



İSTANBUL
ÜNİVERSİTESİ
YAYINEVİ

CUMHURİYET'İN 100. YILI KİTAPLIĞI

ORLICZ UZAYLARININ TEORİSİ VE UYGULAMALARI

Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU

Alen OSANÇLIOL

Rüya ÜSTER

Büşra ARIS

Esra BAŞAR

Badik Hüseyin UYSAL

Şeyma YAŞAR

Seren UÇAR





İSTANBUL
ÜNİVERSİTESİ
YAYINEVİ

CUMHURİYET'İN 100. YILI KİTAPLIĞI

ORLICZ UZAYLARININ TEORİSİ VE UYGULAMALARI

Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU

Alen OSANÇLIOL

Rüya ÜSTER

Büşra ARIS

Esra BAŞAR

Badik Hüseyin UYSAL

Şeyma YAŞAR

Seren UÇAR



ORLICZ UZAYLARININ TEORİSİ VE UYGULAMALARI

Prof. Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU

İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, İstanbul, Türkiye

Dr. Öğr. Üyesi Alen OSANÇLIOL

İstanbul Beykent Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, İstanbul, Türkiye

Dr. Öğr. Üyesi Rüya ÜSTER

İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, İstanbul, Türkiye

Araş. Gör. Büşra ARIS

İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, İstanbul, Türkiye

Araş. Gör. Esra BAŞAR

Yeditepe Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, İstanbul, Türkiye

Araş. Gör. Badik Hüseyin UYSAL

İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, İstanbul, Türkiye

Araş. Gör. Şeyma YAŞAR

Gebze Teknik Üniversitesi, Temel Bilimler Fakültesi, Matematik Bölümü, Kocaeli, Türkiye

Doktora Öğr. Seren UÇAR

İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, İstanbul, Türkiye



İSTANBUL
ÜNİVERSİTESİ
—YAYINEVİ—

Yayıncı
İstanbul Üniversitesi Yayınevi
İstanbul Üniversitesi Merkez Kampüsü, 34452
Beyazıt, Fatih / İstanbul - Türkiye



<https://iupress.istanbul.edu.tr>

Orlicz Uzaylarının Teorisi ve Uygulamaları
Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU, Alen OSANÇLIOL, Rüya ÜSTER, Büşra ARIS,
Esra BAŞAR, Badik Hüseyin UYSAL, Şeyma YAŞAR, Seren UÇAR

E-ISBN: 978-605-07-1550-7

DOI: 10.26650/B/PS16.2023.011

İstanbul Üniversitesi Yayın No: 5326

Fen Fakültesi Yayın No: 249

Online Yayın, Ekim, 2023

Bu çalışmaya atıfta bulunurken, referansa DOI numarasının dahil edilmesi önerilir.

Bu çalışma Creative Commons Atıf-GayrıTicari 4.0 Uluslararası (CC BY-NC 4.0) lisansı altında online olarak yayındadır.

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>



Kitabın telif hakkı bulunmaktadır. Online olarak yayınlanan Creative Commons versiyonu haricinde, yasal istisnalar ve geçerli lisans sözleşmelerinin koşulları dikkate alınmalıdır.

Bu kitap İstanbul Üniversitesi Yayınevi'nin, Cumhuriyet'in 100. Yılı kitap projesi kapsamında yayınlanmıştır.

İÇİNDEKİLER

ÖN SÖZ	v
1. ÖN BİLGİLER	
1.1. Topolojik Uzaylar	3
1.2. Metrik Uzaylar	6
1.3. Ölçü Kuramı ve Fonksiyonel Analiz	8
1.3.1. Normlu Uzaylar	13
1.3.2. L^p Uzayları	16
1.4. Soyut Harmonik Analiz ve Fourier Analiz	26
1.4.1. Yerel Kompakt Gruplar	26
1.4.2. Girişim Çarpımı ve Eşitsizlikler	29
1.4.3. Fourier Dönüşümü	32
1.4.4. Banach Cebirleri ve Banach Modülleri	33
2. DIŞ BÜKEY FONKSİYONLAR	
2.1. Dışbükey Fonksiyonlar ve Özellikleri	37
2.2. Dışbükey Fonksiyonlar ve Sınırlılık	39
2.3. Dışbükey Fonksiyonlarda Süreklilik ve Türev İlişkisi	40
2.4. Dışbükey Fonksiyonlar ve İntegral İlişkisi	43
2.5. Logaritmik Dışbükeylik	45
2.6. Dışbükey Fonksiyonlar ve Eşitsizlikler	47
3. YOUNG FONKSİYONLARI	
3.1. Düzgün İntegrallenebilirlik ve Valée Poussin Teoremi	51
3.2. Young Fonksiyonları	56
3.3. Tamlayan Young Fonksiyon Çiftleri Arasındaki İlişki	61
3.4. N Fonksiyonlarının Karşılaştırılması	64
3.5. Büyüme Özelliklerinin Sınıflandırılması	71
3.6. N Fonksiyonları için Tamamlayıcı Fonsiyonları	83
4. ORLICZ FONKSİYON UZAYLARI	
4.1. Ölçü Uzaylarında Orlicz Sınıfları	91
4.2. Orlicz Uzaylarının Temel Yapısı	98
4.3. Orlicz ve Luxemburg Normları Arasındaki İlişki	103
5. İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ EKİBİNİN ÇALIŞMALARI	
5.1. Ağırlıklı Orlicz Uzayları	111
5.1.1. $L^{\Phi}(G)$ Uzayında Kapsamalar	115
5.1.2. Kapsamalar ve Normlar Arasındaki İlişki	115
5.1.3. ω Ağırlık Fonksiyonuna Göre Kapsamalar	116
5.1.4. Φ Young Fonksiyonuna Göre Kapsamalar	116
5.2. Orlicz Uzaylarında Bileşke Operatörler	117
5.3. Bükülmüş Girişim Altında Orlicz Cebirleri	120
5.4. Grup Cebirleri Üzerinde Tanımlı Orlicz Modüllerinin Değişmez Alt Kümeleri ve Homolojik Özellikleri	123
5.5. Aşırı Gruplar Üzerinde Ağırlıklı Orlicz Uzayları	126
5.6. Ağırlıklı Orlicz Uzaylarında Ayrık Dinamikler	127
5.7. Yarı Banach Orlicz Modülasyon Üzerlerinde Süreklilik ve Bargmann Dönüşümleri	130
5.8. Orlicz Modülasyon Uzaylarında Sözde Diferansiyel Operatörler	136
5.9. Yerel Kompakt Grup Üzerinde Tanımlı Ağırlıklı Orlicz Uzaylarının Amalgam Uzayları	137

İÇİNDEKİLER

5.10. Orlicz Uzayında Hardy-Littlewood Maksimal Operatörleri.....	140
5.11. Orlicz Uzayının Geometrik Özellikleri.....	142
SİMGE DİZİNİ	147
DİZİN.....	151
KAYNAKÇA	155

ÖN SÖZ

Bu kitap Cumhuriyetimizin 100. yılı anısına İstanbul Üniversitesi'nin başlatmış olduğu etkinlik kapsamında, Cumhuriyetimize armağan olarak hazırlanmıştır. Bu kitapta temel amacımız, kitabın yazarlarının yapmış oldukları uluslararası yayınları ve bilimsel çalışmaları bir bütünlük içinde bir araya getirmektir. Bu çerçevede gerekli olan temel yapılar ayrıntılı olarak verilmiştir. Yaptığımız çalışmaları, genç araştırmacıların dikkatine sunmak ve bu konuların ülkemizde yaygınlaşmasını sağlamak hedeflenmektedir.

Kitap beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Ön Bilgiler başlığı altında kitapta kullanılan fonksiyonel analiz, ölçü kuramı, soyut harmonik analizi ve Fourier analizine ilişkin temel kavramlar verilerek alt yapı kurulmaktadır. İkinci bölümde dışbükey fonksiyonlar ve temel özellikleri üzerinde durulmuştur. Üçüncü ve Dördüncü bölümler, bu kitabın temel çalışma konusu olan Young fonksiyonları ve Orlicz fonksiyon uzaylarına ayrılmıştır. Beşinci bölüm kitabın ana hedefini oluşturmaktadır. Burada İstanbul Üniversitesi, Matematik Bölümünde bu kitabın yazarları tarafından Orlicz uzayları üzerine yapılan bilimsel çalışmalardan ve uygulamalardan kesitler sunulmuştur. Bu çalışmalar, (soyut) harmonik analiz, Fourier analizi, zaman-frekans analizi ve fonksiyonel analiz gibi matematiksel analizin dallarını kapsamaktadır.

Bu kitabın yazımında ve yayınında emeği geçen herkese, İstanbul Üniversitesi Rektörlüğüne, Fakültemiz Dekanı Prof. Dr. Tansel AK'a ve Dekan Yardımcısı Prof. Dr. Elif AKALIN'a teşekkür ederiz.

Akıl ve bilimin egemenliğinde kurucu önderimiz Atatürk'ün bizlere armağan ettiği Cumhuriyet ve kazanımları çalışmalarımızın dayanağıdır. Daima minnet ve teşekkürlerimizle....



İSTANBUL
ÜNİVERSİTESİ
YAYINEVİ

CUMHURİYET'İN 100. YILI KİTAPLIĞI

ORLICZ UZAYLARININ TEORİSİ VE UYGULAMALARI

Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU

Alen OSANÇLIOL

Rüya ÜSTER

Büşra ARIS

Esra BAŞAR

Badik Hüseyin UYSAL

Şeyma YAŞAR

Seren UÇAR



ORLICZ UZAYLARININ TEORİSİ VE UYGULAMALARI

Prof. Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU

İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, İstanbul, Türkiye

Dr. Öğr. Üyesi Alen OSANÇLIOL

İstanbul Beykent Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, İstanbul, Türkiye

Dr. Öğr. Üyesi Rüya ÜSTER

İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, İstanbul, Türkiye

Araş. Gör. Büşra ARIS

İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, İstanbul, Türkiye

Araş. Gör. Esra BAŞAR

Yeditepe Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, İstanbul, Türkiye

Araş. Gör. Badik Hüseyin UYSAL

İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, İstanbul, Türkiye

Araş. Gör. Şeyma YAŞAR

Gebze Teknik Üniversitesi, Temel Bilimler Fakültesi, Matematik Bölümü, Kocaeli, Türkiye

Doktora Öğr. Seren UÇAR

İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, İstanbul, Türkiye



İSTANBUL
ÜNİVERSİTESİ
—YAYINEVİ—

Yayıncı
İstanbul Üniversitesi Yayınevi
İstanbul Üniversitesi Merkez Kampüsü, 34452
Beyazıt, Fatih / İstanbul - Türkiye



<https://iupress.istanbul.edu.tr>

Orlicz Uzaylarının Teorisi ve Uygulamaları
Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU, Alen OSANÇLIOL, Rüya ÜSTER, Büşra ARIS,
Esra BAŞAR, Badik Hüseyin UYSAL, Şeyma YAŞAR, Seren UÇAR

E-ISBN: 978-605-07-1550-7

DOI: 10.26650/B/PS16.2023.011

İstanbul Üniversitesi Yayın No: 5326

Fen Fakültesi Yayın No: 249

Online Yayın, Ekim, 2023

Bu çalışmaya atıfta bulunurken, referansa DOI numarasının dahil edilmesi önerilir.

Bu çalışma Creative Commons Atıf-GayrıTicari 4.0 Uluslararası (CC BY-NC 4.0) lisansı altında online olarak yayındadır.

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>



Kitabın telif hakkı bulunmaktadır. Online olarak yayınlanan Creative Commons versiyonu haricinde, yasal istisnalar ve geçerli lisans sözleşmelerinin koşulları dikkate alınmalıdır.

Bu kitap İstanbul Üniversitesi Yayınevi'nin, Cumhuriyet'in 100. Yılı kitap projesi kapsamında yayınlanmıştır.

İÇİNDEKİLER

ÖN SÖZ	v
1. ÖN BİLGİLER	
1.1. Topolojik Uzaylar	3
1.2. Metrik Uzaylar	6
1.3. Ölçü Kuramı ve Fonksiyonel Analiz	8
1.3.1. Normlu Uzaylar	13
1.3.2. L^p Uzayları	16
1.4. Soyut Harmonik Analiz ve Fourier Analiz	26
1.4.1. Yerel Kompakt Gruplar	26
1.4.2. Girişim Çarpımı ve Eşitsizlikler	29
1.4.3. Fourier Dönüşümü	32
1.4.4. Banach Cebirleri ve Banach Modülleri	33
2. DIŞ BÜKEY FONKSİYONLAR	
2.1. Dışbükey Fonksiyonlar ve Özellikleri	37
2.2. Dışbükey Fonksiyonlar ve Sınırlılık	39
2.3. Dışbükey Fonksiyonlarda Süreklilik ve Türev İlişkisi	40
2.4. Dışbükey Fonksiyonlar ve İntegral İlişkisi	43
2.5. Logaritmik Dışbükeylik	45
2.6. Dışbükey Fonksiyonlar ve Eşitsizlikler	47
3. YOUNG FONKSİYONLARI	
3.1. Düzgün İntegrallenebilirlik ve Valée Poussin Teoremi	51
3.2. Young Fonksiyonları	56
3.3. Tamlayan Young Fonksiyon Çiftleri Arasındaki İlişki	61
3.4. N Fonksiyonlarının Karşılaştırılması	64
3.5. Büyüme Özelliklerinin Sınıflandırılması	71
3.6. N Fonksiyonları için Tamamlayıcı Fonsiyonları	83
4. ORLICZ FONKSİYON UZAYLARI	
4.1. Ölçü Uzaylarında Orlicz Sınıfları	91
4.2. Orlicz Uzaylarının Temel Yapısı	98
4.3. Orlicz ve Luxemburg Normları Arasındaki İlişki	103
5. İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ EKİBİNİN ÇALIŞMALARI	
5.1. Ağırlıklı Orlicz Uzayları	111
5.1.1. $L^{\Phi}(G)$ Uzayında Kapsamalar	115
5.1.2. Kapsamalar ve Normlar Arasındaki İlişki	115
5.1.3. ω Ağırlık Fonksiyonuna Göre Kapsamalar	116
5.1.4. Φ Young Fonksiyonuna Göre Kapsamalar	116
5.2. Orlicz Uzaylarında Bileşke Operatörler	117
5.3. Bükülmüş Girişim Altında Orlicz Cebirleri	120
5.4. Grup Cebirleri Üzerinde Tanımlı Orlicz Modüllerinin Değişmez Alt Kümeleri ve Homolojik Özellikleri	123
5.5. Aşırı Gruplar Üzerinde Ağırlıklı Orlicz Uzayları	126
5.6. Ağırlıklı Orlicz Uzaylarında Ayrık Dinamikler	127
5.7. Yarı Banach Orlicz Modülasyon Üzerlerinde Süreklilik ve Bargmann Dönüşümleri	130
5.8. Orlicz Modülasyon Uzaylarında Sözde Diferansiyel Operatörler	136
5.9. Yerel Kompakt Grup Üzerinde Tanımlı Ağırlıklı Orlicz Uzaylarının Amalgam Uzayları	137

İÇİNDEKİLER

5.10. Orlicz Uzayında Hardy-Littlewood Maksimal Operatörleri.....	140
5.11. Orlicz Uzayının Geometrik Özellikleri.....	142
SİMGE DİZİNİ	147
DİZİN.....	151
KAYNAKÇA	155

ÖN SÖZ

Bu kitap Cumhuriyetimizin 100. yılı anısına İstanbul Üniversitesi'nin başlatmış olduğu etkinlik kapsamında, Cumhuriyetimize armağan olarak hazırlanmıştır. Bu kitapta temel amacımız, kitabın yazarlarının yapmış oldukları uluslararası yayınları ve bilimsel çalışmaları bir bütünlük içinde bir araya getirmektir. Bu çerçevede gerekli olan temel yapılar ayrıntılı olarak verilmiştir. Yaptığımız çalışmaları, genç araştırmacıların dikkatine sunmak ve bu konuların ülkemizde yaygınlaşmasını sağlamak hedeflenmektedir.

Kitap beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Ön Bilgiler başlığı altında kitapta kullanılan fonksiyonel analiz, ölçü kuramı, soyut harmonik analizi ve Fourier analizine ilişkin temel kavramlar verilerek alt yapı kurulmaktadır. İkinci bölümde dışbükey fonksiyonlar ve temel özellikleri üzerinde durulmuştur. Üçüncü ve Dördüncü bölümler, bu kitabın temel çalışma konusu olan Young fonksiyonları ve Orlicz fonksiyon uzaylarına ayrılmıştır. Beşinci bölüm kitabın ana hedefini oluşturmaktadır. Burada İstanbul Üniversitesi, Matematik Bölümünde bu kitabın yazarları tarafından Orlicz uzayları üzerine yapılan bilimsel çalışmalardan ve uygulamalardan kesitler sunulmuştur. Bu çalışmalar, (soyut) harmonik analiz, Fourier analizi, zaman-frekans analizi ve fonksiyonel analiz gibi matematiksel analizin dallarını kapsamaktadır.

Bu kitabın yazımında ve yayınında emeği geçen herkese, İstanbul Üniversitesi Rektörlüğüne, Fakültemiz Dekanı Prof. Dr. Tansel AK'a ve Dekan Yardımcısı Prof. Dr. Elif AKALIN'a teşekkür ederiz.

Akıl ve bilimin egemenliğinde kurucu önderimiz Atatürk'ün bizlere armağan ettiği Cumhuriyet ve kazanımları çalışmalarımızın dayanağıdır. Daima minnet ve teşekkürlerimizle....

1. ÖN BİLGİLER

1.1 TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu kısımda kitap boyunca kullanılacak gerekli kavramlar tanıtılacaktır.

Bir topoloji, anlamlı bir süreklilik kavramını desteklemek için gereken minimum yapı olarak düşünülebilir. Sezgisel olarak bir fonksiyon, tanım kümesindeki birbirine yakın noktaları, görüntü kümesindeki birbirine yakın noktalara götürüyorsa süreklidir. Dolayısıyla, x noktasını y noktasına eşleyen sürekli bir fonksiyon aynı zamanda x noktasına yeterince yakın olan tüm noktaları y noktasına yeterince yakın noktalara eşlemelidir. Buradaki temel bileşen, noktalar arasındaki uzaklıkların niceliksel olarak değerlendirilmesi değil, yakın olmanın niteliksel kavramının değerlendirilmesidir. Bu kavram hangi kümelerin "açık" olduğu belirtilerek biçimsel olarak belirlenir. Buradaki fikir ise topolojik bir uzayın bir alt kümesinin bir x noktasını içerdiğinde, x 'e yeterince yakın olan tüm noktaları da içeriyorsa açık olarak nitelendirilmesidir.

Bu "açıklık" kavramını aşağıdaki gibi aksiyomatik olarak veriyoruz. Öte yandan, topolojik uzaylar için aksiyomlar bizim amaçlarımız için fazlasıyla geniştir. Sonuç olarak, bize göre ilgisiz olan davranışları dışlayan ek koşulları belirlememiz gerekmektedir. İhtiyaçlarımıza en uygun iki koşul metriklenebilirlik ve ayrılabilirliktir. Esas olarak bir metrikten kaynaklanan topolojilerle ilgileniriz. Öte yandan, her topolojinin bir metrik tarafından oluşturulmayacağını da vurgulayalım.

Bir X kümesinin alt kümelerinin ailesi τ olsun. Eğer τ aşağıdaki aksiyomları sağlarsa **topoloji** olarak adlandırılır.

- (i) Boş küme ve X kümesinin kendisi τ ailesine aittir.
- (ii) τ ailesine ait kümelerin herhangi sayıda birleşimi τ ailesine aittir.
- (iii) τ ailesinin sonlu sayıda kümesinin kesişimi τ ailesine aittir.

Bir topolojiyle donatılmış kümeye **topolojik uzay** denir. Eğer topolojinin belirtilmesi gerekiyorsa (X, τ) gösterimini kullanacağız. Yine, τ ailesinin her elemanı, τ topolojisine göre açık küme ya da kısaca açık küme olarak adlandırılır.

Keyfi X kümesindeki topolojinin en basit örneği $\mathcal{P}(X)$ ayrık topolojisidir. Burada X 'in tüm alt kümeleri açık küme olarak alınır. Topolojik uzayın bir başka standart örneği açık kümeleri, açık aralıkların sonlu veya sayılabilir birleşimi olan $\mathbb{R}$ reel sayılardır.

Tanım 1.1.1. X bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. Bir $U \subseteq X$ kümesi, eğer $x \in U$ ve U açık ise x noktasının **açık komşuluğu** olarak adlandırılır. Eğer bir U kümesi, x noktasının bir açık komşuluğunu içeriyorsa x 'in komşuluğu olarak adlandırılır.

Keyfi $x, y \in X$ noktaları için $x \neq y$ olmak üzere x 'in bir U komşuluğu ve y 'nin bir V komşuluğu $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde varsa X topolojik uzayına **Hausdorff uzayı** denir.

Tanım 1.1.2. X topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. X 'in alt kümelerinden oluşan bir $\mathcal{B}$ ailesinin tüm elemanları, x noktasının komşulukları ise ve x 'in herhangi bir U komşuluğu için $V \subseteq U$ olacak şekilde x 'in bir $V \in \mathcal{B}$ komşuluğu varsa, $\mathcal{B}$ ailesine x noktasının bir **komşuluk tabanı** ya da yerel tabanı denir.

Bir topoloji yerel olarak da tanımlanabilir, yani tüm açık kümelerin ailesinden başlamak yerine açık komşulukların tabanı ile tanımlanabilir. Böylece, X kümesinin her x noktası için aşağıdaki özelliklere sahip boş olmayan bir $\mathcal{U}_x$ küme ailesi verildiğini varsayalım.

- (i) Eğer $U \in \mathcal{U}_x$ ise $x \in U$,
- (ii) Eğer $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_x$ ise $U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$ olacak şekilde bir $U_3 \in \mathcal{U}_x$ vardır,
- (iii) Eğer $U \in \mathcal{U}_x$ ve $y \in U$ ise bir $V \in \mathcal{U}_y$ vardır öyle ki $V \subseteq U$ sağlanır.

Bu durumda X üzerinde, $\mathcal{U}_x$ ailelerinin karşılık gelen noktaları için komşuluk tabanı olduğu bir tek topoloji vardır. Bu topoloji şu şekilde verilir.

Eğer bir x noktasının bir $U \in \mathcal{U}_x$ komşuluğu A kümesi tarafından kapsanıyorsa, x noktası A kümesinin bir **iç noktası**, eğer A kümesinin tüm noktaları iç noktalar ise A kümesi **açık küme** olarak adlandırılır. Bir başka deyişle, bir kümenin açık olması için gerek ve yeter koşul noktalarından herhangi biriyle birlikte, o noktanın komşuluğunu da içermesidir.

Tanım 1.1.3. (X, τ) topolojik uzay ve $\mathcal{B}$, X kümesinin açık alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer her açık küme $\mathcal{B}$ 'deki kümelerin birleşimi ise, $\mathcal{B}$ topoloji için bir **taban** olarak adlandırılır. Bu durumda, bir $V \in \tau$ açık kümesi verildiğinde $U \subseteq V$ koşulunu sağlayacak şekilde bir $U \in \mathcal{B}$ vardır.

Tanım 1.1.4. Bir topolojik uzayın her noktasının sayılabilir bir komşuluk tabanı varsa bu topolojik uzaya **birinci sayılabilir** bir uzay denir.

Eğer bir topolojik uzayın sayılabilir bir tabanı varsa bu topolojik uzaya **ikinci sayılabilir** bir uzay denir.

Teorem 1.1.5. İkinci sayılabilir her topolojik uzay birinci sayılabilir bir uzaydır.

Örnek 1.1.6. $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Öklit topolojisi ya da doğal topoloji ile ikinci sayılabilir bir uzaydır.

Tanım 1.1.7. A , X topolojik uzayın bir alt kümesi olsun. Eğer $X \setminus A$ tümleyeni açıksa, A kümesine **kapalı küme** denir.

Sonlu sayıda kapalı kümenin birleşimi kapalı ve herhangi bir sayıda kapalı kümenin kesişimi kapalıdır. A kümesinin kapanışı, A kümesini içeren tüm kapalı kümelerin kesişimi olarak tanımlanır ve $\overline{A}$ ile gösterilir. Yine $\overline{A}$, kapsama bağıntısına göre, A kümesini içeren en küçük kapalı kümedir.

Tanım 1.1.8. A , X topolojik uzayının bir alt kümesi ve $x \in X$ olsun. Eğer x noktasının her komşuluğu A kümesinin x noktasından farklı bir noktasını içeriyorsa, x noktasına A kümesinin bir **limit noktası** denir. A kümesinin **kapanışı**, A kümesinin noktalarından ve tüm

limit noktalarından oluşur. Eğer $B = \overline{A}$ ise A, B kümesinde **yoğundur**, eğer A kümesi tüm X kümesinde yoğun yani A kümesinin kapanışı tüm X kümesi ise A **yoğun küme** olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.9. Bir X topolojik uzayı sayılabilir yoğun alt küme içeriyorsa **ayrılabilir** denir.

Tanım 1.1.10. Bir X topolojik uzayından Y topolojik uzayına giden bir f fonksiyonu, eğer Y kümesindeki her A açık kümesi için $f^{-1}(A)$ öngörüntü kümesi X kümesinde açık bir küme ise f fonksiyonuna **sürekli fonksiyon** denir. $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu birebir, örten, sürekli ve $f^{-1} : Y \rightarrow X$ ters fonksiyonu da sürekli ise f fonksiyonuna bir **homeomorfizma** ya da **topolojik eş yapı dönüşümü** denir. Eğer iki topolojik uzay arasında bir homeomorfizm varsa, bu topolojik uzaylara **homeomorfik** ya da topolojik olarak eş uzaylar denir.

X kümesinin üzerinde τ_1 ve τ_2 iki topoloji verilsin. Eğer τ_2 topolojisinde açık olan herhangi bir küme τ_1 topolojisinde açık ise tanım gereği τ_1 topolojisi τ_2 topolojisinden daha **güçlüdür** veya eşdeğer olarak τ_2 topolojisi τ_1 topolojisinden daha **zayıftır** denir. Bir başka ifadeyle, (X, τ_1) topolojik uzayından (X, τ_2) topolojik uzayına giden birim dönüşümü sürekli ise τ_1 topolojisi τ_2 topolojisinden daha güçlüdür denir.

