, „Non-invasive detection of rotor cage faults in inverter fed induction machines at no load and low speed,“ in *IEEE International Symposium on Diagnostics for Electric Machines, Power Electronics and Drives (SDEMPED)*, Cargèse, Frankreich, September 2009.

- [17] M. GANCHEV, C. KRAL und T. WOLBANK, „Identification of sensorless rotor temperature estimation technique for Permanent Magnet Synchronous Motor,“ in *International Symposium on Power Electronics, Electrical Drives, Automation and Motion (SPEEDAM)*, Sorrento, Italien, Juni 2012, S. 38–43.
- [18] J. WEIGOLD und M. BRAUN, „Predictive Current Control Using Identification of Current Ripple,“ *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Jg. 55, S. 4346–4353, 2008.
- [19] J. WEIGOLD, *Ein neues aufwandsarmes Verfahren zur hochdynamischen Stromregelung für permanenterregte Synchronmaschinen*. Dissertation, Elektrotechnisches Institut, Universität Karlsruhe (TH), 2009.
- [20] F. BECKER, T. LANNERT und M. BRAUN, „An Improved Adaptive Current Control for D.C.-D.C. Converters Based on Current Slope Detection,“ in *IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT)*, Vina del Mar, Chile, März 2010, S. 70–75.
- [21] F. BECKER, H. ENNADIFI und M. BRAUN, „Straightforward Current Control - One Step Controller Based on Current Slope Detection,“ *EPE Journal*, Jg. 22, Januar 2012.
- [22] L. YUNBO, X. YONGHAI und X. YUNFEI, „A MMC hysteresis current control method based on current slope,“ in *IECON 2017 - 43rd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, Peking, China, Oktober 2017, S. 577–582.
- [23] X. JING, P. K. MOK und M. C. LEE, „Current-slope-controlled adaptive-on-time DC-DC converter with fixed frequency and fast transient response,“ in *2011 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, Rio de Janeiro, Brasilien, Mai 2011, S. 1908–1911.
- [24] J. WEIGOLD und M. BRAUN, „Robust Predictive Dead-Beat Controller for Buck Converters,“ in *12th International Power Electronics and Motion Control Conference (PEMC)*, Portoroz, Slovenien, September 2006, S. 951–956.

- [25] O. FÖLLINGER, U. KONIGORSKI, B. LOHMANN, G. ROPPENECKER und A. TRÄCHTLER, *Regelungstechnik, Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*, 12., überarbeitete Auflage. VDE Verlag GmbH, 2016, ISBN: 9783800742028.
- [26] H. LUTZ und W. WENDT, *Taschenbuch der Regelungstechnik*, 10., ergänzte Auflage. Europa-Lehrmittel, 2014, ISBN: 380855679X.
- [27] M. BRAUN, „Regelung elektrischer Antriebe,“ Skriptum zur gleichnamigen Vorlesung, Elektrotechnisches Institut (ETI), KIT, Karlsruhe, 2015.
- [28] D. SCHRÖDER, *Elektrische Antriebe - Regelung von Antriebssystemen*, 3., bearb. Aufl. Springer-Verlag, 2009, ISBN: 978-3-5408-9612-8.
- [29] T. GEMASSMER, J. RICHTER, M. SCHNARRENBERGER und M. BRAUN, „High Dynamic Rotor Oriented Current Control for Permanent Magnet Synchronous Machines with Saturation Characteristics,“ in *International Exhibition and Conference for Power Electronics, Intelligent Motion, Renewable Energy and Energy Management (PCIM Europe)*, Nürnberg, Deutschland, Mai 2014.
- [30] J. RICHTER, T. GEMASSMER und M. DOPPELBAUER, „Predictive current control of saturated cross-coupled permanent magnet synchronous machines,“ in *International Symposium on Power Electronics, Electrical Drives, Automation and Motion (SPEEDAM)*, Ischia, Italy, Juni 2014, S. 830–835.
- [31] T. GEMASSMER, *Effiziente und dynamische Drehmomenteinprägung in hoch ausgenutzten Synchronmaschinen mit eingebetteten Magneten*. Dissertation, Elektrotechnisches Institut, Karlsruher Institut für Technologie, KIT Scientific Publishing, 2015, ISBN: 978-3-7315-0366-8.
- [32] U. NUSS, *Hochdynamische Regelung elektrischer Antriebe*. VDE-Verlag, 2010, ISBN: 978-3-8007-3218-0.