Eğer bir küme kapalıysa, daha güçlü herhangi bir topolojide de kapalıdır. Buna bağlı olarak, daha zayıf bir topolojide herhangi bir kümenin kapanışı daha güçlü topolojide o kümenin kapanışını içerir.

Tanım 1.1.11. X_1 ve X_2 iki topolojik uzay olsun. $X_1 \times X_2$ kartezyen çarpımı üzerinde, her $x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ noktası için $\mathcal{U}_x$ komşuluk tabanı olarak bir topoloji tanımlarız. Burada, U_1 kümesi $x_1 \in X_1$ noktasının U_2 kümesi $x_2 \in X_2$ noktasının bir komşuluğudur. Bu şekilde tanımlanan topolojiye **çarpım topolojisi** denir ve çarpım topolojisiyle donatılmış $X_1 \times X_2$ kümesine X_1 ve X_2 topolojik uzaylarının çarpımı denir.

Tanım 1.1.12. X topolojik uzayının her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa X topolojik uzayına **kompakt** topolojik uzay denir. Daha ayrıntılı olarak, eğer birleşimi tüm X uzayı olan açık kümelerin her $\mathcal{U}$ ailesi için, birleşimi X uzayının tümü olan sonlu sayıda $U_1, U_2, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ elemanları varsa X kompakt olarak adlandırılır. Bir X topolojik uzayının bir alt kümesi A , indirgenen topolojiye göre kompakt ise A kümesine kompakt denir.

Aşağıdaki teoremleri ispatsız verelim.

Teorem 1.1.13. Bir Hausdorff topolojik uzayın kompakt her alt kümesi kapalıdır. Ayrıca, kompakt her uzayın kapalı alt kümesi kompaktır.

Teorem 1.1.14. (X, τ_1) kompakt Hausdorff uzayı, (Y, τ_2) Hausdorff topolojik uzayı ve $f : X \rightarrow Y$ sürekli fonksiyon ise $f(X)$ görüntü kümesi Y uzayında kompaktır.

Teorem 1.1.15 (Urysohn Lemması). (X, τ) kompakt topolojik uzay olsun. A ve B ayrık kapalı alt kümeleri için $f(A) = 0$ ve $f(B) = 1$ koşullarını sağlayan bir $f : X \rightarrow [0, 1]$ sürekli fonksiyonu vardır.

Teorem 1.1.16 (Tietze Teoremi). Bir (X, τ) kompakt topolojik uzayın kapalı bir A kümesi üzerinde tanımlı reel değerli her sürekli fonksiyonu, X uzayının tamamı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli bir fonksiyona genişletilir.

Tanım 1.1.17. Bir X topolojik uzayı ve bir $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $a \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((a, +\infty))$ kümesi açık ise f fonksiyonuna **alt yarı sürekli** fonksiyon denir. Eğer $-f$ fonksiyonu alt yarı sürekli ise f fonksiyonuna **üst yarı sürekli** fonksiyon denir. Bir $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun üst yarı sürekli olması için gerek ve yeter koşul her $a \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((-\infty, a))$ kümesinin açık olmasıdır. Bir $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter koşul alt ve üst yarı sürekli olmasıdır.

Tanım 1.1.18. Bir X topolojik uzayının her noktasının kompakt bir komşuluğu varsa X **yerel kompakt topolojik uzay** olarak adlandırılır.

Teorem 1.1.19. X bir yerel kompakt Hausdorff uzay, $K \subseteq X$ kompakt bir küme ve U, K kümesini içeren bir açık küme olsun. Bu durumda, kapanışı kompakt bir V açık alt kümesi vardır ve $K \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$ koşulu sağlanır.

Tanım 1.1.20. Bir topolojik uzay sayılabilir çoklukta kompakt kümelerin birleşimi olarak yazılırsa, σ **kompakt** olarak adlandırılır.

Teorem 1.1.21. Her yerel kompakt Hausdorff uzayı sayılabilir tabana sahip ise σ kompaktır.

1.2 METRİK UZAYLAR

Bir metrikten kaynaklanan topolojilerle ilgilendiğimizden daha önce bahsetmiştik. Bu kısımda metrik uzaylardaki bazı tanım ve teoremler ile ilgili özet bilgiler verilecektir.

Tanım 1.2.1. X boş olmayan bir küme olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir **metrik** denir.

- (i) $d(x, y) \geq 0$,
- (ii) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetri özelliği),
- (iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (üçgen eşitsizliği).

Yukarıda verilen özellikler metrik aksiyomları olarak adlandırılır. Yine, $d(x, y)$ niceliği x ve y elemanları arasındaki uzaklık olarak adlandırılır. Bir metrik ile donatılmış kümeye ise **metrik uzayı** denir. Özel olarak (X, d) ile de gösterilir.

Bir X metrik uzayının metriği ile donatılmış X 'in bir alt kümesi, X metrik uzayının bir alt uzayı olarak adlandırılır.

Örnek 1.2.2. $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$ kümesi üzerinde

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

funksiyonu bir metriktir. Bu d metriğine Öklit metriği ve bu metrik ile $\mathbb{R}^n$ kümesine de Öklit uzayı adı verilir.

X bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ olsun. x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar $B(x_0, r)$ ile gösterilir ve

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$$

olarak tanımlanır. Bir x_0 merkezli yuvar, x_0 noktasının bir komşuluk tabanıdır. Bu nedenle, bir metrik uzayın topolojisi yuvarlar aracılığıyla oluşturulur. Bir başka ifadeyle, X metrik uzayının bir A alt kümesi, her elemanını merkez kabul eden bir açık yuvarı içeriyorsa **açık küme** olarak adlandırılır. Daha belirgin olarak, her $x \in A$ için bir $r_x > 0$ reel sayısı $B(x, r_x) \subseteq A$ olacak şekilde varsa A kümesi açık kümedir. X metrik uzayında bir (x_n) dizisinin bir x elemanına yakınsaması ise $n \rightarrow \infty$ için $d(x_n, x) \rightarrow 0$ olmasıdır. Bir metrik uzay aynı zamanda bir topolojik uzay olduğu için, tüm temel topolojik kavramlar metrik uzaylarda anlamlı kalır. Metrik uzayların özelliği, topolojik kavramların dizilerin yakınsaklığı (dizisel tanımlar) ile eş değer olarak tanımlanabilmesidir. Bazı tanımlar aşağıda verilmiştir.

Tanım 1.2.3. A , X metrik uzayının bir alt kümesi ve $x \in X$ olsun. Eğer $A \setminus \{x\}$ kümesinde x elemanına yakınsayan bir (x_n) dizisi varsa x noktası A kümesinin **limit (yığılma) noktası** olarak adlandırılır. Eğer bir A kümesi bütün limit noktalarını içeriyorsa **kapalı küme** olarak adlandırılır. Eğer $X \setminus A$ tümleyen kümesi kapalı ise A kümesine açık küme denir.

Bu nedenle, metrik uzaylarda dizilerin yakınsaklığı topolojiyi tek türlü belirler. Böylece, metrik uzaylarda süreklilik kavramı dizisel olarak da belirlenir. (X, d_1) ve (Y, d_2) iki metrik uzay ve bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu olsun. X uzayında, keyfi bir (x_n) dizisi ve x elemanı için $n \rightarrow \infty$ olmak üzere $d_1(x_n, x) \rightarrow 0$ iken $d_2(f(x_n), f(x)) \rightarrow 0$ ise f fonksiyonu süreklidir denir.

Tanım 1.2.4. Bir $f : X \rightarrow Y$ birebir, örten fonksiyonu, metriği koruyor ise, yani her $x, y \in X$ için $d_1(x, y) = d_2(f(x), f(y))$ geçerli ise **izometri** veya birebir, örten izometri olarak adlandırılır. Eğer X ve Y iki metrik uzay arasında bir izometri var ise X ve Y izometrik olur ve $X \cong Y$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.5. X bir topolojik uzay olsun. X uzayındaki topolojiyi oluşturan, X üzerinde bir metrik varsa X uzayına **metriklenebilir uzay** denir.

X metrik uzayındaki bir (x_n) dizisi için $n, m \rightarrow \infty$ iken $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$ ise (x_n) **Cauchy dizisi** olarak adlandırılır. Daha ayrıntılı olarak şunu söyleyebiliriz, herhangi bir $\varepsilon > 0$ reel sayısı için x_n eleman çiftleri arasındaki tüm uzaklıkların ε sayısından küçük olduğu bir N başlangıç doğal sayısı varsa (x_n) bir Cauchy dizisidir. Eğer (x_n) dizisinin bir $x \in X$ limiti varsa, $n, m \rightarrow \infty$ için $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) \rightarrow 0$ olduğundan, (x_n) bir Cauchy dizisidir. Eğer X metrik uzayındaki her Cauchy dizisinin bir limiti varsa, X **tam metrik uzay** olarak adlandırılır. Aşağıdaki önemli teoremi hatırlatalım.

Teorem 1.2.6. Tam bir metrik uzayın herhangi bir kapalı alt uzayı tamdır. Herhangi bir metrik uzayın tam alt uzayı kapalıdır.

Genel olarak, topolojik uzaylarda sayılabilirlik kavramı ayrılabilirlik kavramından daha güçlüdür, fakat metrik uzaylarda bu iki kavram denktir.

Teorem 1.2.7. X metriklenebilir bir uzay olsun. X uzayının ayrılabilir olması için gerek ve yeter koşul ikinci sayılabilir olmasıdır.

Önerme 1.2.8. Ayrılabilir bir uzayın sürekli fonksiyon altındaki görüntüsü de ayrılabilirdir.

1.3 ÖLÇÜ KURAMI VE FONKSİYONEL ANALİZ

Bir kümenin ölçüsü kavramı, $\mathbb{R}^n$ Öklit uzayındaki bir aralığın, integral kavramı ile ilgili klasik hacim kavramından kaynaklanır. Bir takım matematiksel kavram ve işlemlerle $\mathbb{R}^n$ üzerinde Lebesgue ölçüsü tanımlanması mümkün olur. Her ne kadar Lebesgue ölçüsü başlangıçta Öklit uzaylarında geliştirilmiş olsa da, temel olarak uzayın geometrisinden bağımsız olarak soyut uzaylar için de geçerlidir. Bu, matematikte daha ileri çalışmalar ve uygulamalar için gereklidir. Ölçü kuramı fonksiyonel analize, olasılık teorisine, dinamik sistemlere ve matematiğin diğer pek çok alanına başarıyla uygulanmıştır. Fonksiyonel analiz ise, sonsuz boyutlu vektör uzayları üzerinde tanımlanan çeşitli yapıların incelenmesine ayrılmıştır. Normlu, Banach ve topolojik vektör uzayları, Hilbert uzayları, fonksiyon uzayları, Banach cebirleri, operatör uzayları gibi sayamayacağımız pek çok alan fonksiyonel analizin temel nesneleridir.

Ölçü kuramı veya integrasyon ile fonksiyonel analiz birbirinden bağımsız iki ana konu olsa da iç içe geçmiş teoriler söz konusudur. Bu kısımda, kitap boyunca kullanacağımız ölçü kuramına ve fonksiyonel analize ilişkin temel kavramlar verilecektir.

Tanım 1.3.1 (σ cebiri). X boş olmayan bir küme olsun. X kümesinin alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ ailesi

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$,
- (ii) her $A \in \mathcal{A}$ için $X \setminus A \in \mathcal{A}$,
- (iii) her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in \mathcal{A}$ ise $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

koşullarını sağlıyorsa, $\mathcal{A}$ 'ya, X kümesinde bir σ cebiri denir. Eğer $\mathcal{A}$ bir σ cebiri ise $\mathcal{A}$ 'nın elemanlarına **ölçülebilir kümeler**, $(X, \mathcal{A})$ ikilisine de **ölçülebilir uzay** denir.

Eğer $\mathcal{A}$ bir σ cebiri ise her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in \mathcal{A}$ olmak üzere, De Morgan kuralından $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ olduğunu da belirtelim.

Tanım 1.3.2. $(X_1, \mathcal{A}_1)$ ve $(X_2, \mathcal{A}_2)$ iki σ cebiri olsun. $X_1 \times X_2$ kartezyen çarpımındaki bir diktörtgen $A_1 \in \mathcal{A}_1$ ve $A_2 \in \mathcal{A}_2$ olmak üzere, $A_1 \times A_2$ biçimindeki herhangi bir kümedir. $X_1 \times X_2$ kartezyen çarpım kümesi üzerinde $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ σ cebiri bütün diktörtgenleri içeren en küçük σ cebiridir.

Tanım 1.3.3. $\mathcal{A}$, X kümesinde bir σ cebiri ve $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ bir fonksiyon olsun. Eğer

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathcal{A}$ 'da ikişerli ayrık kümeler dizisi için, $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

koşulları sağlanıyorsa μ 'ye $\mathcal{A}$ üzerinde bir **ölçü** denir. Bu durumda, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçü uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 1.3.3'te verilen (ii) koşulu σ toplamsal ya da sayılabilir toplamsal olarak adlandırılır. Bu nedenle, bazen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sayılabilir toplamsal ölçü uzayı da denir. Yine, bu kapsamda kolaylık olması bakımından μ , X uzayında bir ölçü olarak da ifade edilir.

Tanım 1.3.4. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. Bir $X \in \mathcal{A}$ için $\mu(X) < \infty$ ise μ ölçüsüne **sonlu ölçü** ve $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçü uzayına sonlu ölçü uzayı denir. Daha genel olarak, $\mathcal{A}$ σ cebirinde bir (A_n) dizisi için $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu(A_n) < \infty$ ise μ ölçüsüne σ **sonlu ölçü** ve $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçü uzayına da σ sonlu ölçü uzayı denir.

Örnek 1.3.5. X boş olmayan bir küme ve X 'in tüm alt kümelerinin oluşturduğu aile $\mathcal{P}(X)$ olsun. Eğer $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ alınırsa $\mathcal{A}$, X uzayında bir σ cebiridir. Bundan başka $\mathcal{P}(X)$ en büyük, $\mathcal{A}$ ise en küçük σ cebiridir.

Örnek 1.3.6. Sonsuz bir X kümesi için

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ sonlu veya } X \setminus A \text{ sonlu}\}$$

kümeler ailesi X 'te bir σ cebiridir.

Tanım 1.3.7. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçü uzayı için eğer $\mu(X) = 1$ ise μ **olasılık ölçüsü** ve $(X, \mathcal{A}, \mu)$ olasılık ölçü uzayı olarak adlandırılır.

Örnek 1.3.8. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $A \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer

$$\mu(A) = \begin{cases} \#A, & A \text{ sonlu,} \\ +\infty, & A \text{ sonsuz} \end{cases}$$

koşulu sağlanıyorsa μ **sayma ölçüsü** olarak adlandırılır.

Örnek 1.3.9. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $x \in X$ olsun. Her $A \in \mathcal{A}$ için

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda, δ_x fonksiyonu bir ölçüdür ve x noktasında **Dirac ölçüsü** olarak adlandırılır. Böyle bir ölçü bir $\{x\}$ tek nokta kümesinde yoğunlaşmış ölçüdür.

Ölçü uzaylarının temel özelliklerini veren aşağıdaki teoremi kanıtsız verelim.

Teorem 1.3.10. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı, $A, B \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer $A \subseteq B$ ise $\mu(A) \leq \mu(B)$ koşulu sağlanır. Bundan başka, eğer $\mu(A) < \infty$ ise $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ geçerlidir.

Tanım 1.3.11. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı, $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) > 0$ olsun. Eğer her $B \subseteq A$ ölçülebilir kümesi için $\mu(B) = 0$ veya $\mu(A \setminus B) = 0$ ise A kümesine μ ölçüsünün bir **atomudur** denir.

Eğer bir μ ölçüsü atomlara sahip ise atomik ölçü ve $(X, \mathcal{A}, \mu)$ atomik ölçü uzayı denir. Eğer X kümesi, sonlu veya sayılabilir sayıda atomların birleşimi olarak yazılabilirse, μ ölçüsüne **tümüyle atomik ölçü** denir.

Eğer $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uzayında hiç bir atom yok ise μ ölçüsüne atomsuz veya atomik olmayan ölçü ve $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uzayına **atomsuz** ölçü uzayı denir.

Örnek 1.3.12. (i) $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ ve μ sayma ölçüsü olmak üzere, her tek nokta kümesi μ ölçüsünün birer atomudur.

(ii) Dirac ölçüsü tümüyle atomik ölçüdür.

Teorem 1.3.13. Sayılabilir toplamsal özelliğe sahip her σ cebiri, tümüyle atomik bir ölçünün ve atomik olmayan bir ölçünün toplamı olarak yazılabilir. Bu yazılış tek türdür.

Tanım 1.3.14. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. Eğer $\mu(A) = 0$ koşulunu sağlayan her $A \in \mathcal{A}$ için $B \subseteq A$ iken $B \in \mathcal{A}$ ise $(X, \mathcal{A}, \mu)$ **tam ölçü uzayı** olarak adlandırılır. Ayrıca, $\mu(A) = 0$ koşulunu sağlayan kümeye **sıfır kümesi** denir.

Tanım 1.3.15. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. Eğer belirli bir özellik, $\mu(A) = 0$ olacak şekilde bir $A \in \mathcal{A}$ kümesinin dışındaki her noktada geçerli ise bu özellik X üzerinde μ hemen hemen her yerde geçerlidir denir ve kısaca μ h. h. h. şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.3.16. X bir Hausdorff topolojik uzay olsun. X üzerinde **Borel σ cebiri** X kümesinin tüm açık kümelerini içeren en küçük σ cebiridir. X üzerindeki Borel σ cebirleri $\mathfrak{B}(X)$ ile gösterilir ve elemanları da Borel kümesi olarak adlandırılır.

Tanım 1.3.17. $\mathfrak{B}(X)$ Borel σ cebiri üzerinde tanımlı bir ölçüye **Borel ölçüsü** denir.

Tanım 1.3.18. $(X, \mathcal{A}_X), (Y, \mathcal{A}_Y)$ iki ölçülebilir uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $E \in \mathcal{A}_Y$ için $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}_X$ oluyorsa, f fonksiyonuna **ölçülebilir fonksiyon** denir.

Lemma 1.3.19. X ve Y Hausdorff topolojik uzaylar olsun. Eğer $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu sürekli ise Borel ölçülebilirdir.

Tanım 1.3.20. X bir Hausdorff topolojik uzay ve X üzerinde $\mathcal{A}$ σ cebiri $\mathfrak{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$ olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde pozitif bir μ ölçüsü aşağıdaki koşulları sağlasın.

- (i) Her $K \in \mathfrak{B}(X)$ kompakt kümesi için $\mu(K) < \infty$,
- (ii) her $A \in \mathcal{A}$ kümesi için $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U \text{ ve } U \text{ açık}\}$,
- (iii) X 'in her açık kümesi için $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq U \text{ ve } K \text{ kompakt}\}$.

Bu durumda $\mu, \mathcal{A}$ üzerinde **regüler** ölçü olarak adlandırılır. $\mathfrak{B}(X)$ Borel σ cebiri üzerinde tanımlı bir regüler ölçü, X üzerinde regüler Borel ölçüsü olarak adlandırılır. Ayrıca (ii) koşulunu sağlayan ölçüye **dış ölçü**, (iii) koşulunu sağlayan ölçüye **iç ölçü** denir.

Örnek 1.3.21. $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Lebesgue ölçüsü regülerdir. Yine, $\mathbb{R}^n$ üzerindeki her sonlu Borel ölçü regülerdir.

Önerme 1.3.22. X yerel kompakt Hausdorff uzayı sayılabilir bir tabana sahip olsun. μ , X üzerinde bir Borel ölçüsü kompakt kümelerde sonlu ise μ regülerdir.

Teorem 1.3.23. X yerel kompakt Hausdorff uzayı sayılabilir bir tabana sahip ise X üzerinde her regüler ölçü σ sonludur.

Tanım 1.3.24. Topolojik bir X uzayı üzerinde tanımlı reel veya kompleks değerli sürekli bir f fonksiyonu verilsin. $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ kümesinin kapanışına f 'nin **desteği** denir ve $\text{supp } f$ ile gösterilir. $C_c(X)$ ile X üzerinde tanımlı kompakt destekli sürekli fonksiyonların uzayı gösterilir.

Teorem 1.3.25 (Riesz Temsil Teoremi). X bir yerel kompakt Hausdorff uzay ve $F, C_c(X)$ uzayı üzerinde pozitif lineer fonksiyonel olsun. Bu durumda, X üzerinde bir tek regüler Borel μ ölçüsü $f \in C_c(X)$ için $F(f) = \int f d\mu$ koşulunu sağlayacak şekilde vardır.

Aşağıda integral teorisinin temel limit teoremleri ispatsız olarak verilecektir.

Teorem 1.3.26. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $f, A \in \mathcal{A}$ üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Aşağıdakiler geçerlidir.

(i) f, A üzerinde hemen hemen sonludur.

(ii) Eğer f pozitif ve $\int_A f d\mu = 0$ ise f, A üzerinde hemen hemen her yerde 0 olur.

Teorem 1.3.27 (Monoton Yakınsaklık Teoremi). $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X üzerinde tanımlı $[0, +\infty]$ değerli ölçülebilir fonksiyonların artan bir dizisi olmak üzere hemen hemen her $x \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu$$

sağlanır.

Sonuç 1.3.28 (Beppo-Levi Teoremi). $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X üzerinde tanımlı $[0, +\infty]$ değerli ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu durumda

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$$

sağlanır.

Sonuç 1.3.29 (Fatou Lemması). $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X üzerinde tanımlı $[0, +\infty]$ değerli ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ise

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

sağlanır.

Skaler değerli fonksiyonların yakınsamasıyla ilgili temel sonuç baskın yakınsaklık (Lebesgue baskın yakınsaklık) teoremidir. Monoton yakınsama teoreminden farklı olarak fonksiyon dizisinin artan olması yerine integrallenebilir olması istenir.

Teorem 1.3.30 (Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi). $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olmak üzere, g, X üzerinde tanımlı $[0, +\infty]$ değerli integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, X$ üzerinde tanımlı $[-\infty, +\infty]$ değerli ve bir f fonksiyonuna hemen hemen noktasal yakınsasın. Eğer $n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(x)| \leq g(x)$ hemen hemen her x için sağlanırsa f ve f_n integrallenebilirdir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

olur.

Sonuç 1.3.31. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi, bir f fonksiyonuna noktasal yakınsasın. Eğer bir $M \geq 0$ reel sayısı, her $n \in \mathbb{N}$ için $\int_X f_n d\mu \leq M$ olacak şekilde varsa $\int_X f d\mu \leq M$ sağlanır.

İki ölçü uzayının kartezyen çarpımı üzerinde her bir faktörün ölçüsüyle doğrudan bağlantılı bir ölçü, dolayısıyla bir integral oluşturulabilir. O zaman ortaya çıkan doğal problem, bir çift (veya çoklu) integralin iki (veya daha fazla) basit integralin hesaplanmasına nasıl indirgeneceğidir. Böyle bir soru özellikle Lebesgue integrasyonunda çok önemli bir rol oynar. Teorinin temel sonuçları, ölçülebilir kümeler üzerinde yinelemeli integrallerle, bir çift katlı integral hesaplamak için yeter koşulları sağlayan Tonelli Teoremi ve Fubini Teoremidir. Tonelli (L. Tonelli, 1885-1946, İtalyan matematikçi) keyfi pozitif ölçülebilir fonksiyonlar için, Fubini (G. Fubini, 1879-1943, İtalyan matematikçi) ise integrallenebilir skaler değerli fonksiyonlar için geçerlidir. Buna göre, kartezyen çarpım üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon için çift katlı integral ile yinelemeli integral eşittir.

Teorem 1.3.32 (Tonelli Teoremi). $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ve $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ sonlu ölçü uzayları ve $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ ölçülebilir fonksiyon olsun. Bu durumda, f_x ve f^y fonksiyonları hemen hemen her x ve y için ölçülebilir, $x \mapsto \int_Y f_x d\nu$ ve $y \mapsto \int_X f^y d\mu$ fonksiyonları ölçülebilirdir ve

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu \right) d\nu$$

sağlanır.

Teorem 1.3.33 (Fubini Teoremi). $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ve $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ sonlu ölçü uzayları ve $f : X \times Y \rightarrow [-\infty, +\infty]$ integrallenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda f_x ve f^y fonksiyonları hemen hemen her x ve y için integrallenebilir $x \mapsto \int_Y f_x d\nu$ ve $y \mapsto \int_X f^y d\mu$ fonksiyonları

integrallenebilir ve

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu \right) d\nu$$

sağlanır.

Çarpım ölçülerinin teorisinin çok kullanışlı uygulaması aşağıda verilmiştir.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ sonlu ölçü uzayı, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ üzerinde λ bir Lebesgue ölçüsü ve $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ fonksiyonu $\mathcal{A}$ ölçülebilir olsun. Yine,

$$E = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq y < f(x)\}$$

kümesini tanımlayalım. Böylece, $E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ve

$$(\mu \times \lambda)(E) = \int_X \lambda(E_x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x)$$

$$(\mu \times \nu)(E) = \int_{\mathbb{R}} \mu(E^y) d\lambda(y) = \int_0^{\infty} \mu(\{x \in X : f(x) > y\}) d\lambda(y)$$

olur. Böylece çok kullanışlı integral eşitliği

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_0^{\infty} \mu(\{x \in X : f(x) > y\}) d\lambda(y)$$

bulunur.

1.3.1 Normlu Uzaylar

Fonksiyonel analiz, fonksiyonlar, diziler, limitler gibi analitik nesnelerle ilgilenir ve yaklaşımı ise belirli özelliklere sahip fonksiyonları ya da dizileri tek başına incelemek yerine, bunların karşılık geldiği uzayları, alt uzayları veya alt kümeleri incelemektir. Pek çok analiz problemi bu yaklaşım aracılığıyla çözülebilir. Örneğin sürekli bir fonksiyona polinomlarla yaklaşılabilişliği sorusu, polinom uzayının bir metriğe ya da norma göre sürekli fonksiyonlar uzayında yoğun olup olmadığı sorusuna indirgenir. Bu yaklaşım, bir çözüm arayışında, geometrik düşüncelerin kullanılmasına şekil çizilmesine ve sonsuz boyutlu uzaylar için modeller olarak düzlemde veya üç boyutlu uzayda örneklerin incelenmesine izin verir. Bu nedenle doğru parçası, dışbükey küme gibi kavramlar için benzer tanımların bazıları sonsuz boyutlu vektör uzayları için verilecektir.