- 
- [33] P. CORTES, M. P. KAZMIERKOWSKI, R. M. KENNEL, D. E. QUEVEDO und J. RODRIGUEZ, „Predictive Control in Power Electronics and Drives,“ *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Jg. 55, Nr. 12, S. 4312–4324, 2008.
- [34] B.-J. KANG und C.-M. LIAW, „A robust hysteresis current-controlled PWM inverter for linear PMSM driven magnetic suspended positioning system,“ *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Jg. 48, Nr. 5, S. 956–967, 2001.
- [35] R. KENNEL und A. LINDER, „Predictive control of inverter supplied electrical drives,“ in *31st Annual Power Electronics Specialists Conference (PESC)*, Galway, Ireland, Juni 2000, S. 761–766.
- [36] I. LAPTEV, *Direkte Sliding-Mode-Stromregelung von Vorschubantrieben*. Dissertation, Universität Stuttgart, Fraunhofer-Verlag, 2017, ISBN: 978-3-8396-1243-9.
- [37] V. I. UTKIN, „Sliding mode control design principles and applications to electric drives,“ *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Jg. 40, Nr. 1, S. 23–36, 1993.
- [38] S. LI und H. GU, „Fuzzy Adaptive Internal Model Control Schemes for PMSM Speed-Regulation System,“ *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, Jg. 8, Nr. 4, S. 767–779, 2012.
- [39] Y.-S. KUNG und M.-H. TSAI, „FPGA-Based Speed Control IC for PMSM Drive With Adaptive Fuzzy Control,“ *IEEE Transactions on Power Electronics*, Jg. 22, Nr. 6, S. 2476–2486, 2007.
- [40] N. VAFAMAND, M. H. KHOOBAN, T. DRAGICEVIC und F. BLAABJERG, „Networked Fuzzy Predictive Control of Power Buffers for Dynamic Stabilization of DC Microgrids,“ *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Jg. 66, Nr. 2, S. 1356–1362, 2019.
- [41] J. HOLTZ und S. STADTFELD, „A predictive controller for the stator current vector of AC machines fed from a switched voltage source,“ in *International Power Electronics Conference (IPEC)*, Tokyo, Japan, März 1983, S. 1665–1675.

- [42] M. DEPENBROCK, „Direct self-control (DSC) of inverter-fed induction machine,“ *IEEE Transactions on Power Electronics*, Jg. 3, Nr. 4, S. 420–429, 1988.
- [43] E. FLACH, R. HOFFMANN und P. MUTSCHLER, „Direct mean torque control of an induction motor,“ in *7th European Conference on Power Electronics and Applications (EPE)*, Trondheim, Norwegen, September 1997, S. 672–677.
- [44] I. TAKAHASHI und T. NOGUCHI, „A New Quick-Response and High-Efficiency Control Strategy of an Induction Motor,“ *IEEE Transactions on Industry Applications*, Jg. IA-22, Nr. 5, S. 820–827, 1986.
- [45] P. MUTSCHLER, „A new speed-control method for induction motors,“ in *PCIM Europe: International Intelligent Motion Conference*, Nürnberg, Deutschland, 1998.
- [46] A. FAVATO, P. G. CARLET, F. TOSO und S. BOLOGNANI, „A Novel Formulation of Continuous Control Set MPC for Induction Motor Drives,“ in *IEEE International Electric Machines & Drives Conference (IEMDC)*, San Diego, CA, USA, Dezember 2019, S. 2196–2202.
- [47] S. WENDEL, B. HAUCKE-KORBER, A. DIETZ und R. KENNEL, „Cascaded Continuous and Finite Model Predictive Speed Control for Electrical Drives,“ in *20th European Conference on Power Electronics and Applications (EPE'18 ECCE Europe)*, Riga, Lettland, September 2018.
- [48] S. HANKE, O. WALLSCHEID und J. BÖCKER, „Continuous-Control-Set Model Predictive Control with Integrated Modulator in Permanent Magnet Synchronous Motor Applications,“ in *IEEE International Electric Machines & Drives Conference (IEMDC)*, San Diego, CA, USA, Mai 2019, S. 2210–2216.
- [49] P. G. CARLET, F. TOSO, A. FAVATO und S. BOLOGNANI, „A speed and current cascade Continuous Control Set Model Predictive Control architecture for synchronous motor drives,“ in *IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE)*, Baltimore, MD, USA, September 2019, S. 5682–5688.

- 
- [50] J. RODRIGUEZ, P. CORTES, R. KENNEL und M. P. KAZMIERKOWSKI, „Model predictive control – a simple and powerful method to control power converters,“ in *IEEE 6th International Power Electronics and Motion Control Conference*, Wuhan, China, Mai 2009.
- [51] P. KARAMANAKOS, T. GEYER und S. MANIAS, „Direct Model Predictive Current Control Strategy of DC–DC Boost Converters,“ *IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics*, Jg. 1, Nr. 4, S. 337–346, 2013.
- [52] F. WANG, S. A. DAVARI, Z. CHEN, Z. ZHANG, D. A. KHABURI, J. RODRIGUEZ und R. KENNEL, „Finite Control Set Model Predictive Torque Control of Induction Machine With a Robust Adaptive Observer,“ *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Jg. 64, Nr. 4, S. 2631–2641, 2017.
- [53] A. A. AHMED, B. K. KOH und Y. I. LEE, „A Comparison of Finite Control Set and Continuous Control Set Model Predictive Control Schemes for Speed Control of Induction Motors,“ *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, Jg. 14, Nr. 4, S. 1334–1346, 2018.
- [54] E. GARAYALDE, I. AIZPURU, U. IRAOLA, I. SANZ, C. BERNAL und E. OYARBIDE, „Finite Control Set MPC vs Continuous Control Set MPC Performance Comparison for Synchronous Buck Converter Control in Energy Storage Application,“ in *7th International Conference on Clean Electrical Power (ICCEP)*, Otranto, Italy, Juli 2019, S. 490–495.
- [55] G. FOO und M. F. RAHMAN, „Sensorless Sliding-Mode MTPA Control of an IPM Synchronous Motor Drive Using a Sliding-Mode Observer and HF Signal Injection,“ *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Jg. 57, Nr. 4, S. 1270–1278, 2010.
- [56] A. A. AHMED, R. B. AHMAD, A. YAHYA, H. H. TAHIR und J. QUINLAN, „Variable Structure System with Sliding Mode Controller,“ *Procedia Engineering*, Jg. 53, S. 441–452, 2013.

- [57] P. C. HANSEN, V. PEREYRA und G. SCHERER, *Least Squares Data Fitting with applications*. Johns Hopkins Univ. Press, 2013, ISBN: 978-1421407869.
- [58] C. L. LAWSON und R. J. HANSON, *Solving least squares problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1995, ISBN: 9781611971217.
- [59] F. BECKER, H. ENNADIFI und M. BRAUN, „Straightforward Current Control - One Step Controller Based on Current Slope Detection,“ in *14th European Conference on Power Electronics and Applications (EPE)*, Birmingham, UK, September 2011.
- [60] G. MÜLLER, *Grundlagen elektrischer Maschinen*. John Wiley & Sons, Limited, 1994, ISBN: 978-3527283903.
- [61] G. MÜLLER und B. PONICK, *Theorie elektrischer Maschinen*. John Wiley & Sons, Limited, 2009, ISBN: 978-3-5274-0526-8.
- [62] H. SPÄTH, *Elektrische Maschinen, Eine Einführung in die Theorie des Betriebsverhaltens*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1973, ISBN: 978-3-540-06349-0.
- [63] H. SPÄTH, *Steuerverfahren für Drehstrommaschinen, Theoretische Grundlagen*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1983, ISBN: 978-3-642-82038-0.
- [64] D. SCHRÖDER, *Elektrische Antriebe - Grundlagen*, 4., erw. Aufl. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009, ISBN: 978-3-642-02989-9.
- [65] E. CLARKE, „Problems Solved by Modified Symmetrical Components, Part I: Unsymmetrical Circuits, Faults, and Open Conductors,“ *General Electric Review*, Nr. Vol. 41, Nr.11, S. 488–494, 1938.
- [66] E. CLARKE, „Problems Solved by Modified Symmetrical Components, Part II: Open-Delta and Scott-Connected Transformer and Autotransformer Banks,“ *General Electric Review*, Nr. Vol. 41, Nr.12, S. 545–549, 1938.
- [67] E. CLARKE, *Circuit Analysis of A-C Power Systems*. J. Wiley & sons, Incorporated, 1943.