Ayrıca bu kısımda normlu uzaylara ilişkin temel tanım ve teoremleri özetleyeceğiz. Normlu uzaylar, vektör uzayları ile ilişkili olduğundan doğruların ve alt vektör uzayların geometrisine izin verdikleri için metrik uzaylardan çok daha fazla ve zengin yapıya sahiptirler. Ayrıca $X, \mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ise $\mathbb{K}$ cisminin $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ uzayını gösterdiğini vurgulayalım.

Tanım 1.3.34. X vektör uzayı, $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun.

$$\{z \in X : z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

kümesine x ve y noktalarından geçen doğru parçası denir.

$$\{z \in X : z = \alpha x + (1 - \alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

kümesi x ve y noktalarını birleştiren doğru parçası olarak adlandırılır.

Bir $A \subseteq X$ kümesi, herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını içeriyorsa dışbükey küme olarak adlandırılır. Bu aşağıdaki gibi de ifade edilir.

Tanım 1.3.35. X bir vektör uzayı ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer her $x, y \in A$ ve her $0 \leq \alpha \leq 1$ için $\alpha x + (1 - \alpha)y \in A$ ise A kümesine **dışbükey** denir.

Önerme 1.3.36. X vektör uzayında dışbükey iki kümenin birleşimi dışbükey, herhangi bir sayıda dışbükey kümenin kesişimi ise dışbükeydir.

Tanım 1.3.37. X bir vektör uzayı, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ ve $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ olmak üzere $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \geq 0$ olsun. Bu durumda $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ şeklindeki elemana x_i elemanlarının dışbükey bileşenleri denir.

Bir $A \subseteq X$ kümesinin elemanlarının tüm dışbükey bileşenlerinin kümesine A kümesinin **dışbükey kabuğu** ya da **dışbükey zarfı** denir, bu A kümesini içeren en küçük dışbükey kümedir ve $\text{co}(A)$ ile gösterilir.

Tanım 1.3.38. X bir vektör uzayı, $K \subseteq X$ dışbükey bir küme olsun. Eğer K kümesinin bir x elemanı K kümesinin herhangi diğer iki elemanın dışbükey birleşimi değilse, yani her $y, z \in K$ ise $0 < \alpha < 1$ için $x = \alpha y + (1 - \alpha)z$ iken $x = y = z$ koşulunu sağlıyorsa x elemanına K kümesinin bir **uç noktası** denir. K kümesinin bütün uç noktalarının kümesi $\text{Ext}(K)$ ile gösterilir.

Tanım 1.3.39. $X, \mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $B \subseteq X$ olsun. Eğer her $x \in B$ ve $|\alpha| \leq 1$ olacak şekilde her $\alpha \in \mathbb{K}$ için $\alpha x \in B$ ise B kümesine **dengeli küme** denir.

Tanım 1.3.40. $X, \mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $C \subseteq X$ olsun. Eğer her $x, y \in C$ ve $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ olacak şekilde her $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ için $\alpha x + \beta y \in C$ ise C kümesine **mutlak dışbükey** denir.

Teorem 1.3.41. $X, \mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Bu durumda, bir $C \subseteq X$ kümesinin mutlak dışbükey olması için gerekli ve yeter koşul C kümesinin dengeli ve dışbükey olmasıdır.

İspat. İspat okuyucuya bırakılmıştır. □

Tanım 1.3.42. $X, \mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. X uzayının her elemanı ile negatıf olmayan bir reel sayıyı eşleyen bir $x \rightarrow \|x\|$ fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bir **norm** olarak adlandırılır. Keyfi bir $\alpha \in \mathbb{K}$ ve $x, y \in X$ için

- (i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- (ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği).

Bir norm ile donatılmış vektör uzayına normlu uzay denir ve özel olarak $(X, \|\cdot\|)$ ile gösterilir. Yine, yukarıdaki özelliklerinden sadece (i) özelliğini sağlamayan bir fonksiyon **yarı norm** olarak adlandırılır.

Örnek 1.3.43. $\mathbb{R}^n$ Öklit uzayı, $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ normu ile reel normlu uzaydır.

Örnek 1.3.44. K bir kompakt topolojik uzay olsun. $C(K)$, K üzerinde tanımlı skaler değerli, sürekli fonksiyonların bir vektör uzayı

$$\|f\| = \max_{t \in K} |f(t)|$$

normu ile bir normlu uzay olur.

Bir X normlu uzayının x ve y elemanlarının arasındaki uzaklık $d(x, y) = \|x - y\|$ ile tanımlansın. Böyle tanımlanan d fonksiyonu, X vektör uzayı üzerinde bir metriktir. Bu durumda, her normlu uzay aynı zamanda bir metrik uzaydır. Böylece metrik uzaylar için tanımlanan açık ve kapalı kümeler, kompakt kümeler, limit noktaları gibi tüm kavramlar normlu uzaylar için de anlamlıdır.

Tanım 1.3.45. X normlu uzayında bir (x_n) dizisi, $n \rightarrow \infty$ için $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ ise x elemanına yakınsar denir.

Öte yandan, normlu ve metrik uzaylar kavramında temel bir fark izometrilere tanımlanmış ortaya çıkar. Normlu uzayda ek koşul olarak dönüşümün lineer olması gerekir. $(X, \|\cdot\|_X)$ ve $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normlu uzay $T : X \rightarrow Y$ lineer dönüşüm olsun. Her $x \in X$ için

$$\|Tx\|_Y = \|x\|_X$$

koşulunu sağlayan birebir örten T dönüşümü bir izometri olarak adlandırılır. Eğer X ve Y normlu uzaylar arasında bir izometri varsa X ile Y izometriktir denir.

X normlu bir uzay olmak üzere, X uzayının normu ile donatılmış bir Y alt vektör uzayına X normlu uzayının alt vektör uzayı denir. Böylece, bir normlu uzayın herhangi bir alt uzayının kendisi de bir normlu uzaydır.

X bir normlu uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ olsun. x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar $B(x_0, r)$ ile gösterilir ve

$$B(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$$

ile tanımlanır. Buna göre

$$B(0, 1) = \{x \in X : \|x\| < 1\}$$

birim açık yuvar,

$$B[0, 1] = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

birim kapalı yuvar ve

$$S(0, 1) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$$

birim küre ya da yuvar yüzeyi olarak adlandırılır.

Bir **Banach uzayı** tam bir normlu uzaydır, yani her Cauchy dizisinin yakınsadığı bir normlu uzaydır. Banach uzayları normlu uzayların en önemli sınıflarını oluşturur. Uygulamalarda en sık karşılaşılan uzaylardır ve fonksiyonel analizin en önemli sonuçlarının çoğu Banach uzayı kavramları ile ilgilidir.

Normlu uzayda geçerli olan fakat metrik uzayda geçerli olmayan bir diğer önemli kavram **seridir** ve bir tamlık ölçütü olarak kullanılır.

X normlu uzayında verilen bir (x_n) dizisi için $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisinin kısmi toplamaları $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ dizisidir. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisinin kısmi toplamalar dizisi (S_n) bir x elemanına yakınsarsa, seri yakınsaktır denir ve bu $x \in X$ serinin toplamı olarak adlandırılır. Bu durumda, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$ yazılır. Serinin toplamının limit olarak tanımlandığını vurgulayalım. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ serisi $\mathbb{R}$ 'de yakınsaksa, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisi mutlak yakınsak olarak adlandırılır.

Teorem 1.3.46. X normlu uzayın Banach uzayı olması için gerek ve yeter koşul X uzayındaki her mutlak yakınsak serinin yakınsak olmasıdır.

1.3.2 L^p Uzayları

Fonksiyonel analiz ile ölçü ve integral kuramı Banach uzaylarının en önemli örnekleri olan L^p Lebesgue uzaylarını üretmek için bir araya gelir. Ayrıca L^p Lebesgue uzayları arasında L^2 ile gösterilen bir Hilbert uzayı da vardır. L^p Lebesgue uzayları ve bazı özellikleri amacımıza uygun olarak bu kapsamda incelenecektir.

Tanım 1.3.47. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $0 < p < \infty$ olsun. X üzerinde tanımlı, reel veya kompleks değerli, p -inci kuvveti integrallenebilen, yani

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir fonksiyonların kümesi $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ veya $\mathcal{L}^p(X)$ ile gösterilir. Böylece, $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ için $\|f\|_p$ negatif olmayan reel sayısı

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $p = \infty$ ise $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ veya $\mathcal{L}^\infty(X)$ ile X üzerinde esasen sınırlı ve ölçülebilir fonksiyonlar kümesi gösterilir. Yine, $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$ olması için gerek ve yeter koşul bir $A \in \mathcal{A}$ ölçülebilir kümesinin $\mu(A) = 0$ ve bir $M > 0$ reel sayısının her $x \in X \setminus A$ için $|f(x)| \leq M$ olacak şekilde var olmasıdır. Bu durumda, $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$ için $\|f\|_\infty$ negatif olmayan reel sayısı

$$\|f\|_\infty = \inf\{M > 0 : \mu \text{ hemen hemen her } x \in X \text{ için } |f(x)| \leq M\}$$

veya

$$\|f\|_\infty = \operatorname{esssup}_{x \in X} \{|f(x)|\} = \inf\{M > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0\}$$

şeklinde tanımlanır.

Yukarıdaki şekilde tanımlı $\|\cdot\|_p$ fonksiyonu $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ üzerinde bir norm tanımlamaz. Çünkü, $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ için $\|f\|_p = 0$ iken

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p d\mu = 0$$

ifadesinden, Teorem 1.3.26'dan dolayı μ hemen hemen her yerde $f = 0$ olur. Bu nedenle, $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ ile gösterilen aşağıdaki kümeyi tanımlayalım.

Tanım 1.3.48. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $0 < p \leq \infty$ olsun. $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ üzerinde $\sim$ ile gösterilen denklik bağıntısı, $f \in \mathcal{L}^p(X)$, $g \in \mathcal{L}^p(X)$ olmak üzere,

$$f \sim g \Leftrightarrow \mu \text{ h. h. } f = g$$

şeklinde tanımlanır ve $f \in \mathcal{L}^p(X)$ in denklik sınıfı $[f]$ ile gösterilir.

Tanım 1.3.49. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ sonlu bir ölçü uzayı ve $0 < p \leq \infty$ olsun.

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^p(X)/\sim$$

olarak tanımlanır. Böylece

$$g \in [f] \Leftrightarrow \mu \text{ h. h. } g = f$$

ve her $g \in [f]$ için

$$\|g\|_p = \|f\|_p$$

olur. Buradan, $[f] \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ için $\|[f]\|_p = \|f\|_p$ şeklinde tanımlanır.

Daha sonra Minkowski eşitsizliği gösterilecek ve böylece, $1 \leq p \leq \infty$ için $(\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p)$ bir normlu uzay olacaktır.

Tanım 1.3.50. p ve p' pozitif reel sayıları için $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ise bu iki sayı eşlenik sayı olarak adlandırılır. Uygun olması için 1 ve ∞ birbirlerinin eşlenikleri olarak alınacaktır. Ayrıca, eşleniği kendisi olan tek sayı $p = p' = 2$ dir.

Teorem 1.3.51 (Young Eşitsizliği). a ve b iki pozitif reel sayı ve $1 < p < \infty$ olmak üzere

$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olsun. Bu durumda,

$$a^{1/p} b^{1/p'} \leq \frac{1}{p} a + \frac{1}{p'} b$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik durumu, ancak ve ancak $a = b$ için geçerlidir.

İspat. Bir $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = x^n - nx, \quad 0 < n < 1$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Her $x \in [0, 1]$ için,

$$\frac{df(x)}{dx} = nx^{n-1} - n \geq 0$$

olduğundan f fonksiyonu $[0, 1]$ aralığı üzerinde artan bir fonksiyondur ve $x = 1$ noktasında maksimum değerine ulaşır. O halde, her $x \in [0, 1]$ için

$$0 \leq x^n - nx \leq 1 - n \quad (1.1)$$

olur. Eğer $n = \frac{1}{p}$ ve genelliği bozmadan $a < b$ olmak üzere $x = \frac{a}{b}$ şeklinde alınırsa ve bu değerler (1.1) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/p} - \frac{1}{p} \frac{a}{b} \leq \frac{1}{p'}$$

olduğundan

$$\frac{1}{b} \left(\frac{a^{1/p}}{b^{1/p}} - \frac{1}{p} a \right) \leq \frac{1}{p'}$$

bulunur. Böylece,

$$a^{1/p} b^{1/p'} \leq \frac{1}{p} a + \frac{1}{p'} b$$

elde edilir. Eğer $b < a$ ise $n = \frac{1}{p'}$ ve $x = \frac{b}{a} < 1$ için aynı sonuç elde edilir. $a = b$ durumunda ise eşitlik olur. $\square$

Teorem 1.3.52 (Hölder Eşitsizliği). $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. $1 \leq p \leq \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olmak üzere, $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ ve $g \in L^{p'}(X, \mathcal{A}, \mu)$ için

$$fg \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu) \quad \text{ve} \quad \int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

geçerlidir. Dahası, eğer $1 < p < \infty$ ise eşitliğin olması için gerekli ve yeter koşul X üzerinde hemen hemen her yerde $|g|^{p'} = k|f|^p$ olacak şekilde bir k pozitif sabitin bulunmasıdır.

İspat. İspatı, p' 'nin farklı durumlarını inceleyerek yapalım.

- (i) $p = 1$ için, $g \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ ise X üzerinde hemen hemen her yerde $|g| \leq \|g\|_\infty$ olur. Buradan,

$$\int_X |fg| d\mu = \int_X |f| |g| d\mu \leq \|g\|_\infty \int_X |f| d\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1$$

elde edilir.

- (ii) $p = \infty$ için, ispat birinci duruma benzer şekilde yapılır.

- (iii) $1 < p < \infty$ için, $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ ve $g \in L^{p'}(X, \mathcal{A}, \mu)$ olsun. Eğer $f = 0$ veya $g = 0$ ise istenen elde edilir. Kabul edelim ki, $f \neq 0$ ve $g \neq 0$ olsun. Bu durumda, $x \in X$ sabit olmak üzere,

$$a = |f(x)|^p \|f\|_p^{-p} \quad \text{ve} \quad b = |g(x)|^{p'} \|g\|_{p'}^{-p'}$$

için Young eşitsizliği uygulanırsa

$$|f(x)g(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} \left(\frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{p'} \frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}} \right) \quad (1.2)$$

olur. Eşitlik, yalnızca

$$|f(x)|^p \|f\|_p^{-p} = |g(x)|^{p'} \|g\|_{p'}^{-p'}$$

olması durumunda, yani $k = \|f\|_p^{-p} \|g\|_{p'}^{p'}$ olmak üzere, $|g(x)|^{p'} = k |f(x)|^p$ durumunda geçerlidir. (1.2) eşitsizliğinde integrale geçilirse

$$\int_X |f(x)g(x)| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} \left(\frac{1}{p} \int_X \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} d\mu + \frac{1}{p'} \int_X \frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}} d\mu \right)$$

olur. Böylece,

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

elde edilir. □

Sonuç 1.3.53. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. $p > 0$, $q > 0$ ve $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ olmak üzere, $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ ve $g \in L^q(X, \mathcal{A}, \mu)$ ise $fg \in L^r(X, \mathcal{A}, \mu)$ ve $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ olur.

İspat. İspatı, p ve q 'nin farklı durumları için yapacağız.

- (i) p ve q sonlu olsun. Bu durumda,

$$\int_X |fg|^r d\mu = \int_X (|f|^p)^{r/p} (|g|^q)^{r/q} d\mu$$

yazılırsa, $\frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1$ olduğundan $\frac{p}{r} \geq 1$ ve $\frac{q}{r} \geq 1$ için Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\int_X |fg|^r d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{r/p} \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{r/q}$$

olur. Buradan

$$\|fg\|_r = \left(\int_X |fg|^r d\mu \right)^{1/r} \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{1/q} = \|f\|_p \|g\|_q$$

elde edilir. Yine, $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ ve $g \in L^q(X, \mathcal{A}, \mu)$ olduğundan $\|f\|_p \|g\|_q < \infty$ olur. Bu nedenle, $\|fg\|_r < \infty$, yani $fg \in L^r(X, \mathcal{A}, \mu)$ olur.

- (ii) $p = \infty$ ve $q = \infty$ ise $r = \infty$ olur. Bu durumda, $f \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ ise X üzerinde hemen hemen her yerde $|f| \leq \|f\|_\infty$ ve $g \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ ise X üzerinde hemen hemen her yerde $|g| \leq \|g\|_\infty$ olur. O halde, X üzerinde hemen hemen her yerde

$$|fg| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

olur. Böylece,

$$fg \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) \quad \text{ve} \quad \|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

elde edilir.

- (iii) $p = \infty$ ve $q < \infty$ ise $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ olduğundan $r = q$ olur. Bu durumda, $f \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ ise X üzerinde hemen hemen her yerde $|f| \leq \|f\|_\infty$ olur. Buradan,

$$\int_X |fg|^r d\mu = \int_X |fg|^q d\mu \leq \|f\|_\infty^q \int_X |g|^q d\mu = \|f\|_\infty^q \|g\|_q^q$$

bulunur. Böylece,

$$fg \in L^r(X, \mathcal{A}, \mu) \quad \text{ve} \quad \|fg\|_r \leq \|f\|_\infty \|g\|_q$$

elde edilir.

□

Sonuç 1.3.54 (Genelleştirilmiş Hölder Eşitsizliği). $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı, $p_1, p_2, \dots, p_n$ pozitif reel sayılar olmak üzere, $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$ olsun. Bu durumda, $i = 1, 2, \dots, n$ için $f_i \in L^{p_i}(X, \mathcal{A}, \mu)$ olmak üzere $f_1 f_2 \cdots f_n \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ ve

$$\|f_1 f_2 \cdots f_n\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_n\|_{p_n}$$

olur.

Uyarı 1.3.55. $0 < p < 1$ durumu için, Young ve Hölder eşitsizlikleri incelenirse, $a > 0$ ve $b > 0$ olmak üzere Young eşitsizliği

$$a^{1/p} b^{1/p'} \geq \frac{1}{p} a + \frac{1}{p'} b$$

olur. $a = b$ durumunda eşitlik elde edilir. Bu eşitsizliğin ispatı

$$\begin{aligned} f &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) = x^n - nx, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı f fonksiyonunun $[0, 1]$ aralığında azalan olduğu görülerek, $1 < p < \infty$ durumuna benzer şekilde yapılır. Yine, $0 < p < 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olmak üzere, sıfırdan farklı $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $g \in L^{p'}(X, \mathcal{A}, \mu)$ fonksiyonları için $1 < p < \infty$ durumundaki aynı ispat şekliyle,

$$\int_X |fg| d\mu \geq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

elde edilir. Ayrıca, $k > 0$ reel sabit olmak üzere X üzerinde hemen hemen her yerde $|g|^{p'} = k|f|^p$ durumunda eşitlik geçerlidir. Burada, $0 < p < 1$ için p' negatif reel sayıdır.

Teorem 1.3.56 (Minkowski Eşitsizliği). $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere, $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ ve $g \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ olsun. Bu durumda,

- (i) $f + g \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$,
- (ii) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

olur.

İspat. Eğer $f = 0$ veya $g = 0$ ise istenen elde edilir. Kabul edelim ki, $f \neq 0$ ve $g \neq 0$ olsun. Burada p 'nin farklı durumlarına göre inceleyelim.

- (i) $p = 1$ ise $f, g \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ için $\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu < \infty$ ve $\|g\|_1 = \int_X |g| d\mu < \infty$ olduğundan

$$\begin{aligned} \|f + g\|_1 &= \int_X |f(x) + g(x)| d\mu \leq \int_X (|f(x)| + |g(x)|) d\mu \\ &= \int_X |f(x)| d\mu + \int_X |g(x)| d\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1 < \infty \end{aligned}$$

elde edilir.

- (ii) $p = \infty$ ise $f, g \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ için X üzerinde hemen hemen her yerde $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ ve X üzerinde hemen hemen her yerde $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ olur. Buradan, X üzerinde hemen hemen her yerde

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

bulunur. $\|\cdot\|_\infty$ tanımı gereği

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

bulunur. Ayrıca, $f \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ ise $\|f\|_\infty < \infty$ ve $g \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ ise $\|g\|_\infty < \infty$ olduğundan $\|f + g\|_\infty < \infty$ bulunur. Böylece $f + g \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ elde edilir.

(iii) $1 < p < \infty$ olsun.

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\} \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

olduğundan

$$\int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu \leq 2^p \left(\int_X |f(x)|^p d\mu + \int_X |g(x)|^p d\mu \right) < \infty$$

olur ve (i) elde edilir. Yine,

$$|f + g|^p = |f + g|^{p-1} |f + g| \leq |f| |f + g|^{p-1} + |g| |f + g|^{p-1}$$

yazılırsa,

$$\int_X |f + g|^p d\mu \leq \int_X |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int_X |g| |f + g|^{p-1} d\mu$$

olur. Eğer p ve p' eşlenik sayılar ise, $(p-1)p' = p$ olduğu kullanılırsa, $|f + g|^{(p-1)p'} \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ veya $|f + g|^{p-1} \in L^{p'}(X, \mathcal{A}, \mu)$ olur. O halde, Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\int_X |f| |f + g|^{p-1} d\mu \leq \|f\|_p \left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{1/p'}$$

ve

$$\int_X |g| |f + g|^{p-1} d\mu \leq \|g\|_p \left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{1/p'}$$

olur. Öte yandan, $\left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{1/p'} = \|f + g\|_p^{p/p'}$ olduğu kullanılırsa

$$\int_X |f + g|^p d\mu \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p/p'} \quad (1.3)$$

elde edilir. (2.3) eşitsizliği $\|f + g\|_p^{p/p'}$ ile bölünürse, $p - \frac{p}{p'} = 1$ olduğundan

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

elde edilir. □

Uyarı 1.3.57. $0 < p < 1$ durumunda, $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu), g \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ sıfırdan farklı fonksiyonlar olmak üzere, Minkowski eşitsizliğinin ispatından $\|f + g\|_p \geq \|f\|_p + \|g\|_p$ elde edilir. Böylece, $0 < p < 1$ olduğundan, $\|\cdot\|_p$ fonksiyonu $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ uzayı üzerinde bir norm tanımlamaz.

Teorem 1.3.58. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $(L^p(X, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p)$ bir normlu uzayıdır.

İspat. Minkowski eşitsizliğinden, $f, g \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ için $f + g \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ ve

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

olur. Ayrıca, $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ ve $\alpha \in \mathbb{K} (= \mathbb{R} \text{ veya } \mathbb{C})$ için $\alpha f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ ve

$$\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$$

olur. Böylece, $1 \leq p \leq \infty$ için $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, K üzerinde bir vektör uzayıdır. Dahası, $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ için $\|f\|_p = 0$ olmasının ancak ve ancak $f = 0$ olması durumunda gerçekleşeceği gösterilmişti. Buradan, $\|\cdot\|_p$ fonksiyonunun, norm özelliklerini sağladığı görülür. O halde, $1 \leq p \leq \infty$ için $(L^p(X, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p)$ normlu uzay olur. □

$L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir vektör uzayı ve $\|\cdot\|_p$ bir norm olmak üzere aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 1.3.59. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $1 \leq p \leq \infty$ ise $(L^p(X, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p)$ bir Banach uzayıdır.

İspat. İki farklı durumu inceleyelim.

Durum 1: $1 \leq p < \infty$ olsun. $(f_n), L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ de bir Cauchy dizisi olsun. O halde, her $k \in \mathbb{N}$ ve $n \geq n_k$ için

$$\|f_n - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k}$$

olacak şekilde (f_{n_k}) alt dizisi bulunur. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$g_k = |f_{n_1}| + |f_{n_2} - f_{n_1}| + \cdots + |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$$

denirse, (g_k) monoton artan negatif olmayan bir dizi olur. O halde Minkowski eşitsizliği kullanılırsa,

$$\|g_k\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + \sum_{j=1}^k \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + \sum_{j=1}^k \frac{1}{2^j} = \|f_{n_1}\|_p + 1 = C$$

olur. Buradan her $k \in \mathbb{N}$ için $g_k \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ ve $\|g_k\|_p \leq C$ olur. Böylece (g_k) artan dizisi ölçülebilir bir g fonksiyonuna yakınsar. O halde Monoton Yakınsaklık Teoreminden

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X g_k d\mu = \int_X g d\mu$$

olur. Bu nedenle

$$\int_X |g|^p d\mu = \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} |g_k|^p d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |g_k|^p d\mu \leq C^p$$

olur. Böylece $g \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ olur. O halde Teorem 1.3.56 (ii) dolayısıyla X üzerinde hemen hemen her yerde g fonksiyonu sonludur. Dolayısıyla,

$$|f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$$

serisi X üzerinde hemen hemen her yerde yakınsaktır. Böylece,

$$f_{n_1} + \sum_{j=1}^{\infty} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j})$$

serisi X üzerinde hemen hemen her yerde yakınsak olur. Eğer

$$f_{n_1} + \sum_{j=1}^{\infty} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j}) = f_{n_k}$$

olduğu göz önüne alınırsa, (f_{n_k}) dizisi X üzerinde ölçülebilir bir fonksiyona hemen hemen her yerde yakınsaktır. O halde (f_{n_k}) dizisi X üzerinde hemen hemen her yerde yakınsak olduğundan

$$A = \{x \in X : \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) < \infty\}$$

için $\mu(X \setminus A) = 0$ olur. Eğer

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x), & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

tanımlanırsa, X üzerinde hemen hemen her yerde $f_{n_k} \rightarrow f$ olur. O halde (f_n) dizisi X üzerinde bir Cauchy dizisi olduğundan her $n, n_k \geq N_\varepsilon$ için

$$\|f_n - f_{n_k}\|_p < \varepsilon$$

olur. Böylece, Fatou Lemması kullanılırsa

$$\|f - f_n\|_p^p = \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} |f_{n_k} - f_n|^p d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_{n_k} - f_n|^p d\mu \leq \varepsilon^p$$

olur. Böylece her $n \geq N_\varepsilon$ için $(f - f_n) \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0$ elde edilir. Diğer taraftan, her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ ve $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir vektör uzayı olduğundan her $n \geq N_\varepsilon$ için

$$f = (f - f_n) + f_n \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$$

olur. Böylece $1 \leq p < \infty$ için $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ Banach uzayı olur.