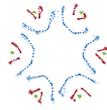
- 
- [68] C. J. O'ROURKE, M. M. QASIM, M. R. OVERLIN und J. L. KIRTLEY, „A Geometric Interpretation of Reference Frames and Transformations: dq0, Clarke, and Park,“ *IEEE Transactions on Energy Conversion*, Nr. 34, S. 2070–2083, 2019.
- [69] F. JENNI und D. WÜEST, *Steuerverfahren für selbstgeführte Stromrichter*. vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich und B.G. Teubner Stuttgart, 1995, ISBN: 3-7281-2141-X (vdf), 3-519-06176-7 (Teubner).
- [70] J. SPECOVIVUS, *Grundkurs Leistungselektronik, Bauelemente, Schaltungen und Systeme*, 3. Auflage. Vieweg+Teubner Verlag, 2009, ISBN: 978-3-8348-9995-8.
- [71] R. FISCHER, *Elektrische Maschinen*, 12., neu bearb. Aufl. Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, 2004, ISBN: 978-3-4462-2693-7.
- [72] M. DOPPELBAUER, „Entwurf elektrischer Maschinen,“ Manuskript zur gleichnamigen Vorlesung, Elektrotechnisches Institut (ETI), KIT, Karlsruhe, 2013-2020.
- [73] J. VOGEL, U. RIEFENSTAHL und W. SCHAUER, *Elektrische Antriebstechnik*, 6., vollst. überarb. Aufl. Hüthig, 1998, ISBN: 3778526499.
- [74] D. SCHRÖDER und M. BUSS, *Intelligente Verfahren, Identifikation und Regelung nichtlinearer Systeme*. Springer Vieweg, 2017, ISBN: 978-3-662-55326-8.
- [75] P. LANDSMANN, D. PAULUS, P. STOLZE und R. KENNEL, „Saliency Based Encoderless Predictive Torque Control without Signal Injection for a reluctance synchronous machine,“ in *14th International Power Electronics and Motion Control Conference (EPE-PEMC)*, Ohrid, Mazedonien, September 2010, S. 3029–3034.
- [76] P. LANDSMANN, C. M. HACKL und R. KENNEL, „Eliminating all Machine Parameters in Encoderless Predictive Torque Control without Signal Injection,“ in *IEEE International Electric Machines & Drives Conference (IEMDC)*, Niagara Falls, ON, Kanada, Mai 2011, S. 1259–1264.

- [77] M. BRODATZKI, J. RICHTER, J. KOLB und M. BRAUN, „Position and Speed Estimation Algorithm for Permanent Magnet Synchronous Machines Considering Nonlinear Magnetic Effects,“ in *10th International Conference on Power Electronics (ECCE Asia)*, Busan, Süd-Korea, Mai 2019, S. 724–731.
- [78] J. JULIET, *Drehgeberlose Lageidentifikation bei elektrischen Asynchronmaschinen*. Dissertation, Universität Wuppertal, 2006.
- [79] B. WEBER, *Positionsgeberlose Regelung von permanentmagneterregten Synchronmaschinen bei kleinen Drehzahlen mit überabtastender Stromerfassung*. Dissertation, Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, 2018.
- [80] C. F. GAUSS, *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*, HAMBURGI SUMTIBUS FRID. PERTHES ET I. H. BESSER, Hrsg. Hamburg, 1809.
- [81] C. F. GAUSS, „Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae,“ in *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis recentiores – Classis Physicae*, 5, HENRICUS DIETRICH, Hrsg., Göttingen, 1823, S. 33–90.
- [82] T. ARENS, *Mathematik*, 2., korrigierter Nachdruck. Spektrum Akad. Verl., 2010, ISBN: 978-3-8274-1758-9.
- [83] N. K. SINHA und W. PILLE, „Online system identification using matrix pseudoinverse,“ *Electronics Letters*, Jg. 6, Nr. 15, 1970, ISSN: 00135194.
- [84] V. SKALA, „Least Square Method Robustness of Computations: What is not usually considered and taught,“ in *Federated Conference on Computer Science and Information Systems (FedCSIS)*, Prag, Tschechische Republik, September 2017, S. 537–541.
- [85] J. H. CONWAY und R. K. GUY, *The book of numbers*, [Nachdruck]. Copernicus, 2006, ISBN: 0-387-97993-X.