Durum 2: $p = \infty$ olsun. (f_n) , $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ de bir Cauchy dizisi olsun. O halde her $k \in \mathbb{N}$ için bir $E_k \in \mathcal{A}$ vardır öyle ki $\mu(E_k) = 0$ ve her $m, n \geq N_k$ ve $x \notin E_k$ için

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k} \quad (1.4)$$

olmasıdır. $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ denirse $\mu(E) = 0$ 'dır. Buradan, her $x \notin E$ için $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin $\mathbb{R}$ (ya da $\mathbb{C}$) uzayında bir Cauchy dizisi olduğu görülür. $\mathbb{R}$ (ya da $\mathbb{C}$) tam uzay olduğundan limit fonksiyonu f olmak üzere X üzerinde hemen hemen her yerde $f_n(x) \rightarrow f(x)$ olur. O halde (1.4) ifadesinde $m \rightarrow \infty$ için limite geçilirse her $n \geq N_k$ için X üzerinde hemen hemen her yerde

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}$$

olur. Buradan her $n \geq N_k$ için $(f - f_n) \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ bulunur. Yine $n \geq N_k$ için $f = (f - f_n) + f_n \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ olur. Bundan başka her $n \geq N_k$ için

$$\|f - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}$$

olur. Bu ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$$

olması demektir. Yani, $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir Banach uzayıdır. $\square$

Teorem 1.3.60. X bir yerel kompakt Hausdorff uzayı, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $1 \leq p < \infty$ ise $C_c(X)$ uzayı $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ uzayında $\|\cdot\|_p$ normuna göre yoğundur.

Tanım 1.3.61. X bir yerel kompakt Hausdorff uzayı ve $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu olsun. Her $\varepsilon > 0$ için bir $K_\varepsilon \subseteq X$ kompakt kümesi her bir $x \notin K_\varepsilon$ için $|f(x)| < \varepsilon$ koşulunu sağlayacak şekilde varsa f fonksiyonu X üzerinde **sonsuzda sıfırdır** denir.

X üzerinde tüm sonsuzda sıfır fonksiyonların uzayı $C_0(X)$ ile gösterilir ve $C_c(X) \subseteq C_0(X)$ geçerlidir. Eğer X kompakt uzay ise bu iki uzay aynıdır.

Teorem 1.3.62. X bir yerel kompakt Hausdorff uzayı ise $C_c(X)$ uzayı $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ normuna göre $C_0(X)$ uzayında yoğundur.

Teorem 1.3.63. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ sonlu bir ölçü uzayı ve $1 < p, p' < \infty$ eşlenik sayılar olsun. Bu durumda, $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ uzayının dual uzayı $L^{p'}(X, \mathcal{A}, \mu)$ uzayıdır. Özel olarak, $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ uzayının dual uzayı ise $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ uzayıdır.

Tanım 1.3.64. Ölçülebilir bir X uzayı üzerinde tanımlı, karmaşık değerli ölçülebilir fonksiyonların oluşturduğu bir $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normlu uzayında, eğer her bir $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ ölçülebilir fonksiyonu, bir $g \in Y$ için $|f| \leq |g|$ eşitsizliğini yerel olarak hemen her yerde sağlıyor iken $f \in Y$ ve $\|f\|_Y \leq \|g\|_Y$ geçerli ise $(Y, \|\cdot\|_Y)$ uzayına **katı (solid) uzay** denir.

1.4 SOYUT HARMONİK ANALİZ VE FOURIER ANALİZ

Soyut harmonik analiz, klasik Fourier analizini çeşitli gruplara genelleştiren harmonik analiz dalıdır. Yerel kompakt grup üzerinde Haar ölçüsü olarak adlandırılan ötelemeler altında değişmez kalan bir ölçünün varlığı, bu çeşit gruplarda harmonik analiz için temel araç olmuştur. Bir grup üzerinde harmonik analiz, grup üzerinde ölçülebilir fonksiyonların çalışılmasıyla temel olarak ilgilenir. Özellikle, $L^1(G)$, $L^2(G)$ uzayları Haar ölçüsüne göre incelenir. Haar ölçüsünün en önemli özelliği olan ötelemeler altında değişmez kalması, Fourier analizin bir genellemesi olarak, bu fonksiyon uzayları üzerinde analiz yapmamıza izin verir.

Fourier analizi, ilk sinyalin tanımladığı G grubunun yapısını yansıtan basit sinyallerin doğrusal bileşenleri olarak karmaşık bir sinyalin temsilini amaçlar. Harmonik analiz, klasik Fourier analizinde üstel fonksiyonların rolünü oynayan grup temsilleri teorisinden ayrı düşünülemez. Bir başka deyişle, harmonik analiz $\mathbb{R}$ reel sayıların yerine keyfi bir G grubu alınarak elde edilen klasik Fourier analizin genelleştirilmesidir. Bu nedenle, grup yapısı bakımından ayırt edilmelidir. Çünkü, genel olarak grupları değişmeli ve değişmeli olmayan grup şeklinde sınıflarsak, değişmeli bir G grubu üzerinde Fourier analizi grup karakterleri aracılığıyla tanımlanır. Bununla birlikte değişmeli olmayan gruplar üzerinde Fourier analizi için grup karakterleri yeterli olmaz. Bu bakımdan ayrı bir teoriye ihtiyaç duyulmaktadır.

Öte yandan, bir G grubu topolojikleştirilebilir ve bu grup işlemlerinin sürekli olduğu varsayılır. G grubu topolojik grup olarak düşünüldüğünde, soyut harmonik analiz çalışılması için gruplar kompakt, yerel kompakt ve kompakt olmayan ile ayrık grup olarak ayırt edilmedilir. Bu nedenle, soyut harmonik analiz, bu gruplar için hem değişmeli hem de değişmeli olmayan gruplar için tartışılır.

Bunun dışında her yerel kompakt G grubunda ise G hakkındaki temel bilgileri kodlayan pek çok Banach cebiri oluşturulabilir. En önemlilerinden biri $L^1(G)$ grup cebiridir. Bu $L^1(G)$ grup cebiri girişim işlemi ile G grubu üzerinde integrallenebilen fonksiyonların (denklik sınıflarının) uzayıdır. Bu kitabın temel konusu olan ve Lebesgue uzaylarından farklı, aynı zamanda genelleyen bir başka Banach cebiri Orlicz cebiridir. Orlicz cebirleri ve temel özellikleri İstanbul Üniversitesi ekibi tarafından geliştirilerek literatüre kazandırılmıştır[30, 33, 34]. Bu konuyla ilgili çalışmalar ileride verilecektir. Öte yandan Banach cebirlerinin temel teorisi de harmonik analiz çalışmalarının temel araçlarındandır.

Bir başka açıdan, yerel kompakt gruplar üzerinde harmonik analiz girişim işlemi ile ilgili çalışması olarak düşünülenebilir. İhtiyacımız olan bu kavramları vereceğiz.

1.4.1 Yerel Kompakt Gruplar

Tanım 1.4.1. G bir Hausdorff topolojik uzayı ve aynı zamanda bir grup olsun. $G \times G$ kartezyen çarpımından G 'ye $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ dönüşümü sürekli bir fonksiyon ise G topolojik grup olarak adlandırılır. Örneğin her grup, ayrık topolojiye göre bir topolojik gruptur.

Eğer topolojisi yerel kompakt, yani her $x \in G$ noktasının kompakt bir komşuluğu var ise G 'ye yerel kompakt grup denir. Eğer G bir değişmeli grup ise G yerel kompakt değişmeli grup olarak adlandırılır.

Değişmeli yerel kompakt gruplar harmonik analizde, özellikle Fourier ve zaman frekans

analizinde ayrıca ilgi çekicidir. Bu ise, değişmeli yerel kompakt gruplarda öteleme altında değişmez olan Haar ölçüsünün varlığı ve Pontryagin- van Kampen (L. S. Pontryagin, 1908-1988, Rus matematikçi; E.R. van Kampen, 1908-1942, Alman matematikçi) dualite teorisinin geçerli olmasından kaynaklıdır.

G yerel kompakt grup için en güçlü aracımız Haar ölçüsü olarak adlandırılan bir fonksiyon olacaktır. Öteleme altında değişmez kalmak üzere sağ ve sol Haar ölçüsü olarak iki şekilde karşımıza çıkar. Daha belirgin olarak, bir μ sol (sağ) Haar ölçüsü, her $E \subseteq G$ Borel ölçülebilir kümesi ve $x \in G$ için $\mu(xE) = \mu(E)$ (benzer şekilde $\mu(Ex) = \mu(E)$) koşulunu sağlayan G üzerinde sıfır olmayan bir regüler Borel ölçüsüdür. Ayrıca, $\mu(E)$ bir sol Haar ölçüsü olması için gerek ve yeter koşul $E \mapsto \mu(E^{-1})$ bir sağ Haar ölçüsü olmalıdır. Değişmeli bir G yerel kompakt grubu için $\mu(xE) = \mu(Ex) = \mu(E)$ 'dir. Eğer $\mu(G) = 1$ ise Haar ölçüsüne normalleştirilmiş Haar ölçüsü denir.

Sol ve sağ değişmez ölçüler arasında modular fonksiyon adı verilen ve $\Delta : G \rightarrow (0, +\infty)$ ile gösterilen sürekli bir homomorfizma ilişkisi vardır. Eğer $\Delta = 1$ ise G **unimodular** grup olarak adlandırılır. Değişmeli, kompakt veya ayrık yerel kompakt gruplar unimodular gruplardır. Öte yandan, μ Haar ölçüsünün sonlu olması için gerek ve yeter koşul G 'nin kompakt grup olmasıdır. Yine, G ayrık ve sonsuz bir grup ise e_G grubun birimi olmak üzere $\mu(\{e_G\}) = 1$ alınabilir.

Unimodular olmayan en basit grup örneği ise afin gruptur. Öte yandan, unimodular grup için sol ve sağ Haar ölçüsü yerine Haar ölçüsü kavramı kullanılır. Biz de kolaylık olması bakımından sol ve sağ Haar ölçüleri için basitçe Haar ölçüsü diyelim. Buna göre, aşağıdaki iki teorem yerel kompakt gruplar teorisi için çok önemlidir.

Teorem 1.4.2. Her yerel kompakt grup bir Haar ölçüsüne sahiptir.

Teorem 1.4.3. Yerel kompakt grupların Haar ölçüsü pozitif bir skaler çarpımı kadar tektir.

Şimdi farklı yerel kompakt grupların ve Haar ölçülerinin birkaç örneğini verelim.

Örnek 1.4.4.

- (i) $\mathbb{R}^n$ toplamsal grubu alışılmış topoloji ile yerel kompakt değişmeli bir gruptur. $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Haar ölçüsü Lebesgue ölçüsüdür.
- (ii) $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ çarpım grubu yerel kompakt bir gruptur. $\mathbb{R}^*$ grubu üzerindeki Haar ölçüsü $\frac{d\mu(x)}{|x|}$ şeklindedir. Burada, $d\mu(x)$ Lebesgue ölçüsüdür.
- (iii) $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ çarpım grubu yerel kompakt bir gruptur. $\mathbb{C}^*$ grubu üzerindeki Haar ölçüsü $\frac{d\mu(x)d\mu(y)}{x^2+y^2}$ şeklindedir.
- (iv) $\mathbb{Z}$ toplamsal grubu ayrık topolojiye göre yerel kompakt değişmeli bir gruptur ve sayma ölçüsüne sahiptir.
- (v) $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ torus çarpımsal ayrıca kompakt bir gruptur.
- (vi) $GL(n, \mathbb{C})$, $n \times n$ tipinde katsayıları kompleks terslenebilir matrislerin kümesidir. Bu kümelerin matris çarpma işlemi ile oluşturduğu gruba genel lineer grup denir. $GL(n, \mathbb{R})$

yerel kompakt bir gruptur. $GL(n, \mathbb{R})$ grubu üzerindeki Haar ölçüsü $|\det A|^{-n} dA$ şeklindedir. Burada dA , $M(n, \mathbb{R})$ matris grubu üzerindeki Lebesgue ölçüsüdür. Aslında $GL(n, \mathbb{R})$ bir reel Lie grubudur. Bir reel Lie grubu, pürüzsüz (smooth) grup işlemleriyle yerel kompakt grup yapısına sahip pürüzsüz manifoldlardır.

- (vii) $SU(2)$, 2×2 tipinde kompleks katsayılı, tersi kompleks eşleniğinin transpozuna eşit ve determinantı 1 olan matrislerin kümesidir. Bir başka deyişle,

$$SU(2) := \{A : \bar{A}^t = A^{-1} \text{ ve } \det A = 1\}$$

şeklindedir. $SU(2)$, yerel kompakt bir gruptur. f , $SU(2)$ grubu üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere, Haar ölçüsü

$$\int_{SU(2)} f(x) d\mu(x) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f \circ \phi(\theta, \varphi, \gamma) \sin^2 \theta \sin \varphi d\theta d\varphi d\gamma$$

şeklindedir. Burada, $x_1 = \cos \theta$, $x_2 = \sin \theta \cos \varphi$, $x_3 = \sin \theta \sin \varphi \sin \gamma$ olmak üzere, $\phi(\theta, \varphi, \gamma) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ile verilir.

- (viii) $O(n)$, $n \times n$ tipinde kompleks katsayılı, tersi transpozuna eşit olan matrislerin kümesidir. Yani,

$$O(n) := \{A : A^t = A^{-1}\}$$

şeklindedir ve ortogonal grup olarak adlandırılır. $SO(n)$ ise $O(n)$ ortogonal grubunun determinantı 1 olan alt grubudur ve

$$SO(n) := \{A : A^t = A^{-1} \text{ ve } \det A = 1\}$$

şeklinde yazılabilir. $SO(n)$ kümesinin matris çarpımına göre oluşturduğu gruba özel ortogonal grup denir. $SO(3)$, yerel kompakt bir gruptur. f , $SO(3)$ üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere, Haar ölçüsü

$$\int_{SO(3)} f(x) d\mu(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\theta \int_{S^2} d\sigma A(u) f(\exp(\theta T(u))) \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

şeklindedir. Burada, σ , S^2 birim küresi üzerinde normleştirilmiş düzgün ölçü, $u(a, b, c)$, $(a^2 + b^2 + c^2 = 1)$, S^2 birim küresinde bir nokta ve T dönüşümü

$$T(u) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Her yerel kompakt G grubu dual grubu olarak adlandırılan $\hat{G}$ ile ilişkilendirilir.

$$\hat{G} = \{\varphi : G \rightarrow \mathbb{T} : \varphi \text{ grup homomorfizmasıdır.}\}$$

Dual grup noktasal çarpıma göre bir grup yapısına sahiptir. Ayrıca, dual grup topolojik uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonlar için kompakt açık topoloji (Gelfand topolojisi) ile donatılmıştır. Böylece $\hat{G}$ dual grubu da değişmeli yerel kompakt bir gruptur. Yine, $\hat{G}$ yerel kompakt değişmeli grubunun dual grubu G grubudur.

Örnek 1.4.5. Aşağıdaki izomorfizmalar geçerlidir.

- (i) $\hat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$.
- (ii) $\hat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{T}$.
- (iii) $\hat{\mathbb{T}} \cong \mathbb{Z}$.

1.4.2 Girişim Çarpımı ve Eşitsizlikler

Yerel kompakt bir grup üzerinde bir Haar ölçüsünün varlığı bir dizi cebir tanımlamamıza izin verir. Bu tanımlar girişim olarak adlandırılan temel işleme dayanır. Bu kısımda girişim işlemi ve Lebesgue uzaylarına ilişkin temel eşitsizlikler verilecek, daha sonra da cebir yapıları tanıtılacaktır.

Tanım 1.4.6. $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$, bir yerel kompakt G grubu üzerinde ölçülebilir fonksiyonlar olsun. $f * g$ girişimi

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)d\mu(y)$$

integrali anlamlı olduğunda tanımlanır. Eğer G yerel kompakt grup değişmeli ise integralin içi $f(y)g(x - y)$ şeklinde olur.

Girişim işleminin tanımlı olacağı aşağıdaki teoremleri verelim.

Teorem 1.4.7 (Girişim için Young Eşitsizliği). G bir yerel kompakt değişmeli grup, $1 \leq p, q \leq \infty$ olmak üzere $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0$ olsun. Bu durumda, $f \in L^p(G)$ ve $g \in L^q(G)$ için

- (i) hemen hemen her $x \in G$ için $y \rightarrow f(y)g(x - y)$ ölçülebilir fonksiyonu G üzerinde integrallenebilir,

- (ii) $(f * g)(x) = \int_G f(y)g(x - y)d\mu$ olmak üzere,

$$(f * g) \in L^r(G) \text{ ve } \|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

olur.

İspat. Kabul gereği, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ ise,

1.durum: $q = 1$ için, (a) $p = 1$ ise $r = 1$, (b) $p = \infty$ ise $r = \infty$, (c) $1 < p < \infty$ ise $r = p$,

2.durum: $1 < p < \infty, 1 < q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise $r = \infty$,

3.durum: $1 < p < \infty, 1 < q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r} > 1$

olur. Bu üç durumu aşağıda sırasıyla inceleyelim.

1.durum: (a) $f \in L^1(G), g \in L^1(G)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \int_G |(f * g)(x)| dx &= \int_G \left| \int_G f(y)g(x-y) dy \right| dx \leq \int_G \left(\int_G |f(y)| |g(x-y)| dy \right) dx \\ &\leq \int_G |f(y)| \left(\int_G |g(x-y)| dx \right) dy = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty \end{aligned}$$

olur. Böylece, $y \mapsto f(y)g(x-y)$ fonksiyonu, G üzerinde hemen her $x \in G$ için integrallenebilir ve $\int_G |(f * g)(x)| dx \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ ya da

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

elde edilir.

(b) $f \in L^\infty(G), g \in L^1(G)$ olsun. Her $x \in G$ için

$$\int_G |f(y)| |g(x-y)| dx dy \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$$

olur. Böylece, $y \mapsto f(y)g(x-y)$ fonksiyonu G üzerinde hemen her $x \in G$ için integrallenebilir ve

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$$

elde edilir.

(c) $1 < p < \infty$ olmak üzere, $f \in L^p(G)$ ve $g \in L^1(G)$ olsun. $f \in L^p(G)$ ise $|f|^p \in L^1(G)$ olur. (a) şikkından, hemen hemen her $x \in G$ için

$$|f(y)|^p |g(x-y)| \in L^1(G)$$

ya da $|f(y)| |g(x-y)|^{\frac{1}{p}} \in L^p(G)$ olur. p, p' eşlenik sayılar olmak üzere, $|g(\cdot - y)|^{\frac{1}{p'}} \in L^{p'}(G)$ olduğundan $|f(y)| |g(x-y)| = |f(y)| |g(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(x-y)|^{\frac{1}{p'}}$ yazılırsa, Hölder eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \int_G |f(y)| |g(x-y)| dy &\leq \left(\int_G |f(y)|^p |g(x-y)| dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_G |g(x-y)| d\mu \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \left(\int_G |f(y)|^p |g(x-y)| dy \right)^{\frac{1}{p}} \|g\|_1^{\frac{1}{p'}} \end{aligned}$$

olur. Hemen her $x \in G$ için

$$|(f * g)(x)|^p \leq \int_G |f(y)|^p |g(x-y)| dy \|g\|_1^{\frac{p}{p'}}$$

yazılır. Yine, $|f|^p \in L^1(G)$, $|g| \in L^1(G)$ olmak üzere,

$$\int_G |f(y)|^p |g(x-y)| dy = (|f|^p * |g|)(x)$$

olur. (a) şıkkı uygulanırsa,

$$\int_G \int_G |f(y)|^p |g(x-y)| dy dx = \| |f|^p * |g| \|_1 \leq \| |f|^p \|_1 \| |g| \|_1 = \|f\|_p^p \|g\|_1$$

elde edilir. Böylece,

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$$

bulunur. (p ve p' eşlenik olduğundan $\frac{p'+p}{p'} = p$ şeklindedir.

2.durum: $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ ve p, q eşlenik olmak üzere, $f \in L^p(G)$, $g \in L^q(G)$ olsun. O halde, Hölder eşitsizliğinden

$$\int_G |f(y)| |g(x-y)| dy \leq \|f\|_p \|g\|_q < \infty$$

olur. Böylece, hemen her $x \in G$ için $|(f * g)(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q$ olduğundan $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$ elde edilir.

3.durum: $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ ve p', q' sırasıyla, p, q nun eşleniği olsun. Böylece,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q'}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p'}, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{p'} = 1$$

olur. $f \in L^p(G)$, $g \in L^q(G)$ olduğundan

$$|(f * g)(x)| \leq \int_G |f(y)| |g(x-y)| dy = \int_G [|f(y)|^p |g(x-y)|^q]^{\frac{1}{r}} |f(y)|^{\frac{p}{q'}} |g(x-y)|^{\frac{q}{p'}} dy$$

olur. Burada, $p_1 = r$, $p_2 = q'$, $p_3 = p'$ için (2.7)'den $\frac{1}{r} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{p'} = 1$ olduğundan genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$|(f * g)(x)| \leq \left(\int_G |f(y)|^p |g(x-y)|^q dy \right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_p^{\frac{p}{q'}} \|g\|_q^{\frac{q}{p'}} \quad (1.5)$$

olur. Diğer taraftan, Teorem 1.3.33'ten

$$\int_G \left(\int_G |f(y)|^p |g(x-y)|^q dy \right) dx = \int_G |f(y)|^p \left(\int_G |g(x-y)|^q dx \right) dy = \|f\|_p^p \|g\|_q^q < \infty \quad (1.6)$$

elde edilir. Böylece, hemen hemen her $x \in G$ için

$$\int_G |f(y)|^p |g(x-y)|^q dy < \infty \quad (1.7)$$

olur. Ayrıca, (1.6) ve (1.7) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} \|f * g\|_r^r &= \int_G |(f * g)(x)|^r dx \\ &\leq \int_G \int_G |f(y)|^p |g(x-y)|^q dy dx \|f\|_p^{\frac{rp}{q'}} \|g\|_q^{\frac{rq}{p'}} \\ &\leq \|f\|_p^p \|g\|_q^q \|f\|_p^{\frac{rp}{q'}} \|g\|_q^{\frac{rq}{p'}} = \|f\|_p^{p(1+\frac{r}{q'})} \|g\|_q^{q(1+\frac{r}{p'})} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, (1.5)'ten

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

bulunur. □

1.4.3 Fourier Dönüşümü

G bir yerel kompakt grup ve $\hat{G}$ dual grubu olsun. $f \in L^1(G)$ için $\hat{f} : \hat{G} \rightarrow \mathbb{C}$ **Fourier dönüşümü**

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G f(x) \overline{\gamma(x)} dx, \quad \gamma \in \hat{G}$$

şeklinde tanımlanır ve $|\hat{f}(\gamma)| \leq \|f\|_1$ geçerlidir. Bu durumda, $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$ olur.

Öte yandan, hemen hemen her $x \in G$ için

$$f(x) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\gamma) \gamma(x) d\gamma$$

geçerlidir.

Önerme 1.4.8. Eğer $f, g \in L^1(G)$ ise $\widehat{(f * g)} = \hat{f} \hat{g}$ olur.

1.4.4 Banach Cebirleri ve Banach Modülleri

Tanım 1.4.9. $A, \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer A ,

$$\begin{aligned} A \times A &\rightarrow A \\ (a, b) &\rightarrow ab \end{aligned}$$

dönüşümüne göre bir halka ve her $a, b \in A$ ve $\alpha \in \mathbb{K}$ için, $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$ koşulu sağlanıyorsa A vektör uzayına $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir **cebiri** denir.

Eğer, her $a, b \in A$ için $ab = ba$ koşulu sağlanıyorsa A cebirine **değişmelidir** denir. Ayrıca, her $a \in A$ için $ea = ae = a$ olacak şekilde bir $e \in A$ elemanı varsa A cebirine **birimli cebiri** denir. Bu durumda, e elemanına A cebirinin birimi denir.

Tanım 1.4.10. $(A, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $A, \mathbb{K}$ cismi üzerinde bir cebiri olsun. Eğer norm, alt çarpımsallık özelliğini sağlıyorsa, bir başka deyişle her $a, b \in A$ için

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$$

eşitsizliği sağlanıyorsa A cebirine $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir **normlu cebiri** denir.

Eğer bir A normlu cebiri $\|\cdot\|$ normuna göre bir Banach uzayı ise A **Banach cebiri** olarak adlandırılır.

Örnek 1.4.11. X bir yerel kompakt Hausdorff uzay olsun.

$$C_b(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ sürekli ve sınırlı}\}$$

uzayı, $f \in C_b(X)$ için

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

norma ve noktasal çarpıma göre değişmeli ve birimli bir Banach cebiridir.

Tanım 1.4.12. $(A, \|\cdot\|)$ bir normlu cebiri ve (e_α) A 'da bir ağ olsun. Eğer her $x \in A$ için $\|e_\alpha x - x\| \rightarrow 0$ ($\|xe_\alpha - x\| \rightarrow 0$) ise (e_α) ağına A normlu cebirinin bir **sol (sağ) yaklaşık birimi** denir. Eğer (e_α) , hem sol hem de sağ yaklaşık birim ise A cebirinin yaklaşık birimi olarak adlandırılır. Yine, bir (sol ya da sağ) yaklaşım birim (e_α) için bir $M > 0$ reel sayısı her $\alpha \in I$ için $\|e_\alpha\| \leq M$ olacak şekilde varsa (e_α) sınırlıdır denir.

Banach cebirleri, sürekli bir çarpımla donatılmış Banach uzaylardır. Genel olarak, üç tip Banach cebiri vardır. Bunlar, Banach uzayları üzerinde tanımlı lineer ve sınırlı operatörlerin oluşturduğu uzayın operatör normu ve bileşke işlemine göre Banach cebirleri, topolojik uzaylar üzerinde tanımlı sınırlı, sürekli fonksiyonlar uzayının oluşturduğu düzgün norm ve noktasal çarpıma göre Banach cebiri ve bir G yerel kompakt grup üzerinde tanımlı integrelenebilen fonksiyonların girişim işlemine göre Banach cebirleridir. Bu kitabın ilgilendiği Banach cebirleri de son tip Banach cebirleridir.

Tanım 1.4.13. $A, \mathbb{K}$ cismi üzerinde bir Banach cebiri ve $E, \mathbb{K}$ üzerinde bir vektör uzayı

olsun. Eğer

$$\begin{aligned} A \times E &\rightarrow E \\ (a, x) &\rightarrow ax \end{aligned}$$

dönüşümü için

- (i) her $a \in A$ için $x \mapsto ax$ dönüşümü E üzerinde lineer,
- (ii) her $x \in E$ için $a \mapsto ax$ dönüşümü A üzerinde lineer,
- (iii) her $a, b \in A$ ve her $x \in E$ için $a(bx) = (ab)x$

koşulları sağlanıyorsa E 'ye bir **sol A modülü** denir.

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} E \times A &\rightarrow E \\ (x, a) &\rightarrow xa \end{aligned}$$

dönüşümü için

- (i) her $a \in A$ için $x \mapsto xa$ dönüşümü E üzerinde lineer,
- (ii) her $x \in E$ için $a \mapsto xa$ dönüşümü A üzerinde lineer,
- (iii) her $a, b \in A$ ve her $x \in E$ için $(xa)b = x(ab)$

koşulları sağlanıyorsa E 'ye bir **sağ A modülü** denir.

Eğer E hem sol hem sağ A modülü ve her $a, b \in A, x \in E$ için

$$a(xb) = (ax)b$$

koşulu sağlanıyorsa, E 'ye bir **ikili modülü** denir.

Tanım 1.4.14. $(A, \|\cdot\|)$ bir Banach cebiri ve $(E, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı olmak üzere, E, A üzerinde bir modül olsun. Eğer bir $M > 0$ sayısı, her $a \in A$ ve $x \in E$ için

$$\|ax\|_E \leq M\|a\|_A\|x\|_E$$

olacak şekilde varsa, E 'ye A üzerinde bir sol Banach modülü veya sol Banach A modül denir. Benzer şekilde,

$$\|xa\|_E \leq M\|x\|_E\|a\|_A$$

koşulu sağlanıyorsa E 'ye A üzerinde bir sağ Banach modülü veya sağ Banach A modül denir. Eğer E, A üzerinde hem sol hem sağ Banach modülü ise E 'ye bir Banach A modülü denir.

Örnek 1.4.15. A bir Banach cebiri ve E , bir sol Banach A modülü olsun. Bu durumda, E modülünün duali E^* aşağıdaki modül işlemiyle birlikte bir sağ Banach A modülüdür.

$$\langle x, \lambda a \rangle = \langle ax, \lambda \rangle, \quad a \in A, x \in E, \lambda \in E^*.$$

Benzer şekilde, E , bir sağ Banach A modülü ise E^*

$$\langle x, a\lambda \rangle = \langle xa, \lambda \rangle, \quad a \in A, x \in E, \lambda \in E^*$$

modül işlemiyle birlikte bir sol Banach A modülüdür.

Teorem 1.4.16. G bir yerel kompakt grup olsun. $L^1(G)$, $\|\cdot\|_1$ normu ve girişim çarpımına göre bir Banach cebiridir.

$L^1(G)$ grup cebiri olarak adlandırılır. Eğer G ayrık değilse, $L^1(G)$ 'nin birimi yoktur. Genel olarak, elemanları $C_c(G)$ uzayında olan iki taraflı sınırlı bir yaklaşık birime sahiptir.

Teorem 1.4.17. G bir yerel kompakt grup olsun.

- (i) $L^1(G)$ değişmeli Banach cebiri olması için gerek ve yeter koşul G grubunun değişmeli olmasıdır.
- (ii) $L^1(G)$ birimli Banach cebiri olması için gerek ve yeter koşul G grubunun ayrık olmasıdır.

Teorem 1.4.18. G bir yerel kompakt grup, $1 \leq p < \infty$ olsun. $L^p(G)$, sol (sağ) Banach $L^1(G)$ modülüdür. Bir başka ifadeyle, $L^p(G) \times L^1(G) \rightarrow L^p(G)$, $(f, g) \rightarrow f * g$ sınırlı ikili lineer dönüşümdür.

2. DIŞBÜKEY FONKSİYONLAR

Dışbükey fonksiyonlar fonksiyonel analizde önemli bir yere sahiptir. Özellikle, optimizasyon problemleriyle ilgilidir. Öte yandan, bazı uzaylar da dışbükey fonksiyonlar aracılığıyla tanımlanır. Özel olarak, Orlicz uzayları Young fonksiyonları ile belirlendiği için bu fonksiyonlarda dışbükeylik önemli rol oynar.

Bu bölümde, dışbükey fonksiyonlarla ilgili süreklilik, türevlenebilirlik, integral temsili gibi özellikler ve aralarındaki ilişkiler verilecektir.

2.1 DIŞBÜKEY FONKSİYONLAR VE ÖZELLİKLERİ

Orlicz uzaylarını belirleyen Young fonksiyonu dışbükey fonksiyon olduğundan, dışbükey fonksiyonlarla ilgili temel özellikler bu kısımda verilmiştir.

$I, \mathbb{R}$ reel sayıların bir aralığını gösterecektir.

Tanım 2.1.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık olsun. Bir $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

koşulunu sağlıyor ise f fonksiyonuna **dışbükey** denir. Ayrıca,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

koşulu sağlanıyor ise f fonksiyonuna **kesin dışbükey** denir.

Eğer $-f$ fonksiyonu dışbükey ise $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna **içbükey** denir.

Örnek 2.1.2. $I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, $f(x) = |x|$ mutlak değer fonksiyonu dışbükeydir. Gerçekten de, keyfi $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) = |\alpha x + (1 - \alpha)y| \leq \alpha|x| + (1 - \alpha)|y| = \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

olur. Böylece, f dışbükeydir.

Teorem 2.1.3. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) Her $x_1, x_2 \in I$ ve her $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ için, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ olmak üzere $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$,
- (ii) $x_1, x_2 \in I$ için $x_1 < x_2$ olmak üzere her $x \in [x_1, x_2]$ için $P(x) = (x, f(x))$ noktası $P(x_1), P(x_2)$ doğrusunun altında kalır,
- (iii) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I \text{ ve } y \geq f(x)\}$ kümesi, $\mathbb{R}^2$ 'nin dışbükey bir alt kümesidir,
- (iv) her $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$, her $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$ için $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ olmak üzere $f(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$ geçerlidir.

Gözlem 2.1.4. Eğer bir f fonksiyonu, I_1 ve I_2 aralıkları üzerinde dışbükey ise $I_1 \cup I_2$ üzerinde dışbükey olması gerekmez. Ancak, f fonksiyonu $I_1 \cap I_2$ aralığı üzerinde dışbükeydir.

Örnek 2.1.5. Eğer $f(x) = -\sqrt{x^2 - 1}$ şeklinde bir f fonksiyonu alınırsa, f , $(-\infty, -1]$ ve $[1, +\infty)$ aralıkları üzerinde dışbükey olmasına karşın, $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ üzerinde dışbükey değildir.

Teorem 2.1.6. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I aralığında türevlenebilir olsun. f fonksiyonunun dışbükey olması için gerek ve yeter koşul f' türev fonksiyonunun artan olmasıdır.

Teorem 2.1.7. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda, f fonksiyonunun I üzerinde dışbükey olması için gerek ve yeter koşul her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

olmasıdır.

İspat. Okuyucuya bırakılmıştır. □

Teorem 2.1.8 (Dışbükeylik için İkinci Türev Testi). $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ iki kez türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda, f fonksiyonunun dışbükey olması için gerek ve yeter koşul her $x \in I$ için $f''(x) \geq 0$ olmasıdır. Ayrıca, f fonksiyonu kesin dışbükey bir fonksiyon ise her $x \in I$ için $f''(x) > 0$ olur.

Önerme 2.1.9. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dışbükey fonksiyonlar olsun. Bu durumda, $\beta \geq 0$ olmak üzere, $f + g$ ve βf fonksiyonları dışbükeydir.

Uyarı 2.1.10. İki dışbükey fonksiyonun bileşkesinin dışbükey olması gerekmez.

Örnek 2.1.11. Eğer $f(x) = -\frac{1}{x}$ ve $g(x) = e^{-x}$ fonksiyonları alınırsa, f fonksiyonu $(-\infty, 0)$ aralığı üzerinde ve g fonksiyonu $[0, +\infty)$ aralığı üzerinde dışbükey fonksiyonlardır. Öte yandan, $(g \circ f)(x) = e^{1/x}$ bileşke fonksiyonuna ikinci türev testi uygulanırsa, her $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ için,

$$(g \circ f)''(x) = \frac{1}{x^4} e^{1/x} (1 + 2x) < 0$$

olur. Bu durumda, $(g \circ f)$ bileşke fonksiyonu, $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ aralığı üzerinde dışbükey değildir.

Önerme 2.1.12. $f(I) \subseteq J$ olmak üzere, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları dışbükey ve g fonksiyonu artan ise $g \circ f$ bileşke fonksiyonu I üzerinde dışbükeydir.

İspat. Keyfi $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0, 1]$ olsun. f dışbükey ve g artan fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\alpha x + (1 - \alpha)y) &= g(f(\alpha x + (1 - \alpha)y)) \\ &\leq g(\alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)) \\ &\leq \alpha g(f(x)) + (1 - \alpha)g(f(y)) \\ &= \alpha(g \circ f)(x) + (1 - \alpha)(g \circ f)(y) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise, $g \circ f$ bileşke fonksiyonunun dışbükey olmasıdır. □

Uyarı 2.1.13. Önerme 2.1.12'nin tersi doğru değildir. Bunun için aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 2.1.14. $I = (0, +\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı $f(x) = e^x$ ve $g(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonları alınırsa, f, g ve $(g \circ f) = e^{-x}$ fonksiyonları I üzerinde dışbükey olur. Fakat, g fonksiyonu I aralığında azalandır.

Önerme 2.1.12'den aşağıdaki sonuçları çıkarabiliriz

Sonuç 2.1.15. $f(I) \subseteq J$ olmak üzere, $f : I \rightarrow \mathbb{R}, g : J \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bileşke fonksiyonu olsun.

- (i) g dışbükey, azalan ve f içbükey ise $g \circ f$ dışbükeydir.
- (ii) g içbükey, artan ve f içbükey ise $g \circ f$ içbükeydir.
- (iii) g içbükey, azalan ve f dışbükey ise $g \circ f$ içbükeydir.

Önerme 2.1.16. Artan ve dışbükey (içbükey) fonksiyonun tersi içbükey (dışbükey) olur.

Uyarı 2.1.17. Fonksiyon artan değilse Önerme 2.1.16 gerçekleşmek zorunda değildir. Bunun için aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 2.1.18. Bir $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu alalım. Bu durumda, $f, (0, +\infty)$ aralığında azalan ve dışbükey olur. Ancak f^{-1} ters fonksiyonu, yine kendisi olduğundan $f, (0, +\infty)$ aralığında içbükey değildir.

Önerme 2.1.19. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif, dışbükey ve artan (azalan) fonksiyonlar olsun. Bu durumda, fg çarpım fonksiyonu da pozitif, dışbükey ve artan (azalan) bir fonksiyondur.

Önerme 2.1.20. Λ indisleyen küme olmak üzere, $f_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ dışbükey fonksiyonlar ailesi ve $f(x) = \sup_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha(x)$ olsun. Eğer $J = \{x \in I : f(x) < +\infty\}$ boş olmayan bir küme ise J bir aralıktır ve f, J üzerinde dışbükey bir fonksiyondur.

Reel sayıların bir aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonların dışbükeyliği, sınırlılığı, sürekliliği ve integrellenebilirliği ile ilişkisi vardır. Aşağıda bunlar incelenecektir.

2.2 DIŞBÜKEY FONKSİYONLAR VE SINIRLILIK

Tanım 2.2.1. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu olsun. Bir $M > 0$ reel sayısı, her $x \in I$ için $|f(x)| \leq M$ olacak şekilde varsa f sınırlı fonksiyondur.

Önerme 2.2.2. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir dışbükey fonksiyon olsun. Eğer I kapalı ve sınırlı aralık ise f fonksiyonu I üzerinde sınırlıdır.

İspat. Genelliği bozmamak için, $I \subseteq \mathbb{R}$ kapalı ve sınırlı bir aralık olduğundan $a < b$ olmak üzere, $I = [a, b]$ alalım. Öte yandan, her bir $x \in [a, b]$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için $x =$

$\alpha a + (1 - \alpha)b$ diyelim. Eğer $f(a)$ ve $f(b)$ görüntülerinden en büyüğüne M denirse, yani $M = \max\{f(a), f(b)\}$ ise her $x \in [a, b]$ için

$$f(x) = f(\alpha a + (1 - \alpha)b) \leq \alpha f(a) + (1 - \alpha)f(b) \leq \alpha M + (1 - \alpha)M = M$$

olur. Böylece, f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde M ile üstten sınırlıdır.

Öte yandan, $|t| \leq \frac{b-a}{2}$ olmak üzere $x = \frac{a+b}{2} + t$ diyelim. Buradan, f fonksiyonun dışbükeyliği kullanılırsa,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2} - t\right)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) \geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2} - t\right) \geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - M$$

olur. Böylece, $m = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - M$ denirse, her $x \in [a, b]$ için $m \leq f(x) \leq M$, yani $|f(x)| \leq \max\{|m|, |M|\}$ elde edilir. Bu ise, f fonksiyonunun $[a, b]$ üzerinde sınırlı olmasıdır. $\square$

Uyarı 2.2.3. Önerme 2.2.2'de, I aralığı kapalı ya da sınırlı değilse f fonksiyonu sınırlı olmak zorunda değildir. Bunun için aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 2.2.4. Bir $I = (0, 1]$ aralığı üzerinde $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu dışbükeydir ancak sınırlı değildir.

Uyarı 2.2.5. Önerme 2.2.2'nin tersi doğru olmayabilir. Yani, f fonksiyonunun bir I aralığı üzerinde dışbükey ve sınırlı olması I 'nin kapalı ve sınırlı olmasını gerektirmez. Bunun için aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 2.2.6. Bir $I = (-\infty, 0)$ aralığı üzerinde $f(x) = e^x$ fonksiyonu sınırlı ve dışbükeydir. Ancak, I aralığı kapalı ve sınırlı değildir.

Önerme 2.2.7. Eğer bir f fonksiyonu, bir I aralığı üzerinde dışbükey ise, her $a \in I$ için

$$r_a(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon $I \setminus \{a\}$ üzerinde artandır.

2.3 DIŞBÜKEY FONKSİYONLARDA SÜREKLİLİK VE TÜREV İLİŞKİSİ

Bu kısımda f dışbükey fonksiyonunun türev ve sürekliliğine ilişkin temel özellikleri verilecektir.

Teorem 2.3.1. Bir I aralığı üzerinde dışbükey bir f fonksiyonu verilsin. Bu durumda, f fonksiyonu I aralığının bütün iç noktalarında sol ve sağ türeve sahiptir ve her $u \in I^\circ$ için

$$f'_-(u) \leq f'_+(u)$$

olur.

İspat. Keyfi bir $u \in I^\circ$ alalım. O halde, $u < \alpha$ olacak şekilde bir $\alpha \in I$ vardır. Öte yandan, f dışbükey olduğundan $r_u(x) = \frac{f(x)-f(u)}{x-u}$ fonksiyonunun artanlığı kullanılırsa, her $x \in (-\infty, u) \cap I$ için $r_u(x) \leq r_u(\alpha)$ olur. Böylece, r_u fonksiyonu artan ve üstten sınırlıdır. Böylece, sol limiti, yani

$$\lim_{x \rightarrow u^-} r_u(x) = \lim_{x \rightarrow u^-} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} = f'_-(u)$$

vardır. Diğer taraftan, en az bir $\beta \in I$ vardır öyle ki $u > \beta$ olur. Her $x \in (u, +\infty) \cap I$ için $r_u(\beta) \leq r_u(x)$ olur. Bu ise, r_u fonksiyonunun alttan sınırlı olduğunu gösterir. O halde, $x \rightarrow u^+$ için sağ limiti yani,

$$\lim_{x \rightarrow u^+} r_u(x) = \lim_{x \rightarrow u^+} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} = f'_+(u)$$

vardır.

Ayrıca, her $u \in I^\circ$ için $f'_-(u) \leq f'_+(u)$ olduğunu gösterelim. Her $x, y \in I$ için $x < u < y$ olsun. O halde, r_u fonksiyonunun artanlığından $r_u(x) \leq r_u(y)$ olur. Eğer y sabitlenir, $x \rightarrow u^-$ için limite geçilirse, $\lim_{x \rightarrow u^-} r_u(x) \leq r_u(y)$ ve buradan $f'_-(u) \leq r_u(y)$ olur. Öte yandan, $y \rightarrow u^+$ için limite geçilirse, $f'_+(u) \leq r_u(y)$ olur. Bu ise istenendir. $\square$

Uyarı 2.3.2. Teorem 2.3.1 ispatında kullanılan teorem monoton fonksiyonların limiti ile ilgilidir. Bu teoreme göre, $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ monoton bir fonksiyon ise her $x_0 \in (a, b)$ için daima $f(x_0^+)$ ve $f(x_0^-)$ vardır ve

$$f(x_0^+) = \sup\{f(x) : x \in (a, x_0)\}, \quad f(x_0^-) = \sup\{f(x) : x \in (x_0, b)\}$$

şeklinde verilir. Yine, sonuç olarak eğer f fonksiyonu (a, b) aralığı üzerinde artan ise her $x_0 \in (a, b)$ için

$$f(x_0^-) = \sup_{x \in (a, x_0)} f(x) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+) = \inf_{x \in (x_0, b)} f(x)$$

olur.

Sonuç 2.3.3. I üzerinde tanımlı dışbükey fonksiyonlar I° üzerinde de süreklidir.

Örnek 2.3.4. Bir $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu $(0, +\infty)$ aralığında dışbükey olup süreklidir.

Örnek 2.3.5. $I = (0, 2\pi)$ üzerinde tanımlı $f(x) = \sin(x)$ fonksiyonu süreklidir. Ancak, f fonksiyonu $(0, 2\pi)$ aralığında dışbükey değildir.

Uyarı 2.3.6.

- (i) Eğer I aralığı açıksa $I = I^\circ$ olduğundan f fonksiyonun dışbükeyliği I açık aralığında sürekliliği gerektirir.

- (ii) Eğer I açık değilse, I üzerinde f fonksiyonun dışbükeyliği sürekliliği gerektirmeyebilir. Örneğin,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, 1), \\ 1, & x \in \{0, 1\} \end{cases}$$

fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında dışbükeydir fakat 0 ve 1 noktasında sürekli değildir.

Uyarı 2.3.7. $I = [a, b]$ kapalı, sınırlı aralığında $f'_+(a)$, $f'_-(b)$ sağ ve sol türevi $\mathbb{R}$ 'de varsa f fonksiyonunun dışbükeyliği sürekliliği gerektirir. Fakat bu koşul gerekli değildir. Örneğin, $f(x) = -\sqrt{x}$ fonksiyonu $[0, 1]$ üzerinde dışbükey ve sürekli fakat $f'_+(0) = -\infty$ olur.

Teorem 2.3.8. Bir f fonksiyonu I aralığında dışbükey olsun. Bu durumda, I° üzerinde f'_+ (aynı şekilde f'_-) sağdan sürekli (soldan sürekli) ve artandır.

İspat. Okuyucuya bırakılmıştır. □

Tanım 2.3.9 (Lipschitz Koşulu). $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Eğer bir $K > 0$ reel sayısı her $x, y \in I$ için $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ olacak şekilde varsa f fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlar denir.

Tanım 2.3.10. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$, her $x, y \in I$ için $|x - y| < \delta$ iken $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ koşulunu sağlayacak şekilde varsa f fonksiyonuna I aralığı üzerinde düzgün süreklidir denir.

Teorem 2.3.11. Bir $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlarsa düzgün süreklidir.

Teorem 2.3.12. Bir f fonksiyonu I aralığında dışbükey olsun. Bu durumda, f fonksiyonu $[a, b] \subseteq I^\circ$ aralığında düzgün süreklidir ve Lipschitz koşulunu sağlar.

İspat. Teorem 2.3.11 gereği fonksiyonun Lipschitz koşulunu sağladığını göstermek yeterlidir. O halde, $a < u_1 < u_2 < b$ olacak şekilde $a, b \in I^\circ$ ve $u_1, u_2 \in [a, b]$ olsun. Yine, r_{u_1} ve r_{u_2} fonksiyonlarının artanlığı kullanılırsa, $a < u_2$ olmak üzere,

$$\frac{f(u_1) - f(a)}{u_1 - a} \leq \frac{f(u_2) - f(u_1)}{u_2 - u_1}$$

ve $u_1 < b$ olmak üzere,

$$\frac{f(u_2) - f(u_1)}{u_2 - u_1} \leq \frac{f(b) - f(u_2)}{b - u_2}$$

olur. Böylece,

$$\frac{f(u_1) - f(a)}{u_1 - a} \leq \frac{f(u_2) - f(u_1)}{u_2 - u_1} \leq \frac{f(b) - f(u_1)}{b - u_1}$$

elde edilir.

Kabul edelim ki, $x, y \in (a, b)$ öyle ki $x < u_1 < u_2 < y$ olsun. Buradan,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(u_2) - f(u_1)}{u_2 - u_1} \leq \frac{f(b) - f(y)}{b - y}$$

bulunur. O halde, $x \rightarrow a^+$ ve $y \rightarrow b^-$ için limit alınırsa

$$f'_+(a) \leq \frac{f(u_2) - f(u_1)}{u_2 - u_1} \leq f'_-(b) \quad (2.1)$$

elde edilir. Böylece,

$$\left| \frac{f(u_2) - f(u_1)}{u_2 - u_1} \right| \leq \max \{ |f'_+(a)|, |f'_-(b)| \} = K$$

olur. Ayrıca, (2.1) eşitsizliği, $u_1 = a, u_2 = b$ için de geçerli olacaktır. O halde, en az bir $K > 0$ sayısı, her $u_1, u_2 \in [a, b]$ için $|f(u_2) - f(u_1)| \leq K |u_2 - u_1|$ olacak şekilde vardır. Bu durumda, f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde Lipschitz koşulunu sağlar. Böylece, f fonksiyonu düzgün sürekli olur. $\square$

2.4 DIŞBÜKEY FONKSİYONLAR VE İNTEGRAL İLİŞKİSİ

Aşağıdaki teorem ile dışbükey fonksiyonlar için türev özellikleri temel alınarak bir karakterizasyon verilecektir.

Teorem 2.4.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olsun. Bu durumda, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun dışbükey olması için gerek ve yeter koşul bir $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ artan fonksiyonu ve bir $c \in I$ noktasının, her $x \in I$ için

$$f(x) - f(c) = \int_c^x g(t) dt$$

koşulunu sağlayacak şekilde var olmasıdır.

İspat. İspat için, $u_1 \leq u_2$ olacak şekilde keyfi $u_1, u_2 \in I$ alalım. Teorem 2.3.1 gereği,

$$f'_-(u_1) \leq f'_+(u_1) \leq f'_-(u_2) \quad (2.2)$$

olur. Böylece, f'_- ve f'_+ artan fonksiyonlardır.

Monoton fonksiyonlar, en fazla sayılabilir sayıda birinci tip süreksizlik noktasına sahiptir. Buna göre, E_- kümesi ile f'_- fonksiyonunun süreksizlik noktalarını ve E_+ kümesi ile de f'_+ fonksiyonunun süreksizlik noktalarını gösterelim. Eğer $E = E_- \cup E_+$ denirse, f'_- ve f'_+ fonksiyonları $I \setminus E$ üzerinde sürekli ve E sayılabilir bir küme olur. Böylece, f'_- ve f'_+ fonksiyonları hemen hemen her yerde sürekli ve dolayısıyla Riemann integrallenebilir.

Öte yandan, $u_1 \in I \setminus E$ olsun. Eğer (2.2) eşitsizliğinde $u_2 \rightarrow u_1$ için limit alınırsa, $f'_-(u_1) = f'_+(u_1)$ bulunur. O halde, her $u \in I \setminus E$ için $f'(u) = f'_-(u) = f'_+(u)$ olur. Yani, f fonksiyonu I üzerinde hemen hemen her yerde türevlenebilir.

Şimdi, $g = f'_+$ ve $c, x \in I$ olmak üzere $[c, x]$ aralığının $\{c = x_0 < x_1, x_2 < \dots < x_n = x\}$ şeklinde bir parçalanışını alalım. Yine, Teorem 2.3.1 gereği,

$$f'_-(x_{k-1}) \leq f'_+(x_{k-1}) \leq \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \leq f'_-(x_k) \leq f'_+(x_k) \quad (2.3)$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} f(x) - f(c) &= \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^n \left[\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})} \right] (x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \sum_{k=1}^n f'_+(x_k) (x_k - x_{k-1}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

bulunur. Diğer taraftan, (2.3) eşitsizliği kullanılırsa,

$$f(x) - f(c) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right] (x_k - x_{k-1}) \geq \sum_{k=1}^n f'_+(x_{k-1}) (x_k - x_{k-1}) \quad (2.5)$$

olur. O halde, (2.4) ve (2.5) eşitsizliklerinden

$$\sum_{k=1}^n f'_+(x_{k-1}) (x_k - x_{k-1}) \leq f(x) - f(c) \leq \sum_{k=1}^n f'_+(x_k) (x_k - x_{k-1})$$

elde edilir. Burada, f'_+ fonksiyonu integrallenbilir olduğundan $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\int_c^x f'_+(t) dt \leq f(x) - f(c) \leq \int_c^x f'_+(t) dt$$

bulunur. Böylece, $f(x) - f(c) = \int_c^x f'_+(t) dt = \int_c^x g(t) dt$ elde edilir.

Tersine, $f(x) - f(c) = \int_c^x g(t) dt$ ve g artan olsun. Eğer $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere $\alpha, \beta \in (0, 1)$ alınırsa, $x < y$ olacak şekildeki her $x, y \in I$ için

$$\begin{aligned} \alpha f(x) + \beta f(y) - (\alpha + \beta) f(\alpha x + \beta y) &= \alpha \int_c^x g(t) dt + \beta \int_c^y g(t) dt - (\alpha + \beta) \int_c^{\alpha x + \beta y} g(t) dt \\ &= \alpha \int_{\alpha x + \beta y}^x g(t) dt + \beta \int_{\alpha x + \beta y}^y g(t) dt \\ &= \beta \int_{\alpha x + \beta y}^y g(t) dt - \alpha \int_x^{\alpha x + \beta y} g(t) dt \end{aligned}$$

olur. Buradan, g fonksiyonunun artan ve $x < \alpha x + \beta y < y$ olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \alpha f(x) + \beta f(y) - f(\alpha x + \beta y) &\geq \beta g(\alpha x + \beta y)(y - (\alpha x + \beta y)) - \alpha g(\alpha x + \beta y)(\alpha x + \beta y - x) \\ &\geq \beta g(\alpha x + \beta y)(\alpha(y - x)) - \alpha g(\alpha x + \beta y)(\beta(y - x)) \\ &\geq \alpha \beta g(\alpha x + \beta y)(y - x) - \alpha \beta g(\alpha x + \beta y)(y - x) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, $\alpha f(x) + \beta f(y) \geq f(\alpha x + \beta y)$ olur. Bu ise, f fonksiyonunun dışbükey olmasıdır. $\square$

Uyarı 2.4.2. Eğer $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığı açık değilse, Teorem 2.4.1 geçerli değildir. Bunun için aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 2.4.3. $I = [0, 1]$ aralığı üzerinde tanımlı $f(x) = -\sqrt{x}$ alalım. Her $x \in (0, 1)$ için, $f(x) = f(c) + \int_c^x -\frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ olacak şekilde bir $c \in (0, 1)$ vardır. Fakat, $f(0)$ değeri elde edilememektedir. Eğer $f(0)$ değeri elde edilseydi, $\int_0^x -\frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ genelleştirilmiş integrali kullanılması gerekirdi. Fakat $g(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$ fonksiyonu $I = [0, 1]$ üzerinde tanımlı değildir. Böylece, $f(0)$ değeri hesaplanamaz.