- 
- [86] A. SAVITZKY und M. J. E. GOLAY, „Smoothing and Differentiation of Data by Simplified Least Squares Procedures,“ *Analytical Chemistry*, Jg. 36, Nr. 8, S. 1627–1639, 1964.
- [87] J. RICHTER, *Modellbildung, Parameteridentifikation und Regelung hoch ausgenutzter Synchronmaschinen*. Dissertation, Elektrotechnisches Institut, Karlsruher Institut für Technologie, 2016, ISBN: 978-3-7315-0555-6.
- [88] C. ROLLBÜHLER, S. PEUKERT, D. FRITZ, J.-F. HEYD, J. KOLB und M. DOPPELBAUER, „Investigations on the Experimental Identification of AC-Copper Losses in Permanent Magnet Synchronous Machines using a Motor Sub-Assembly,“ in *45th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (IECON)*, Lissabon, Portugal, Oktober 2019, S. 1150–1156.
- [89] C. ROLLBÜHLER, L. STEFANSKI, S. GRETZINGER, J. KOLB, M. HILLER und M. DOPPELBAUER, „Measurement of inverter caused losses in permanent magnet synchronous machines using a modular multiphase multilevel converter,“ in *10th International Conference on Power Electronics (ECCE Asia)*, Busan, Süd-Korea, S. 1239–1245.
- [90] A. WINTRICH, U. NICOLAI, W. TURSKY und T. REIMANN, *Anwendungshandbuch Leistungshalbleiter*, 2., überarbeitete Auflage, SEMIKRON INTERNATIONAL GMBH, Hrsg. ISLE Verlag, 2015, ISBN: 978-3-938843-85-7.
- [91] LEM COMPONENTS, *Isolated current and voltage transducers, Characteristics - Applications - Calculations*, LEM INTERNATIONAL SA, Hrsg. 2015.
- [92] THE MATHWORKS INC., „DSP for FPGAs,“ Schulungsunterlagen der gleichnamigen Schulung, 2018.
- [93] S. KILTS, *Advanced FPGA Design, Architecture, Implementation and Optimization*. IEEE Wiley-Interscience a John Wiley & Sons Inc. publication, 2007, ISBN: 978-0-4701-2789-6.
- [94] J. REICHARDT, *Digitaltechnik, Eine Einführung mit VHDL*, 4. Auflage. De Gruyter Oldenbourg, 2017, ISBN: 978-3-1104-7800-6.

- [95] J. REICHARDT und B. SCHWARZ, *VHDL-Synthese, Entwurf digitaler Schaltungen und Systeme*, 7., aktualisierte Auflage. Oldenbourg, 2015, ISBN: 978-3-11-037505-3.
- [96] THE MATHWORKS INC., „Generating HDL Code from Simulink,“ Schulungsunterlagen der gleichnamigen Schulung, 2016.
- [97] G. MERZIGER und T. WIRTH, *Repetitorium der höheren Mathematik*, 5. Aufl. Binomi-Verlag, 2006, ISBN: 3923923333.





---

Die Kenntnis der taktfrequenten Änderung der Maschinenströme  
ist für viele Verfahren zur Regelung moderner,  
hoch ausgenutzter elektrischer Maschinen von großem Vorteil.

Doch wie können diese Änderungen der Maschinenströme im Betrieb  
überhaupt zuverlässig gemessen werden?  
Reicht die sehr kurze Zeit der einzelnen Schaltzustände dazu überhaupt aus?  
Und wie können die Änderungen der Ströme mathematisch beschrieben  
und physikalisch interpretiert werden?

Auf diese Fragen gibt diese Arbeit eine Antwort und beschreibt ein neues,  
sehr effizientes, echtzeitfähiges Schätzverfahren zur Messung  
der taktfrequenten Stromänderungen sowie eine geschlossene analytische  
und geometrische Beschreibung der Stromänderungen  
in Drehstromsynchronmaschinen.

---

ISBN 978-3-7315-1093-2



**ETI**  
Elektrotechnisches Institut