Uyarı 2.4.4. Teorem 2.4.1, $f'_+(a)$ ve $f'_-(b)$ değerlerinin var olması koşuluyla $[a, b]$ kapalı aralığı için de geçerli olur.

2.5 LOGARİTMİK DIŞBÜKEYLİK

Tanım 2.5.1. I reel sayıların bir aralığı ve $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ kesin pozitif bir fonksiyon olsun. Eğer $\ln f$, I kümesi üzerinde dışbükey ise f fonksiyonuna **logaritmik dışbükey (log-dışbükey)** denir.

Uyarı 2.5.2. Bu tanım, aşağıdaki şekilde de verilebilir.

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ kesin pozitif bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun logaritmik dışbükey olması için gerek ve yeter koşul $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere, her $x, y \in I$ için

$$f(\alpha x + \beta y) \leq f^\alpha(x) f^\beta(y) \quad (2.6)$$

olmasıdır. Gerçekten de, kabul edelim ki f fonksiyonu log-dışbükey olsun. O halde, logaritma fonksiyonunun özelliklerinden

$$\ln(f(\alpha x + \beta y)) \leq \alpha \ln f(x) + \beta \ln f(y) = \ln f^\alpha(x) + \ln f^\beta(y) = \ln(f^\alpha(x) f^\beta(y))$$

olur. Bu ise, $f(\alpha x + \beta y) \leq f^\alpha(x) f^\beta(y)$ olmasıdır.

Tersi, benzer şekilde gösterilir.

Önerme 2.5.3. Eğer bir f fonksiyonu, $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığı üzerinde log-dışbükey ise dışbükeydir.

İspat. Kabul edelim ki, f fonksiyonu I aralığı üzerinde log-dışbükey olsun. Bu durumda, her $x \in I$ için $\ln f(x)$ fonksiyonu I üzerinde dışbükey olur. Öte yandan, $f(x) = e^{\ln f(x)}$ olmak üzere $k(x) = \ln f(x)$ ve $g(x) = e^{k(x)}$ diyelim. Bu durumda, k , I üzerinde dışbükey ve g fonksiyonu dışbükey ve artan olduğundan Önerme 2.1.12 gereği, $g \circ k$ bileşke fonksiyonu da I üzerinde dışbükeydir. Böylece, f fonksiyonu I üzerinde dışbükey olur. $\square$

Önerme 2.5.4. $I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ iki kez türevlenebilir ve kesin pozitif bir fonksiyon olsun. Bu durumda, f fonksiyonunun log-dışbükey olması için gerek ve yeter koşul $f f'' - (f')^2 \geq 0$ olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki, f fonksiyonu log-dışbükey olsun. Hipotez gereği, f fonksiyonu iki kez türevlenebilir olduğundan $\ln f$ fonksiyonu da iki kez türevlenebilirdir. Böylece, Teorem 2.1.8 kullanılırsa

$$(\ln f)'' = \left(\frac{f'}{f} \right)' = \frac{f f'' - (f')^2}{f^2} \geq 0$$

olduğundan, $f f'' - (f')^2 \geq 0$ elde edilir.

Tersi, benzer şekilde gösterilir. $\square$

Sonraki teoremi vermeden önce oldukça kullanışlı bir eşitsizliği aşağıdaki önerme ile verelim.

Önerme 2.5.5. Her $a, b, c, d, \alpha, \beta$ pozitif reel sayılar ve $\alpha + \beta = 1$ olsun.

$$a^\alpha b^\beta + c^\alpha d^\beta \leq (a + c)^\alpha (b + d)^\beta \quad (2.7)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Üstel fonksiyonun dışbükeyliği kullanılırsa, her $a, b, c, d, \alpha, \beta$ pozitif reel sayıları ve $\alpha + \beta = 1$ için

$$a^\alpha b^\beta = e^{\alpha \ln a} e^{\beta \ln b} = e^{\alpha \ln a + \beta \ln b} \leq \alpha e^{\ln a} + \beta e^{\ln b} = \alpha a + \beta b \quad (2.8)$$

bulunur. Diğer taraftan, $\frac{a^\alpha b^\beta + c^\alpha d^\beta}{(a+c)^\alpha (b+d)^\beta} \leq 1$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanacaktır. O halde,

$$\begin{aligned} \frac{a^\alpha b^\beta + c^\alpha d^\beta}{(a+c)^\alpha (b+d)^\beta} &= \frac{a^\alpha b^\beta}{(a+c)^\alpha (b+d)^\beta} + \frac{c^\alpha d^\beta}{(a+c)^\alpha (b+d)^\beta} \\ &= \left(\frac{a}{a+c} \right)^\alpha \left(\frac{b}{b+d} \right)^\beta + \left(\frac{c}{a+c} \right)^\alpha \left(\frac{d}{b+d} \right)^\beta \end{aligned}$$

olur. Buradan, (2.8) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{a^\alpha b^\beta + c^\alpha d^\beta}{(a+c)^\alpha (b+d)^\beta} &= \left(\frac{a}{a+c} \right)^\alpha \left(\frac{b}{b+d} \right)^\beta + \left(\frac{c}{a+c} \right)^\alpha \left(\frac{d}{b+d} \right)^\beta \\ &\leq \alpha \left(\frac{a}{a+c} \right) + \beta \left(\frac{b}{b+d} \right) + \alpha \left(\frac{c}{a+c} \right) + \beta \left(\frac{d}{b+d} \right) \\ &= \alpha \left(\frac{a+c}{a+c} \right) + \beta \left(\frac{b+d}{b+d} \right) = \alpha + \beta = 1 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, istenen elde edilir. $\square$

Teorem 2.5.6. Bir $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığı üzerinde tanımlı, log-dışbükey fonksiyonların kümesi toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalıdır. Ayrıca, eğer limit var ve kesin pozitif ise limit fonksiyonu da log-dışbükey olur.

İspat. Önce çarpmaya göre kapalılığı gösterelim. Bunun için, I aralığı üzerinde log-dışbükey f ve g fonksiyonlarını alalım. Bu durumda, $\ln f$ ve $\ln g$ fonksiyonları I üzerinde dışbükeydir.

İki dışbükey fonksiyonun toplamı da dışbükey olduğundan $\ln f + \ln g = \ln fg$ fonksiyonu da I üzerinde dışbükey olur. Böylece, fg fonksiyonu I üzerinde log-dışbükey olur.

Şimdi, bir $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ log-dışbükey fonksiyonlar dizisini alalım ve bir f fonksiyonuna noktasal yakınsasın. Her $n \in \mathbb{N}$ için f_n pozitif olmalıdır. Böylece, her $x \in I$ için $f(x) > 0$ olmalıdır. Eğer $f(x) \geq 0$ ise $f(x) = 0$ olduğunda $\ln f(x)$ anlamsız olur. O halde, her $x \in I$ için $f(x) > 0$ olur. Şimdi $x, y \in I$ ve $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ olsun. Her bir n için f_n fonksiyonlarının log-dışbükey olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\alpha x + \beta y) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^\alpha(x) f_n^\beta(y) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^\alpha(x) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^\beta(y) \leq f^\alpha(x) f^\beta(y) \end{aligned} \quad (2.9)$$

bulunur. Böylece, f fonksiyonunun kesin pozitifliği ve (2.8) eşitsizliği kullanılırsa f fonksiyonu log-dışbükey olur.

Son olarak, log-dışbükeyliğin toplama işlemine göre kapalı olduğunu gösterelim. Eğer f ve g fonksiyonlarının I aralığında log-dışbükey olduğu ve (2.7) eşitsizliği kullanılırsa, $x, y \in I$ ve $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} (f + g)(\alpha x + \beta y) &= f(\alpha x + \beta y) + g(\alpha x + \beta y) \leq f^\alpha(x) f^\beta(y) + g^\alpha(x) g^\beta(y) \\ &\leq (f(x) + g(x))^\alpha (f(y) + g(y))^\beta \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, $f + g$ toplamı log-dışbükey olur. □

2.6 DIŞBÜKEY FONKSİYONLAR VE EŞİTSİZLİKLER

Önerme 2.5.5 dolayısıyla dışbükey fonksiyonlar yardımıyla aşağıdaki eşitsizlikler bulunur.

(i) $a, b, \alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ için, $a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b$.

(ii) $a, b, \alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ için, $a^\alpha b^\beta + c^\alpha d^\beta \leq (a + c)^\alpha + (b + d)^\beta$.

Genel olarak, daha büyük sayıda eşitsizlikler de dışbükey fonksiyonlar yardımıyla verilebilir. Aşağıda dışbükey fonksiyon özelliğine dayalı bazı önemli eşitsizlikleri verelim. Bu eşitsizliklerden bazıları fonksiyonel analiz ve ölçü kuramı kısmında (Teorem 1.3.52, Teorem 1.3.56) farklı şekillerde verilmişti.

Önerme 2.6.1. Eğer $x_i \geq 0$ ve $\alpha_i < 1$ olmak üzere, $\sum_{i=1}^n = 1$ ise

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad (2.10)$$

eşitsizliği geçerlidir. Daha açık yazarsak,

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

olur.

Uyarı 2.6.2. Önerme 2.6.1 gereği aşağıdakiler elde edilir.

- (i) Eğer (2.10) eşitsizliğinde her i, j için $x_i = x_j$ alınırsa, eşitlik elde edilir.
- (ii) Eğer her $i = 1, 2, \dots, n$ için $x_i = \frac{1}{n}$ alınırsa,

$$(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \quad (2.11)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik, geometrik ortalama ile aritmetik ortalama arasındaki ilişkiyi veren bağıntıdır.

- (iii) Eğer $n = 2, \alpha_i = \frac{1}{p}, \beta_i = \frac{1}{q}, x_1 = x^p$ ve $x_2 = y^q$ alınırsa,

$$xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q \quad (2.12)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik, pozitif sayılar için **Young eşitsizliği** olarak adlandırılır. İleride bu eşitsizlik Young fonksiyonları için verilecektir.

Önerme 2.6.3 (Hölder Eşitsizliği). Her bir $i = 1, 2, \dots, n$ için x_i ve y_i pozitif reel sayılar olsun. Eğer $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Eğer her bir $i = 1, \dots, n$ için $x_i = 0$ veya $y_i = 0$ ise eşitsizlik açıktır. Kabul edelim ki, bir $i, x_i > 0$ ve $y_i > 0$ olacak şekilde var olsun. Böylece

$$u = \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{ve} \quad v = \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

pozitif sayıları alalım. Bu durumda, her bir i için $x = \frac{x_i}{u}$ ve $y = \frac{y_i}{v}$ reel sayılarına Young eşitsizliği uygulanırsa,

$$\frac{x_i}{u} \frac{y_i}{v} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{x_i}{u} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{y_i}{v} \right)^q$$

olur. Buradan, toplama geçilirse,

$$\begin{aligned} \frac{1}{uv} \sum_{i=1}^n x_i y_i &\leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{p} \left(\frac{x_i}{u} \right)^p + \sum_{i=1}^n \frac{1}{q} \left(\frac{y_i}{v} \right)^q \leq \frac{1}{p} \frac{1}{u^p} \sum_{i=1}^n x_i^p + \frac{1}{q} \frac{1}{v^q} \sum_{i=1}^n y_i^q \\ &\leq \frac{1}{p} \frac{1}{u^p} u^p + \frac{1}{q} \frac{1}{v^q} v^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, istenen elde edilir. $\square$

Önerme 2.6.4 (Minkowski Eşitsizliği). Her bir $i = 1, 2, \dots, n$ için x_i ve y_i pozitif reel sayılar olsun. Eğer $p \geq 1$ ise

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Eğer $p = 1$ ise eşitlik durumu elde edilir. Şimdi, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olacak şekilde $p > 1$ ve $q > 0$ sayıları alalım. Bu durumda, $p = (p-1)q$ olduğu kullanılırsa,

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)(x_i + y_i)^{p-1} = \sum_{i=1}^n x_i(x_i + y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^n y_i(x_i + y_i)^{p-1} \quad (2.13)$$

bulunur. Hölder eşitsizliği (2.13) eşitliğindeki her bir terime uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p &\leq \left[\sum_{i=1}^n x_i^p \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^{(p-1)q} \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\sum_{i=1}^n y_i^p \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^{(p-1)q} \right]^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left[\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^{(p-1)q} \right]^{\frac{1}{q}} \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\ &\leq \left[\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right]^{\frac{1}{q}} \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\left[\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right]^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

olur. Böylece, istenen elde edilir. $\square$

Yine aşağıdaki eşitsizlik de önemlidir.

Önerme 2.6.5 (Jensen Eşitsizliği). Bir $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçülebilir uzayı $\mu(X) = 1$ koşulunu sağlasın ve Φ bir dışbükey fonksiyon olsun. Eğer $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonu için $\int_X f d\mu$ ve $\int_X \Phi(f) d\mu$ integralleri var ise

$$\Phi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X \Phi(f) d\mu \quad (2.14)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Okuyucuya bırakılmıştır. $\square$

3. YOUNG FONKSİYONLARI

Orlicz uzayları, dışbükey fonksiyonlar aracılığıyla tanımlanan Young fonksiyonları ile belirlendiğinden Young fonksiyonlarına ilişkin bazı temel teoremler verilecektir. Öte yandan, Young fonksiyonunun varlığına ve çalışılmasına ilişkin en güçlü motivasyon ise 1915 yılında de la Vallée Poussin (1866-1962, Belçikalı matematikçi) tarafından düzgün integrallenebilirlik koşuluna denk koşul olarak verilmesidir. Düzgün integrallenebilirlik fonksiyonel analiz ve ölçü kuramında oldukça önemli bir kavramdır. Bu kısım [38] kitabı temel alınarak düzenlenmiştir.

3.1 DÜZGÜN İNTEGRALLENEBİLİRLİK VE VALLÉE POUSSİN TEOREMİ

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir sonlu ölçü uzayı olsun. Buna göre, I indeks kümesi olmak üzere, X üzerindeki reel değerli, ölçülebilir fonksiyonların ailesi $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}, \alpha \in I\}$ olsun.

Tanım 3.1.1. Eğer,

$$(i) \quad C = \sup_{\alpha \in I} \int |f_\alpha| d\mu < +\infty,$$

$$(ii) \quad \lim_{\mu(A) \rightarrow 0} \int_A |f_\alpha| d\mu = 0$$

koşulları sağlanırsa $\mathcal{F}$ kümesi **düzgün integrallenebilirdir** denir. Burada, (ii)'de $\alpha \in \mathcal{F}$ için yakınsama düzgündür.

Tanım 3.1.1'de verilen koşullar yerine daha makul ve daha etkili bir karakterizasyon yukarıda bahsedildiği gibi de la Vallée Poussin tarafından aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 3.1.2. Bir $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sonlu ölçü uzayı üzerinde tanımlı, reel değerli ölçülebilir fonksiyonların bir $\mathcal{F}$ ailesi verilsin. Buna göre, aşağıdaki koşullar denktir.

$$(i) \quad \mathcal{F} = \{f_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}, \alpha \in I\} \text{ düzgün integrallenebilirdir,}$$

$$(ii) \quad \text{Her } \alpha \in I \text{ için}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\{|f_\alpha| > \lambda\}} |f_\alpha| d\mu = 0. \quad (3.1)$$

yakınsaması düzgündür,

$$(iii) \quad \text{Bir dışbükey } \Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty) \text{ fonksiyonu, } \Phi(0) = 0, \Phi(-x) = \Phi(x), \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi(x)}{x} = +\infty \text{ ve}$$

$$C_1 = \sup_{\alpha} \int_X \Phi(f_\alpha) d\mu < +\infty \quad (3.2)$$

koşullarını sağlayacak şekilde vardır.

İspat. Kabul edelim ki, $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}, \alpha \in I\}$ düzgün integrallenebilir olsun. Kolaylık sağlaması için, $A_\alpha^\lambda = [|f_\alpha| > \lambda]$ diyelim. Bu durumda,

$$\mu(A_\alpha^\lambda) = \int_{A_\alpha^\lambda} \frac{1}{\lambda} d\mu \leq \frac{1}{\lambda} \int_{A_\alpha^\lambda} |f_\alpha| d\mu \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} |f_\alpha| d\mu \leq C \frac{1}{\lambda}$$

olur. Buradan, $\lambda \rightarrow +\infty$ için limit alınır, $\mu(A_\alpha^\lambda) \rightarrow 0$ bulunur. Kabul gereği, $\mathcal{F}$ düzgün integrallenebilir olduğundan Tanım 3.1.1 (ii) ifadesinden, $\alpha \in I$ için

$$\lim_{\mu(A) \rightarrow 0} \int_A |f_\alpha| d\mu = 0$$

yakınsaması düzgündür. Yani, keyfi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $\delta_\varepsilon > 0$ bulunabilir ki, her $\alpha \in I$ için $\mu(A) < \delta_\varepsilon$ koşulunu sağlayan her $A \in \mathcal{A}$ için

$$\int_A |f_\alpha| d\mu < \varepsilon$$

olur. Eğer $\lambda = \frac{C}{\delta_\varepsilon}$ ve $A = A_\alpha^\lambda$ seçilirse, kabul gereği $\mu(A_\alpha^\lambda) < \delta_\varepsilon$ olması durumunda

$$\int_{A_\alpha^\lambda} |f_\alpha| d\mu < \varepsilon$$

sağlanır. Burada $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan (3.1) ifadesi elde edilir. Bu ise (i) $\Rightarrow$ (ii) olmasıdır.

Kabul edelim ki, $\alpha \in I$ için

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{[|f_\alpha| > \lambda]} |f_\alpha| d\mu = 0$$

yakınsaması düzgün olsun. O halde, bir Φ fonksiyonunu inşaa etmek için (ii) ifadesine göre,

$$\sup_{\alpha} \int_{[|f_\alpha| > \lambda_n]} |f_\alpha| d\mu < \beta_n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.3)$$

olacak şekilde $0 < \lambda_n < \lambda_{n+1} \rightarrow +\infty$ seçelim. Burada, $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}, \sum_n \beta_n < +\infty$ koşulunu sağlayan keyfi bir dizidir.

Öte yandan, (3.1) ifadesindeki yakınsama düzgün olduğundan λ_n terimleri yalnızca $\mathcal{F}$ ailesine bağlı olup ayrı ayrı f_α elemanlarına bağlı değildir.

Şimdi, $a_0 = 0$ olmak üzere her bir $n \in \mathbb{N}$ için a_n ile (3.3)'te verilen $[n, n+1]$ aralığındaki λ_n terimlerinin sayısı gösterilsin. Buna göre, $\varphi(n) = \sum_{k=0}^n a_k$ tanımlanırsa, $n \rightarrow \infty$ için $\varphi(n) \nearrow$

$+\infty$ olur. Yine, $n \leq t < n+1$ için $\varphi(t) = \varphi(n)$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\Phi(x) = \int_0^{|x|} \varphi(t) dt$$

tanımlayalım. Bu durumda, Φ fonksiyonu için

$$\Phi(x) = \int_0^{|x|} \varphi(t) dt = \int_0^{-x} \varphi(t) dt = \Phi(-x)$$

bulunur. Ayrıca, $k < x$ için Ortalama Değer Teoremi kullanılarak

$$\varphi(c) = \frac{1}{x-k} \int_k^{|x|} \varphi(t) dt$$

olacak şekilde bir $c \in [k, x]$ bulunur. Burada, φ artan olduğundan $\varphi(k) \leq \varphi(c)$ olur. O halde

$$\frac{x-k}{x} \varphi(k) \leq \frac{x-k}{x} \varphi(c) = \frac{1}{x} \int_k^{|x|} \varphi(t) dt = \frac{\Phi(x)}{x}$$

elde edilir. Böylece, $k < x$ için $\frac{\Phi(x)}{x} \geq \varphi(k) \left(\frac{x-k}{x} \right)$ sağlanır. Bu ise $k \rightarrow +\infty$ dolayısıyla $x \rightarrow +\infty$ için $\frac{\Phi(x)}{x} \nearrow +\infty$ olmasıdır.

Şimdi, Φ fonksiyonunun dışbükey olduğunu, yani $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere $\alpha, \beta \in [0, 1]$ için $\Phi(\alpha x + \beta y) \leq \alpha \Phi(x) + \beta \Phi(y)$ eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim. Burada $t(\alpha + \beta) = t$, $t\alpha \leq t$ ve $t\beta \leq t$ olur. Ayrıca φ fonksiyonu artan olduğundan, $\varphi(t\alpha) \leq \varphi(t)$ ve $\varphi(t\beta) \leq \varphi(t)$ olur. O halde, değişken değiştirme kullanılırsa,

$$\alpha \int_0^{|x|} \varphi(t) dt \geq \alpha \int_0^{|x|} \varphi(\alpha t) dt = \int_0^{\alpha|x|} \varphi(k) dk \quad \text{ve} \quad \beta \int_0^{|y|} \varphi(t) dt \geq \beta \int_0^{|y|} \varphi(\beta t) dt = \int_0^{\beta|y|} \varphi(k) dk$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} \alpha \Phi(x) + \beta \Phi(y) &= \alpha \int_0^{|x|} \varphi(t) dt + \beta \int_0^{|y|} \varphi(t) dt \geq \int_0^{\alpha|x|} \varphi(t) dt + \int_0^{\beta|y|} \varphi(t) dt \\ &\geq \int_0^{|\alpha x + \beta y|} \varphi(t) dt = \Phi(\alpha x + \beta y) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, Φ fonksiyonu dışbükeydir.

Şimdi, (3.2) ifadesi göz önüne alınırsa, monotonluktan

$$\begin{aligned}
 \int_X \Phi(f_\alpha) d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[n-1 \leq |f_\alpha| < n]} \Phi(|f_\alpha|) d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[n-1 \leq |f_\alpha| < n]} \Phi(n) d\mu \\
 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(n) \mu([n-1 \leq |f_\alpha| < n]) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(n+1) \mu([n \leq |f_\alpha| < n+1]) \\
 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} (\Phi(n+1) - \Phi(n)) \mu([|f_\alpha| \geq n]) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{n+1} \varphi(t) dt - \int_0^n \varphi(t) dt \right) \mu([|f_\alpha| \geq n]) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_n^{n+1} \varphi(t) dt \right) \mu([|f_\alpha| \geq n]) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) \mu([|f_\alpha| \geq n])
 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\int_X \Phi(|f_\alpha|) d\mu \leq \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) \mu(|f_\alpha| \geq n) \quad (3.4)$$

olur. Öte yandan,

$$\begin{aligned}
 \int_{[|f_\alpha| \geq \lambda_n]} |f_\alpha| d\mu &= \sum_{r=\lambda_n}^{\infty} \int_{[r \leq |f_\alpha| < r+1]} |f_\alpha| d\mu \geq \sum_{r=\lambda_n}^{\infty} \int_{[r \leq |f_\alpha| < r+1]} r d\mu \\
 &= \sum_{r=\lambda_n}^{\infty} r \mu([r \leq |f_\alpha| < r+1]) \geq \sum_{r=\lambda_n}^{\infty} \mu([|f_\alpha| > r])
 \end{aligned}$$

bulunur. O halde, φ fonksiyonunun tanımı gereği, n üzerinden toplam alınırsa,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \mu([|f_\alpha| > n]) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[|f_\alpha| > n]} \varphi(n) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=\lambda_n}^{\infty} \mu([|f_\alpha| > r]) \\
 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[|f_\alpha| > \lambda_n]} |f_\alpha| d\mu < \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < +\infty
 \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \mu([|f_\alpha| > n]) < +\infty \quad (3.5)$$

elde edilir. Böylece, (3.4) ve (3.5)'ten

$$\int_X \Phi(f_\alpha) d\mu \leq \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) \mu(|f_\alpha| \geq n) < +\infty$$

bulunur. Burada $\alpha \in I$ keyfi olduğundan $\sup_{\alpha \in X} \int \Phi(f_\alpha) d\mu < +\infty$ elde edilir. Bu ise (ii) $\Rightarrow$ (iii) olmasıdır.

Şimdi, (iii) $\Rightarrow$ (ii) ifadesini gösterelim. Kabul edelim ki, (3.2) ifadesindeki koşullar sağlanacak şekilde bir Φ dışbükey fonksiyonu var olsun. Kabul gereği, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi(x)}{x} = +\infty$ olur. O halde, keyfi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde $k_\varepsilon = \frac{C_1}{k_\varepsilon}$ seçilirse, $x > \lambda_n$ için $\frac{\Phi(x)}{x} > k_\varepsilon$ olacak şekilde λ_n sayıları bulunur. Burada $x > \lambda_n$ için $\frac{\Phi(x)}{k_\varepsilon} > x$ olacağından, x yerine $|f_\alpha|$ yazılırsa

$$\int_{[|f_\alpha| > \lambda_n]} |f_\alpha| d\mu \leq \frac{1}{k_\varepsilon} \int_{[|f_\alpha| > \lambda_n]} \Phi(|f_\alpha|) d\mu \leq \frac{C_1}{k_\varepsilon} = \varepsilon \quad (3.6)$$

elde edilir. Böylece,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{[|f_\alpha| > \lambda]} |f_\alpha| d\mu = 0$$

bulunur. Bu ise istenendir.

Kabul edelim ki, (ii) sağlansın. Yani, $\alpha \in I$ için

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{[|f_\alpha| > \lambda]} |f_\alpha| d\mu = 0 \quad (3.7)$$

yakınsaması düzgün olsun. O halde, $\int_{[|f_\alpha| > \lambda]} |f_\alpha| d\mu \leq 1$ olacak şekilde bir $\lambda > 0$ seçilebilir.

Buradan,

$$\int_X |f_\alpha| d\mu = \int_{[|f_\alpha| \leq \lambda]} |f_\alpha| d\mu + \int_{[|f_\alpha| > \lambda]} |f_\alpha| d\mu \leq \lambda \mu(X) + 1 \quad (3.8)$$

bulunur. Dolayısıyla, $C = \lambda \mu(X) + 1 < +\infty$ seçilirse Tanım 3.1.1 (i) sağlanır. Şimdi, Tanım 3.1.1 (ii)'nin sağlandığını gösterelim. Bir $A \in \mathcal{A}$ için

$$\begin{aligned} \int_A |f_\alpha| d\mu &= \int_{A \cap [|f_\alpha| > \lambda]} |f_\alpha| d\mu + \int_{A \cap [|f_\alpha| \leq \lambda]} |f_\alpha| d\mu \\ &\leq \int_{[|f_\alpha| > \lambda]} |f_\alpha| d\mu + \int_{A \cap [|f_\alpha| \leq \lambda]} |f_\alpha| d\mu \\ &\leq \int_{[|f_\alpha| > \lambda]} |f_\alpha| d\mu + \int_A \lambda d\mu = \int_{[|f_\alpha| > \lambda]} |f_\alpha| d\mu + \lambda \mu(A) \end{aligned}$$

bulunur. Kabul gereği, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{[|f_\alpha| > \lambda]} |f_\alpha| d\mu = 0$ olduğundan, keyfi bir $\varepsilon > 0$ için bir $\lambda_\varepsilon > 0$

sayısı, her $\alpha \in I$ ve $\lambda > \lambda_\varepsilon$ için $\int_{[|f_\alpha| > \lambda]} |f_\alpha| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bulunur. Böylece, $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2\lambda_\varepsilon}$

seçilirse, $\mu(A) < \delta_\varepsilon$ koşulunu sağlayan $A \in \mathcal{A}$ için $\int_{[|f_\alpha| > \lambda]} |f_\alpha| d\mu + \lambda \mu(A) < \varepsilon$ olur. Diğer

bir ifadeyle, $\alpha \in I$ için, $\lim_{\mu(A) \rightarrow 0} \int_A |f_\alpha| d\mu = 0$ yakınsaması düzgündür. Böylece, (ii) $\Rightarrow$ (i) ifadesi elde edilir. $\square$

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçü uzayı üzerinde integrallenebilir fonksiyonların Lebesgue uzayı $L^1(\mu)$ ve $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonu Teorem 3.1.2 (iii) ifadesindeki koşulları sağlayan bir fonksiyon olmak üzere

$$\tilde{L}^\Phi(\mu) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ ölçülebilir} : \int_X \Phi(|f|) d\mu < +\infty \right\}$$

olsun. Bu uzaylar arasındaki ilişkiyi Teorem 3.1.2'nin sonucu olarak aşağıda verelim.

Sonuç 3.1.3. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sonlu ölçü uzayı olsun. Bu durumda,

$$L^1(\mu) = \bigcup \left\{ \tilde{L}^\Phi(\mu) : \Phi \text{ dışbükey, } x \rightarrow +\infty \text{ için } \frac{\Phi(x)}{x} \nearrow +\infty \right\} \quad (3.9)$$

olur.

İspat. Bir Φ dışbükey fonksiyonu için, $\Phi(x) \geq ax + b$ olacak şekilde a, b sabitleri vardır. O halde, her $f \in \tilde{L}^\Phi(\mu)$ için

$$a \int_X |f| d\mu + b\mu(X) = \int_X (a|f| + b) d\mu \leq \int_X \Phi(|f|) d\mu < +\infty$$

sağlanır. Dolayısıyla, $f \in L^1(\mu)$ olur. Böylece Teorem 3.1.2 (iii) koşulunu sağlayan tüm dışbükey Φ fonksiyonları için $\tilde{L}^\Phi(\mu) \subseteq L^1(\mu)$ elde edilir.

Tersine, $f \in L^1(\mu)$ olsun. Teorem 3.1.2 gereği, öyle bir dışbükey Φ fonksiyonu vardır ki,

$$\sup_\alpha \int_X \Phi(f_\alpha) d\mu < +\infty$$

sağlanır. Böylece, her $\alpha \in I$ için, $\int_X \Phi(|f_\alpha|) d\mu < +\infty$ olur. Buradan, $f \in \tilde{L}^\Phi(\mu)$ olup, $L^1(\mu) \subseteq \tilde{L}^\Phi(\mu)$ bulunur. Dolayısıyla (3.9) eşitliği elde edilir.

Bazı dışbükey fonksiyonlar W. H. Young tarafından aşağıdaki gibi karakterize edilmiştir. Bu tip dışbükey fonksiyonlar, ileride tanımlayacağımız Orlicz uzayları için önemlidir.

3.2 YOUNG FONKSİYONLARI

Tanım 3.2.1. Bir $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ dışbükey fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa **Young fonksiyonu** olarak adlandırılır.

- (i) Her $x \in \mathbb{R}$ için $\Phi(-x) = \Phi(x)$,
- (ii) $\Phi(0) = 0$,
- (iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = +\infty$.

Tanım 3.2.2. Bir Φ Young fonksiyonu için,

$$\Psi(y) = \sup\{x|y| - \Phi(x) : x \geq 0\}, \quad y \in \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanan $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ fonksiyonuna Φ fonksiyonunun **tamlayan Young fonksiyonu** (veya bütünleyen Young fonksiyonu) ve (Φ, Ψ) ikilisine de **tamlayan Young fonksiyon çifti** denir.

Önerme 3.2.3. Bir Φ Young fonksiyonunun Ψ tamlayan fonksiyonu da bir Young fonksiyonudur. Üstelik Ψ , $[0, +\infty)$ üzerinde artandır.

İspat. (i) Ψ fonksiyonunun dışbükey olduğunu gösterelim. Bunun için, $\alpha, \beta \in (0, 1)$ ve $\alpha + \beta = 1$ olsun. O halde, $y, z \in \mathbb{R}$ ve $x \geq 0$ için

$$\begin{aligned} x|\alpha y + \beta z| - \Phi(x) &\leq \alpha x|y| + \beta x|z| - \Phi(x) = \alpha x|y| + \beta x|z| - (\alpha + \beta)\Phi(x) \\ &= \alpha(x|y| - \Phi(x)) + \beta(x|z| - \Phi(x)) \\ &\leq \alpha \sup_{x \geq 0} \{x|y| - \Phi(x)\} + \beta \sup_{x \geq 0} \{x|z| - \Phi(x)\} \\ &= \alpha\Psi(y) + \beta\Psi(z) \end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizlikte, $x \geq 0$ için supremum alınırsa,

$$\sup_{x \geq 0} \{x|\alpha y + \beta z| - \Phi(x)\} \leq \alpha\Psi(y) + \beta\Psi(z)$$

bulunur. Böylece, $\Psi(\alpha y + \beta z) \leq \alpha\Psi(y) + \beta\Psi(z)$ elde edilir. Bu ise, Ψ fonksiyonunun dışbükey olmasıdır.

(ii) Bir $y \in \mathbb{R}$ için

$$\Psi(-y) = \sup\{x|-y| - \Phi(x) : x \geq 0\} = \sup\{x|y| - \Phi(x) : x \geq 0\} = \Psi(y)$$

olduğundan Ψ fonksiyonu çifttir. Öte yandan, Φ fonksiyonu pozitif değerler aldığı için

$$\Psi(0) = \sup\{0 - \Phi(x) : x \geq 0\} = 0$$

bulunur.

(iii) $\lim_{y \rightarrow \infty} \Psi(y) = +\infty$ olduğunu gösterelim. Genelliği kaybetmeksizin, $x > 0$ kabul edelim. Keyfi bir $M > 0$ için $N_M = \frac{M + \Phi(x)}{x}$ alalım. Bu durumda, her $y > N_M$ için $x|y| - \Phi(x) > xN_M - \Phi(x)$ olacağından $x|y| - \Phi(x) > M$ ve $\sup\{x|y| - \Phi(x) : x \geq 0\} > M$ sağlanır. $M > 0$ sayısı keyfi olduğundan, $\lim_{y \rightarrow \infty} \Psi(y) = +\infty$ elde edilir. Böylece, Ψ bir Young fonksiyonudur.

Şimdi, Ψ Young fonksiyonunun $[0, +\infty)$ üzerinde artan olduğunu gösterelim.

Kabul edelim ki, $y_1, y_2 \in [0, +\infty)$ ve $y_1 < y_2$ olsun. Burada $|y_1| < |y_2|$ olacağından, tanımdan $x|y_1| - \Phi(x) < x|y_2| - \Phi(x)$ bulunur. Buradan,

$$\Psi(y_1) = \sup\{x|y_1| - \Phi(x) : x \geq 0\} \leq \sup\{x|y_2| - \Phi(x) : x \geq 0\} = \Psi(y_2)$$

olur. O halde, Ψ fonksiyonu artandır. □

Önerme 3.2.4 (Young Eşitsizliği). (Φ, Ψ) tamlayan Young fonksiyon çifti olmak üzere, her

$x, y \in \mathbb{R}$ için

$$xy \leq \Phi(x) + \Psi(y) \quad (3.10)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Kabul edelim ki, (Φ, Ψ) tamlayan Young fonksiyon çifti ve $x, y \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda,

$$\Phi(x) + \Psi(y) = \Phi(x) + \sup\{t|y| - \Phi(t) : t \geq 0\} \geq x|y| - \Phi(x) + \Phi(x) \geq xy$$

elde edilir. Bu ise istenendir. $\square$

Uyarı 3.2.5. Önerme 3.2.4'te verilen (3.10) eşitsizliği Young eşitsizliği olarak adlandırılır.

Şimdi, bazı Young fonksiyonu örnekleri verelim.

Örnek 3.2.6. $p > 1$ olmak üzere, $\Phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$ fonksiyonu $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}$ ile verilsin ve $x < 0$ için $\Phi(x) = \Phi(-x)$ şeklinde tanımlansın. Φ bir Young fonksiyonudur. Gerçekten de, tanımı gereği, Φ bir çift fonksiyondur. Ayrıca, Φ artan, $\Phi(0) = 0$ ve üstten sınırlı olmayan bir fonksiyon olduğundan $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = +\infty$ olur. Eğer Φ için, ikinci türev testi kullanılırsa, $\Phi''(x) = (p-1)x^{p-2} \geq 0$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla, Φ dışbükeydir.

Örnek 3.2.7. Φ_1 pozitif değerli bir dışbükey fonksiyon olsun ve $0 \leq a < b$ olmak üzere,

$$\Phi(x) = \begin{cases} \Phi(-x), & x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq a, \\ \Phi_1(x), & a < x < b, \\ +\infty, & x \geq b \end{cases}$$

şeklinde tanımlı Φ fonksiyonu bir Young fonksiyonudur. Burada örneğin, $p \geq 1$ olmak üzere $a \leq x < b$ için $\Phi_1(x) = |x - a|^p$ alabiliriz.

Örnek 3.2.8. Bir $x \in \mathbb{R}$ için $\Phi(x) = |x|$ alalım. O halde, $\alpha + \beta = 1$ olacak şekildeki her $\alpha, \beta \in (0, 1)$ için, $|\alpha x + \beta y| \leq \alpha|x| + \beta|y|$ olur. Dolayısıyla, Φ dışbükey bir fonksiyondur. Ayrıca, $x \in \mathbb{R}$ için $|-x| = |x|$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} |x| = +\infty$ olduğundan Φ bir Young fonksiyonu olur. Buna göre,

$$\Psi(y) = \begin{cases} \Psi(-y), & y < 0, \\ 0, & 0 \leq y < 1, \\ +\infty, & y \geq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan Ψ fonksiyonu da Φ için tamlayan Young fonksiyonudur.

Gözlem 3.2.9. Bir Young tamlayanı, $y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $x \geq 0$ için $xy - \Phi(x)$ şeklindeki terimlerin üst sınırlarının en küçüğü olduğundan Young eşitsizliğini sağlayan en küçük fonksiyondur.

Bir $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ Young fonksiyonunun tanımı göz önüne alınırsa, dışbükey, $\Phi(0) = 0$ ve bir reel sayıda $+\infty$ değer alabilen bir fonksiyondur. Buradan, eğer bir $a \in (0, +\infty)$ için

$\Phi(a) = +\infty$ ise her $x > a$ için $\Phi(x) = +\infty$ olur. Bu durum, $\varphi(0) = 0$ ve $x \geq a$ için $\varphi(x) = +\infty$ koşulları ile Teorem 2.4.1'de verilen temsil, Young fonksiyonları için aşağıdaki şekilde yorumlanabilir.

Sonuç 3.2.10. Bir $\Phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$ Young fonksiyonu için,

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt, \quad x \geq 0 \quad (3.11)$$

temsili geçerlidir. Burada, $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$ fonksiyonu, Φ fonksiyonunun sağ türevi olmak üzere $\varphi(0) = 0$ koşulunu sağlayan, $[0, +\infty)$ da artan ve sağdan sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca, $x \geq a$ için $\varphi(x) = +\infty$ ise $x \geq a \geq 0$ için $\Phi(x) = +\infty$ olur.

O halde, (3.11) temsili göz önüne alınarak Ψ tamlayan fonksiyonu için de alternatif bir tanım verilebilir. Burada, φ artan ve sağdan sürekli olduğundan tersi

$$\psi(u) = \inf\{t : \varphi(t) > u\}, \quad u \geq 0 \quad (3.12)$$

ile tek türlü olacak şekilde verilebilir. Bu durumda, $\psi(0) = \inf\{t > 0 : \varphi(t) > 0\} = 0$ eşitliği sağlanır. Öte yandan, ψ artan bir fonksiyondur. Gerçekten, $u_1 < u_2$ için

$$\psi(u_1) = \inf\{t : \varphi(t) > u_1\} \leq \inf\{t : \varphi(t) > u_2\} = \psi(u_2)$$

sağlanır. Ayrıca, φ sağdan sürekli ve artan bir fonksiyon olduğundan, $\{t : \varphi(t) > u\} = (\psi(u), +\infty)$ olur. Bunun yanı sıra, (3.11) ifadesinden, $\psi(u) < t$ olması için gerek ve yeter koşul $\varphi(t) > u$ olmasıdır. φ monoton bir fonksiyon olduğundan $\{t : \varphi(t) > u\}$ kümesinin infimumu olarak tanımlanan ψ fonksiyonu da Borel ölçülebilirdir. O halde,

$$\Psi(y) = \int_0^y \psi(u) du, \quad y \geq 0 \quad (3.13)$$

ile tanımlanan Ψ bir Young fonksiyonudur. Üstelik Ψ fonksiyonu, Φ için tamlayan Young fonksiyonudur.

Aşağıdaki teorem, Young eşitsizliğinin integral temsilleri ile verilen (Φ, Ψ) tamlayan Young fonksiyon çifti tarafından sağlandığını gösterir.

Teorem 3.2.11. Bir $\Phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$ Young fonksiyonu için, Ψ fonksiyonu (3.13)'teki şekilde verilsin. Bu durumda, her $x, y \geq 0$ için $xy \leq \Phi(x) + \Psi(y)$ Young eşitsizliği geçerlidir. Özel olarak, $y = \varphi(x)$ veya $x = \psi(y)$ için, eşitlik durumu elde edilir.

İspat. Eğer bir $x_0 \in [0, +\infty)$ için $\Phi(x_0) = +\infty$ veya bir $y_0 \in [0, +\infty)$ için $\Psi(y_0) = +\infty$ ise $x_0 y_0 \leq \Phi(x_0) + \Psi(y_0) = +\infty$ olduğundan eşitsizlik sağlanır. Bu nedenle, her $x \in [0, +\infty)$ ve $y \in [0, +\infty)$ için $\Phi(x) < +\infty$ ve $\Psi(y) < +\infty$ olsun. Buradan,

$$A := \{u \leq x, v \leq y : 0 \leq u \leq \varphi(v), 0 \leq \psi(u) < v\}$$

ve

$$B := \{u \leq x, v \leq y : u > \varphi(v) \geq 0, \psi(u) \geq v \geq 0\}$$

kümeleri tanımlansın. Böylece, Fubini-Tonelli Teoremi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} 0 \leq xy &= \int_0^x \int_0^y dudv = \iint_A dudv + \iint_B dudv \\ &= \int_0^x du \int_0^{\min\{y, \varphi(u)\}} dv + \int_0^y dv \int_0^{\min\{x, \psi(v)\}} du \\ &\leq \int_0^x \varphi(u) du + \int_0^y \psi(v) dv = \Phi(x) + \Psi(y) \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $y = \varphi(x)$ ise, $u \leq x$ ve φ artan olduğundan $\min\{y, \varphi(u)\} = \varphi(u)$ olur. Dolayısıyla

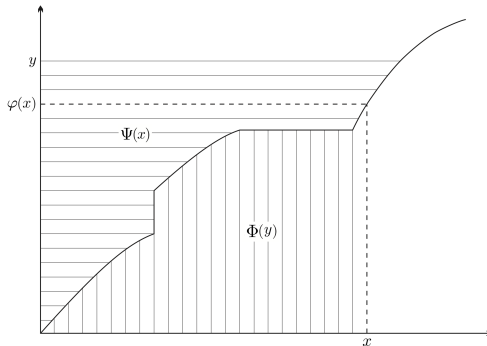
$$\int_0^x du \int_0^{\min\{y, \varphi(u)\}} dv = \int_0^x \varphi(u) du = \Phi(x)$$

bulunur. Diğer taraftan, $\psi(y) = \inf\{t > 0 : \varphi(t) > \varphi(x)\}$ olduğundan $x \geq \psi(y) \geq \psi(v)$ sağlanır. Buradan,

$$\int_0^y dv \int_0^{\min\{x, \psi(v)\}} du = \int_0^y \psi(v) dv = \Psi(y)$$

olur. Böylece, $xy = \Phi(x) + \Psi(y)$ elde edilir. □

Uyarı 3.2.12. Eşitsizliğin sağlandığı aşağıdaki grafikte kolayca görülebilir.



Şekil 3.1: 3.2.11 eşitsizliğin grafiksel gösterimi

Önerme 3.2.13. Φ bir Young fonksiyonu olmak üzere $x > 0$ için

$$\frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x}{2}\right) \leq \frac{\Phi(x)}{x} \leq \varphi(x) \quad (3.14)$$

eşitsizliği geçerlidir. Benzer şekilde Ψ tamlayan Young fonksiyonu için

$$\frac{1}{2}\psi\left(\frac{x}{2}\right) \leq \frac{\Psi(x)}{x} \leq \psi(x) \quad (3.15)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Sonuç 3.2.10 dolayısıyla, Φ Young fonksiyonu için φ artan, sağdan sürekli ve $\varphi(0) = 0$ olmak üzere, $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt$ integral gösterimi vardır. O halde,

$$\frac{\Phi(x)}{x} = \frac{1}{x} \int_0^x \varphi(t) dt \geq \frac{1}{x} \int_{\frac{x}{2}}^x \varphi(t) dt \geq \frac{1}{x} \int_{\frac{x}{2}}^x \varphi\left(\frac{x}{2}\right) dt = \frac{1}{x} \frac{x}{2} \varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{x}{2}\right) \quad (3.16)$$

olur. Yine, φ artan olduğundan

$$\frac{\Phi(x)}{x} = \frac{1}{x} \int_0^x \varphi(t) dt \leq \frac{1}{x} \int_0^x \varphi(x) dt = \frac{1}{x} \varphi(x) x = \int_0^x \varphi(t) dt = \varphi(x) \quad (3.17)$$

bulunur. (3.16) ve (3.17) birleştirilirse, istenen elde edilir. Benzer şekilde, (3.15) eşitsizliği de gösterilir. $\square$

3.3 TAMLAYAN YOUNG FONKSİYON ÇİFTLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİ

Bu kısımda, özellikle kesin artan sürekli Young fonksiyonları incelenecektir. Eğer $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ Young fonksiyonu sürekli ise pek çok önemli özelliklere ve sıralama bağıntılarına sahip olur. Bunun için aşağıdaki tanımla başlayalım.

Tanım 3.3.1. Bir $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ sürekli Young fonksiyonu,

- (i) Φ dışbükey ve çift,
- (ii) $\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x)}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi(x)}{x} = +\infty$

koşullarını sağlıyorsa, Φ Young fonksiyonu N **fonksiyonu** olarak adlandırılır.

Önerme 3.3.2. Φ_1 ve Φ_2 iki N fonksiyonu, $\alpha, \beta > 0$ ise aşağıdakiler geçerlidir.

- (i) $\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2$ bir N fonksiyonudur.
- (ii) $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2$ bir N fonksiyonudur.

İspat. N fonksiyonu tanımından istenen kolayca elde edilir. İspat, okuyucuya alıştırmaya bırakılmıştır. $\square$

Önerme 3.3.3. Φ bir N fonksiyonu olsun.

(i) Keyfi $x \neq 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için $\Phi(\alpha x) < \alpha \Phi(x)$,

(ii) keyfi $x \neq 0$ ve $\alpha > 1$ için $\Phi(\alpha x) > \alpha \Phi(x)$

ifadeleri geçerlidir.

İspat. Okuyucuya bırakılmıştır. □

Sonuç 3.3.4. Φ bir N fonksiyonu olsun. Eğer $0 < x < y$ ise $\Phi(x) \leq \frac{x}{y} \Phi(y)$ geçerlidir.

İspat. Φ dışbükey olduğundan

$$\Phi(x) = \Phi\left(\frac{x}{y}y + 0\right) \leq \frac{x}{y}\Phi(y) + \left(1 - \frac{x}{y}\right)\Phi(0) = \frac{x}{y}\Phi(y)$$

bulunur. □

Önerme 3.3.5. (Φ, Ψ) tamlayan N fonksiyon çifti olsun. Bu durumda, Φ^{-1} ve Ψ^{-1} tersleri tek türlü tanımlanır ve

(i) keyfi $a, b \in [0, +\infty)$ için $\Phi(a) + \Phi(b) \leq \Phi(a+b)$ ve $\Phi^{-1}(a+b) \leq \Phi^{-1}(a) + \Phi^{-1}(b)$,

(ii) keyfi $\alpha > 0$ için, $\alpha < \Phi^{-1}(\alpha)\Psi^{-1}(\alpha) \leq 2\alpha$

ifadeleri sağlanır.

İspat. Sonuç 3.2.10 gereği φ fonksiyonu artandır. Böylece, $a, b \in [0, +\infty)$ için

$$\Phi(a) + \Phi(b) = \int_0^a \varphi(t)dt + \int_0^b \varphi(t)dt \leq \int_0^a \varphi(t)dt + \int_a^{a+b} \varphi(t)dt = \int_0^{a+b} \varphi(t)dt = \Phi(a+b) \quad (3.18)$$

olur. Böylece, (i) ifadesinin ilk eşitsizliği elde edilir.

Öte yandan, Φ fonksiyonu sürekli ve kesin artan olduğundan Φ^{-1} ters fonksiyonu vardır. Böylece, her $\alpha \in [0, +\infty)$ için bir tek $a \in \mathbb{R}$ vardır ve $\Phi^{-1}(\alpha) = a$ ya da $\alpha = \Phi(a)$ olur. O halde, $\alpha = \Phi(a)$, $\beta = \Phi(b)$ ise, ilk eşitsizlik dolayısıyla $\alpha + \beta \leq \Phi(a+b)$ olur. Böylece

$$\Phi^{-1}(\alpha + \beta) \leq a + b \leq \Phi^{-1}(\alpha) + \Phi^{-1}(\beta)$$

elde edilir.

(ii) ifadesini gösterelim. Keyfi bir $a > 0$ alalım. İntegraller için ortalama değer teoreminden

$$\frac{\Phi(a)}{a} = \frac{1}{a} \int_0^a \varphi(t)dt = \varphi(t^*)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde bir $0 < t^* < a$ sayısı vardır. Böylece, φ fonksiyonunun artanlığı da kullanılırsa,

$$\Psi\left(\frac{\Phi(a)}{a}\right) = \int_0^{\frac{\Phi(a)}{a}} \psi(t)dt = \frac{\Phi(a)}{a} \psi(t'), \quad 0 < t' < \frac{\Phi(a)}{a} = \varphi(t^*) < \varphi(a)$$

bulunur. Buradan ψ fonksiyonu artan, $t' < \varphi(a)$ ve φ ile ψ birbirlerinin tersi olduğundan

$$\Psi\left(\frac{\Phi(a)}{a}\right) = \frac{\Phi(a)}{a} \psi(t') < \frac{\Phi(a)}{a} \psi(\varphi(a)) = \frac{\Phi(a)}{a} a = \Phi(a)$$

elde edilir. O halde,

$$\Psi\left(\frac{\Phi(a)}{a}\right) < \Phi(a) \quad (3.19)$$

bulunur. Burada, keyfi bir $\alpha > 0$ olmak üzere $\Phi(a) = \alpha$ alınırsa, $\Phi^{-1}(\alpha) = a$ olduğundan (3.19) ifadesi gereği,

$$\Psi\left(\frac{\alpha}{\Phi^{-1}(\alpha)}\right) < \alpha \Rightarrow \frac{\alpha}{\Phi^{-1}(\alpha)} < \Psi^{-1}(\alpha) \Rightarrow \alpha < \Psi^{-1}(\alpha) \Phi^{-1}(\alpha) \quad (3.20)$$

olur. Diğer taraftan, $\alpha = \Phi(a)$, $\beta = \Psi(b)$ ise $a = \Phi^{-1}(\alpha)$ ve $b = \Psi^{-1}(\beta)$ olmak üzere Young eşitsizliğinden,

$$\Phi^{-1}(\alpha) \Psi^{-1}(\beta) \leq \alpha + \beta \quad (3.21)$$

bulunur. Böylece, (3.21) eşitsizliğinde $\alpha = \beta$ alınırsa, (3.20) eşitsizliği ile birlikte

$$\alpha < \Psi^{-1}(\alpha) \Phi^{-1}(\alpha) \leq 2\alpha$$

elde edilir. Bu ise istenendir. □

Önerme 3.3.6. Aşağıdaki N fonksiyonu örneklerini verelim.

(i) Keyfi bir $p > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $\Phi(x) = \frac{|x|^p}{p}$ fonksiyonunun tamlayan fonksiyonu $\Psi(y) = \frac{|y|^q}{q}$ olur.

(ii) $\Phi(x) = e^{|x|} - |x| - 1$ fonksiyonunun tamlayan fonksiyonu $\Psi(y) = (1 + |y|) \ln(1 + |y|) - |y|$ olur.

İspat. Kabul edelim ki, $p > 1$ için $\Phi(x) = \frac{|x|^p}{p}$ olsun. O halde, $x > 0$ için $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}$ ve buradan, $\varphi(x) = x^{p-1}$ olur. Böylece, $\psi(x) = x^{\frac{1}{p-1}}$ ters fonksiyonu elde edilir. Buradan

$$\Psi(y) = \int_0^y \psi(x) dx = \int_0^y x^{\frac{1}{p-1}} dx = \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{\frac{p}{p-1}}$$

olur. Ayrıca, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olduğundan $q = \frac{p}{p-1}$ bulunur. O halde,

$$\Psi(y) = \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{\frac{p}{p-1}} = \frac{y^q}{q}$$

elde edilir. Benzer şekilde, $x = 0$ ve $x < 0$ durumları da yapılır. Böylece, $p > 1$ için, $\Phi(x) = \frac{|x|^p}{p}$ ise $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $\Psi(y) = \frac{|y|^q}{q}$ tamlayan Young fonksiyonu elde edilir.

(ii) Kabul edelim ki, $\Phi(x) = e^{|x|} - |x| - 1$ olsun. Bu durumda

$$\Phi(x) = \begin{cases} e^x - x - 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ e^{-x} + x - 1, & x < 0 \end{cases}$$

olur. Herhangi $x > 0$ için $\Phi_1(x) = e^x - x - 1$ olduğundan $\varphi_1(x) = e^x - 1$ bulunur. Buradan, $\psi(x) = \ln(x+1)$ olur. O halde,

$$\Psi(y) = \int_0^y \ln(1+x) dx = (y+1) \ln(y+1) - y$$

tamlayan Young fonksiyonu elde edilir. Benzer şekilde, $x = 0$ ve $x < 0$ durumları da yapılır. Böylece, $\Phi(x) = e^{|x|} - |x| - 1$ fonksiyonu için $\Psi(y) = (1+|y|) \ln(1+|y|) - |y|$ tamlayan Young fonksiyonu elde edilir.

Önerme 3.3.7. (Φ_i, Ψ_i) , $i = 1, 2$ tamlayan Young fonksiyon çifti olsun. Eğer $x \geq x_0 \geq 0$ için $\Phi_1(x) \leq \Phi_2(x)$ koşulu sağlanıyor ise $y_0 = \varphi_2(x_0)$ olmak üzere her $y \geq y_0 \geq 0$ için $\Psi_2(y) \leq \Psi_1(y)$ eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Kabul edelim ki, $x \geq x_0 \geq 0$ için $\Phi_1(x) \leq \Phi_2(x)$ eşitsizliği sağlansın. O halde, $y \geq y_0 \geq 0$ için $\Psi_2(y) \leq \Psi_1(y)$ olduğunu gösterelim. Young eşitsizliğinin eşitlik durumu kullanılarak

$$\psi_2(y)y = \Phi_2(\psi_2(y)) + \Psi_2(y) \quad (3.22)$$

ifadesi elde edilir. Benzer şekilde, Young eşitsizliğinden

$$\psi_2(y)y \leq \Phi_1(\psi_2(y)) + \Psi_1(y) \quad (3.23)$$

bulunur. Ayrıca, kabul gereği her $x \geq x_0 \geq 0$ için $\Phi_1(x) \leq \Phi_2(x)$ olduğundan (3.22) ve (3.23) ifadeleri kullanılırsa,

$$\Phi_2(\psi_2(y)) + \Psi_2(y) = \psi_2(y)y \leq \Phi_1(\psi_2(y)) + \Psi_1(y) \leq \Phi_2(\psi_2(y)) + \Psi_1(y)$$

elde edilir. Böylece, $\Psi_2(y) \leq \Psi_1(y)$ olur. □

3.4 N FONKSİYONLARININ KARŞILAŞTIRILMASI

N fonksiyonları arasında kısmi sıralama bağıntılarından bahsedilebilir. Bu bölümde bu sıralama bağıntılarından bazıları verilecektir. Bu karşılaştırmalar sonraki çalışmalarda oldukça yararlı olacaktır.

Tanım 3.4.1. Φ_1 ve Φ_2 Young fonksiyonları olsun.

(i) Eğer $x \geq x_0 \geq 0$ için

$$\Phi_2(x) \leq \Phi_1(ax)$$

koşulunu sağlayan bir $a > 0$ ve a 'ya bağlı x_0 reel sayısı varsa Φ_1 fonksiyonu, Φ_2 fonksiyonundan **daha kuvvetlidir** veya güçlüdür denir ve bu ifade $\Phi_1 > \Phi_2$ veya $\Phi_2 < \Phi_1$ ile gösterilir.

(ii) Eğer $x \geq x_0 \geq 0$ için

$$\Phi_2(x) \leq \Phi_1(ax)$$

koşulu herhangi $a > 0$ ve a 'ya bağlı x_0 reel sayıları için sağlanıyorsa Φ_1 fonksiyonu, Φ_2 fonksiyonundan **esasen kuvvetlidir** veya güçlüdür denir ve bu ifade $\Phi_1 >> \Phi_2$ veya $\Phi_2 << \Phi_1$ ile gösterilir.

(iii) Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $K_\varepsilon > 0$ ve $x_0(\varepsilon) \geq 0$ sayıları, $x \geq x_0$ için

$$\Phi_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leq K\Phi_1(x)$$

olacak şekilde varsa Φ_1 fonksiyonu Φ_2 fonksiyonundan **tamamen kuvvetlidir** (güçlüdür) veya tam olarak kuvvetlidir (güçlüdür) denir ve bu ifade $\Phi_2 \ll \Phi_1$ ile gösterilir.

(iv) Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta_\varepsilon > 0$ ve $x_0(\varepsilon) \geq 0$ sayıları, $x \geq x_0$ için

$$\frac{1}{\delta}\Phi_2(\delta x) \leq \varepsilon\Phi_1(x)$$

olacak şekilde varsa Φ_1 fonksiyonu, Φ_2 fonksiyonundan **daha hızlı artar** denir ve bu ifade $\Phi_2 \leq \Phi_1$ ile gösterilir.

Uyarı 3.4.2. Bir (Φ, Ψ) tamlayan Young fonksiyon çifti, Tanım 3.4.1'de verilen koşullardan birini sağlamak zorunda değildir. Burada verilen (i) ve (ii) ifadeleri daha klasik özelliklerken (iii) ve (iv) ifadeleri 1960 yılı başlarında T. Ando ((1932,-) Japon matematikçi) tarafından tanıtılmıştır. Ayrıca, Tanım 3.4.1'deki ifadeler $x_0 = 0$ için sağlanıyorsa evrensel olarak, $x > 0$ için sağlanıyorsa yerel olarak adlandırılır.

Teorem 3.4.3. (Φ_i, Ψ_i) , $i = 1, 2$, tamlayan N fonksiyon çiftleri olsun ve sırasıyla (φ_i, ψ_i) fonksiyonları ile üretilsinler. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) $\Phi_2 < \Phi_1$,

(ii) bir $b_1 > 0$, $k_1 > 0$ ve $x_1 \geq 0$ vardır öyle ki, $x \geq x_1$ için $\varphi_2(x) \leq k_1\varphi_1(b_1x)$,

(iii) bir $b_2 > 0$, $k_2 > 0$ ve $y_1 \geq 0$ vardır öyle ki, $y \geq y_1$ için $k_2\psi_1(b_2y) \leq \psi_2(y)$,

(iv) $\Psi_1 < \Psi_2$.

İspat. Kabul edelim ki, $\Phi_2 < \Phi_1$ olsun. Göstermek istediğimiz $x \geq x_1$ için $\varphi_2(x) \leq k_1\varphi_1(b_1x)$ olacak şekilde bir $b_1 > 0$, $k_1 > 0$ ve $x_1 \geq 0$ var olmasıdır. Burada, $x = 0$ olduğunda $\varphi(0) = 0$ olacağından $x \neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Yine, φ fonksiyonunun artanlığı kullanılırsa,

$$x\varphi_2(x) = \int_x^{2x} \varphi_2(x)dt \leq \int_x^{2x} \varphi_2(t)dt = \Phi_2(2x)$$

bulunur. Kabul gereği, bir $b > 0$ için

$$\Phi_2(2x) \leq \Phi_1(2bx) = \int_0^{2bx} \varphi_1(t) dt \leq \int_0^{2bx} \varphi_1(2bx) dt = 2bx\varphi_1(2bx)$$

elde edilir. Böylece, $\varphi_2(x) \leq 2b\varphi_1(2bx)$ bulunur. O halde, $x > 0$ için $b_1 = 2b > 0, k_1 = b_1$ ve $x_1 = \frac{x_0}{2}$ alınırsa, $\varphi_2(x) \leq k_1\varphi_1(bx)$ bulunur. Bu ise (i) $\Rightarrow$ (ii)'dir.

Kabul edelim ki, $x \geq x_1$ için $\varphi_2(x) \leq k_1\varphi_1(b_1x)$ olacak şekilde $b_1 > 0, k_1 > 0$ ve $x_1 \geq 0$ sayıları var olsun. Göstermemiz gereken $y \geq y_1$ için

$$k_2\psi_1(b_2y) \leq \psi_2(y)$$

koşulunu sağlayan $b_2 > 0, k_2 > 0$ ve $y_1 \geq 0$ sayılarının var olmasıdır. $y_1 > 0$ sayısı, $\psi_2(y_1) \geq 1$ koşulunu sağlasın. $b_2 = \frac{1}{2k_1}$ ve $k_2 = \frac{1}{b_1}, y \geq y_1$ alınırsa,

$$\psi_1\left(\frac{y}{2k_1}\right) \leq \psi_1\left(\frac{1}{2k_1}\varphi_2(\psi_2(y))\right) \leq \psi_1\left(\frac{1}{2}\varphi_1(b_1\psi_2(y))\right) \leq \psi_1(\varphi_1(b_1\psi_2(y))) = b_1\psi_2(y)$$

olur. Böylece,

$$k_2\psi_1(b_2y) \leq \psi_2(y)$$

elde edilir. Bu ise, (ii) $\Rightarrow$ (iii) olmasıdır.

Kabul edelim ki, $y \geq y_1$ için $k_2\psi_1(b_2y) \leq \psi_2(y)$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde $b_2 > 0, k_2 > 0$ ve $y_1 \geq 0$ sayıları var olsun. Göstermemiz gereken $\Psi_1 < \Psi_2$ olmasıdır. Yani, $y \geq y_0 \geq 0$ için

$$\Psi_1(y) \leq \Psi_2(cy)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $c > 0$ sayısının var olmasıdır. Kabul dolayısıyla, b_2 sayısı, $0 < k_2 \leq b_2, y_0 = k_2y_1$ ve $c = \frac{2}{k_2}$ seçilirse, genelliği kaybetmeksizin $y \neq 0$ olmak üzere $y \geq y_0$ için

$$\begin{aligned} \Psi_2(cy) &= \int_0^{cy} \psi_2(t) dt \geq \frac{y}{k_2} \psi_2\left(\frac{2y}{2k_2}\right) \geq \frac{y}{k_2} \psi_2\left(\frac{y}{k_2}\right) \\ &\geq \frac{k_2}{b_2} \Psi_1\left(\frac{b_2y}{k_2}\right) \geq \Psi_1\left(\frac{k_2}{b_2} \frac{b_2}{k_2} y\right) = \Psi_1(y) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $\Psi_2(cy) \geq \Psi_1(y)$ yani, $\Psi_1 < \Psi_2$ olur. Bu ise, (iii) $\Rightarrow$ (iv) olmasıdır.

Kabul edelim ki, $\Psi_1 < \Psi_2$ olsun. Böylece, bir $c > 0$ ve $y_0 > 0$ için $y \geq y_0 > 0$ olmak üzere $\Psi_1(y) \leq \Psi_2(cy)$ olduğundan, $w = \Psi_2(cy)$ ve $w_0 = \Psi_2(cy_0)$ alınırsa, $\Psi_2^{-1}(w) = cy$ ve $y = \frac{\Psi_2^{-1}(w)}{c}$ elde edilir. Böylece $w \geq w_0$ için,

$$\frac{\Psi_2^{-1}(w)}{c} \leq \Psi_1^{-1}(w)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca, Önerme 3.3.5 (ii) kullanılırsa,

$$\frac{w}{c\Phi_2^{-1}(w)} < \frac{\Psi_2^{-1}(w)}{c} \leq \Psi_1^{-1}(w) \leq \frac{2w}{\Phi_1^{-1}(w)}$$

olur. Böylece, $w \geq w_0$ için

$$\Phi_1^{-1}(w) \leq 2c\Phi_2^{-1}(w)$$

bulunur. Burada $x_0 = \Phi_2^{-1}(w_0)$ ve $x = \Phi_2^{-1}(w)$ alınırsa, $\Phi_1^{-1}(w) \leq 2cx$ olduğundan $w \leq \Phi_1(2cx)$ olur. Böylece, $\Phi_2(x) \leq \Phi_1(2cx)$ elde edilir. Bu ise istenendir. $\square$

Teorem 3.4.4. (Φ_i, Ψ_i) , $i = 1, 2$, tamlayan N fonksiyon çiftleri olsun ve sırasıyla (φ_i, ψ_i) fonksiyonları ile üretilsinler. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) $\Phi_2 << \Phi_1$,

(ii) her $\varepsilon > 0$ için, öyle bir $x_1 > 0$ vardır ki $x \geq x_1$ için $\varphi_2(x) \leq \varepsilon\varphi_1(\varepsilon x)$,

(iii) her $k > 0$ için, öyle bir $y_1 > 0$ vardır ki $y \geq y_1$ için $k\psi_1(ky) \leq \psi_2(y)$,

(iv) $\Psi_1 << \Psi_2$,

(v) her $\lambda > 0$ için, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi_2(\lambda x)}{\Phi_1(x)} = 0$,

(vi) $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\Phi_1^{-1}(y)}{\Phi_2^{-1}(y)} = 0$,

(vii) öyle bir N fonksiyonu R vardır ki, $\Phi_1 > \Phi_2 \circ R$ ifadesi sağlanır.

İspat. Kabul edelim ki, $\Phi_2 << \Phi_1$ olsun. Göstermemiz gereken, her $\varepsilon > 0$ için

$$\varphi_2(x) \leq \varepsilon\varphi_1(\varepsilon x)$$

olacak şekilde bir $x_1 > 0$ sayısının var olmasıdır. $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ olsun. Kabul gereği, bir $x_0 \geq 0$, $x \geq x_0$ için $\Phi_2(x) \leq \Phi_1(\varepsilon x)$ olacak şekilde vardır. Böylece, $x \geq \frac{x_0}{2} = x_1 \geq 0$ için

$$x\varphi_2(x) \leq \Phi_2(2x) \leq \Phi_1\left(\frac{\varepsilon}{2}2x\right) = \Phi(\varepsilon x) = \int_0^{\varepsilon x} \varphi_1(t)dt \leq \varepsilon x\varphi_1(\varepsilon x)$$

olur. O halde,

$$\varphi_2(x) \leq \varepsilon\varphi_1(\varepsilon x)$$

elde edilir. Bu ise (i) $\Rightarrow$ (ii)'dir.

Kabul edelim ki, her $\varepsilon > 0$ için bir $x_1 > 0$ var ve $x \geq x_1$ için $\varphi_2(x) \leq \varepsilon\varphi_1(\varepsilon x)$ olsun. Göstermemiz gereken $k > 0$ için, bir $y_1 > 0$ var olması ve $y \geq y_1$ için $k\psi_1(ky) \leq \psi_2(y)$

sağlanmasıdır. Burada $y_1 > 0$ sayısı, $\psi_2(y_1) \geq x_1$ ve $\varepsilon = \frac{1}{2k}$ alınır, $y \geq y_1 > 0$ için

$$\begin{aligned}\psi_1(ky) &\leq \psi_1(k\varphi_2(\psi_2(y))) \leq \psi_1(k\varepsilon\varphi_1(\varepsilon\psi_2(y))) = \psi_1\left(\frac{1}{2}\varphi_1\left(\frac{1}{2k}\psi_2(y)\right)\right) \\ &\leq \psi_1\left(\varphi_1\left(\frac{1}{2k}\psi_2(y)\right)\right) = \frac{1}{2k}\psi_2(y) < \frac{1}{k}\psi_2(y)\end{aligned}$$

olur. Böylece (ii) $\Rightarrow$ (iii) elde edilir.

Şimdi (iii) $\Rightarrow$ (iv) ifadesini gösterelim. Kabul gereği, verilen bir $\delta > 0$ sayısı için $k = \frac{2}{\delta}$ alalım. Hipotezden bir $y_1 > 0$ vardır öyle ki $y \geq y_1$ için, $\psi_2(y) \geq k\psi_1(y)$ olur. Ayrıca, $w \geq ky_1 = w_0$ için

$$\Psi_1(w) \leq w\psi_1(w) \leq \frac{w}{k}\psi_2\left(\frac{w}{k}\right) \leq \Psi_2\left(\frac{2}{k}w\right) = \Psi_2(\delta w)$$

bulunur. Bu ise istenendir.

Kabul edelim ki, $\Psi_1 \ll \Psi_2$ olsun. Her $\lambda > 0$ için $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi_2(\lambda x)}{\Phi_1(x)} = 0$ olduğunu gösterelim. Verilen $\varepsilon > 0$ için $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ alalım. Hipotezden $w \geq 0$ için $\Psi_1(w) \leq \Psi_2(\delta w)$ olur. Böylece, $\Psi_2^{-1}(\Psi_1(w)) \leq \delta w$ bulunur. Eğer $\Psi_1(w) = x$ alınır, $\Psi_2^{-1}(x) \leq \delta \Psi_1^{-1}(x)$ olur. Böylece,

$$\frac{x}{\Phi_2^{-1}(x)} < \Psi_2^{-1}(x) \leq \delta \Psi_1^{-1}(x) \leq \frac{2\delta x}{\Phi_1^{-1}(x)}$$

elde edilir. Buradan $\Phi_1^{-1}(x) \leq \varepsilon \Phi_2^{-1}(x)$ bulunur. Yine, $x = \Phi_2(y)$ alınır,

$$x \leq \Phi_1\left(\varepsilon \Phi_2^{-1}(\Phi_2(y))\right).$$

olduğundan

$$\Phi_2(y) \leq \Phi_1(\varepsilon y) \text{ ve } y \geq \Phi_2^{-1}(\Psi_1(w_0)) = x_0 \quad (3.24)$$

bulunur. Böylece (i) ifadesi geçerli olur. O halde, verilen $\lambda > 0$ için $\varepsilon_n = (n\lambda)^{-1}$ alınır, (3.24) ifadesinden bir $x_n > 0$ dizisi vardır öyle ki $y \geq x_n$ için

$$\Phi_2(y) \leq \Phi_1(\varepsilon_n y) = \Phi_1\left(\frac{1}{n} \frac{y}{\lambda}\right)$$

olur. Böylece $x = \frac{y}{\lambda}$ alarak $x \geq \frac{x_n}{\lambda}$ için

$$\Phi_2(\lambda x) \leq \Phi_1\left(\frac{x}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\Phi_1(x)$$

bulunur. Buradan istenen elde edilir.

Eğer her $\lambda > 0$ için $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi_2(\lambda x)}{\Phi_1(x)} = 0$ ise

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\Phi_1^{-1}(y)}{\Phi_2^{-1}(y)} = 0$$

olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki, bu doğru olsun. Buradan, bir $\varepsilon_0 > 0$ sayısı ve $t_n \nearrow +\infty$ olacak şekilde bir dizi vardır öyle ki $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{\Phi_1^{-1}(t_n)}{\Phi_2^{-1}(t_n)} \geq \varepsilon_0 > 0$$

olur. Burada, $x_n = \Phi_1^{-1}(t_n)$, $\lambda_0 = \frac{1}{\varepsilon_0}$ alınırsa kabulümüz ile çelişir. O halde, kabul yanlıştır. Böylece, (v) $\Rightarrow$ (vi) geçerlidir.

Kabul edelim ki, $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\Phi_1^{-1}(y)}{\Phi_2^{-1}(y)} = 0$ olsun. O halde, $x = \Phi_1^{-1}(y)$ dönüşümü yapılsa,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi_2^{-1}(\Phi_1(x))}{x} = +\infty$$

olur. Böylece,

$$r(t) = \begin{cases} \inf \left\{ \frac{\Phi_2^{-1}(\Phi_1(x))}{x} : x > t \right\}, & t \geq 1, \\ t r(1), & t < 1 \end{cases}$$

alınırsa, $r(0) = 0$, r fonksiyonu artan, sürekli ve $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = +\infty$ olur. Böylece R fonksiyonu

$[0, +\infty)$ aralığında $R(x) = \int_0^x r(t)dt$ şeklinde ve $(-\infty, 0)$ aralığında $\Phi(-x) = \Phi(x)$ şeklinde tanımlanırsa R , reel sayılar üzerinde tanımlı bir N fonksiyonu olur. Ayrıca, tanım gereği $x \geq 1$ için

$$R(x) \leq x r(x) \leq \Phi_2^{-1}(\Phi_1(x))$$

bulunur. O halde $x \geq 1$ için $\Phi_1(x) \geq \Phi_2(R(x))$ ifadesi elde edilir. Böylece, (vi) $\Rightarrow$ (vii) geçerlidir.

Kabul edelim ki, $\Phi_1 > \Phi_2 \circ R$ olacak şekilde bir N fonksiyonu R var olsun. Göstermemiz gereken $\Phi_2 << \Phi_1$ olduğudur. Kabul gereği, bir $b > 0$ ve bir $x_0 > 0$ vardır ki her $x \geq x_0$ için

$$\Phi_2\left(R\left(\frac{x}{b}\right)\right) \leq \Phi_1(x)$$

olur. Böylece R bir N fonksiyonu olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{R\left(\frac{\varepsilon x}{b}\right)}{x} = +\infty$$

olur. Buradan, bir x_1 sayısı $x_1 \geq x_0$ ve $x \geq x_1$ için $x \leq R\left(\frac{\varepsilon x}{b}\right)$ olacak şekilde bulunur. O halde, $x \geq \frac{x_1}{\varepsilon}$ için

$$\Phi_1(\varepsilon x) \geq \Phi_2\left(R\left(\frac{\varepsilon x}{b}\right)\right) \geq \Phi_2(x)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise $\Phi_1 << \Phi_2$ olmasıdır. Böylece, (vii) $\Rightarrow$ (i) elde edilir. $\square$

Teorem 3.4.3 ve Teorem 3.4.4 göz önüne alınırsa bir N fonksiyon çiftinin denkliği aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.4.5. Φ_1 ve Φ_2 N fonksiyonları olsun. Bir $0 < a \leq b < \infty$ ve $x_0 \geq 0$ sayıları, her

$x \geq x_0$ için

$$\Phi_1(ax) \leq \Phi_2(x) \leq \Phi_1(bx)$$

koşulunu sağlayacak şekilde varsa Φ_1 fonksiyonu Φ_2 fonksiyonuna denktir denir ve $\Phi_1 \sim \Phi_2$ ile gösterilir. Bir başka ifadeyle,

$$\Phi_1 \sim \Phi_2 \Leftrightarrow \Phi_1 < \Phi_2 \text{ ve } \Phi_2 < \Phi_1$$

olmasıdır.

Uyarı 3.4.6. N fonksiyonları arasında verilen ” $\sim$ ” bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Sonuç 3.4.7. (Φ_i, Ψ_i) , $i = 1, 2$, tamlayan N fonksiyon çiftleri olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) $\Phi_1 \sim \Phi_2$,

(ii) bir $a_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ ve $x_1 \geq 0$ sayıları her $x \geq x_1 \geq 0$ için

$$a_1\varphi_1(a_2x) \leq \varphi_2(x) \leq a_3\varphi_1(a_4x)$$

koşulunu sağlayacak şekilde vardır,

(iii) bir $b_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ ve $y_1 \geq 0$ sayıları her, $y \geq y_1 \geq 0$ için

$$b_1\psi_1(b_2y) \leq \psi_2(y) \leq b_3\psi_1(b_4y)$$

koşulunu sağlayacak şekilde vardır,

(iv) $\Psi_1 \sim \Psi_2$.

Önerme 3.4.8. Φ_1 ve Φ_2 , N fonksiyonları olsun. Bu durumda, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi_1(x)}{\Phi_2(x)} > 0$ ise $\Phi_1 \sim \Phi_2$ geçerlidir.

İspat. Kabul edelim ki $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi_1(x)}{\Phi_2(x)} = L > 0$ olsun. Böylece, bir $x_0 \geq 0$ sayısı, her $x \geq x_0$ için $\frac{\Phi_1(x)}{\Phi_2(x)} \leq L + 1$ olacak şekilde vardır. Buradan, her $x \geq x_0$ için $\Phi_1(x) \leq (L + 1)\Phi_2(x)$ bulunur. Öte yandan, Teorem 3.3.3 dolayısıyla keyfi $\alpha > 1$ ve $x > 0$ için $\Phi_2(\alpha x) > \alpha\Phi_2(x)$ olur. Böylece, her $x \geq x_0$ için $\Phi_1(x) \leq (L + 1)\Phi_2(x) < \Phi_2((L + 1)x)$ bulunur. Buradan $\Phi_1 < \Phi_2$ elde edilir.

Öte yandan, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi_2(x)}{\Phi_1(x)} = \frac{1}{L}$ olduğundan bir $x_1 \geq 0$ vardır öyle ki her $x \geq x_1$ için $\frac{\Phi_2(x)}{\Phi_1(x)} \leq \frac{1}{L} + 1$ olur. Böylece, her $x \geq x_1$ için $\Phi_2(x) \leq \left(\frac{1}{L} + 1\right)\Phi_1(x) < \Phi_1\left(\left(\frac{1}{L} + 1\right)x\right)$ elde edilir. Bu ise $\Phi_2 < \Phi_1$ olmasıdır. O halde $\Phi_1 \sim \Phi_2$ denkliği elde edilir. $\square$

Önerme 3.4.9. (Φ_i, Ψ_i) , $i = 1, 2$ tamlayan N fonksiyon çiftleri olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) $\Phi_2 \prec \Phi_1$,

- (ii) $x, y \geq x_0 \geq 0$ için $\Phi_2(xy) \leq \Phi_1(x)\Phi_3(y)$ olacak şekilde bir Φ_3 N fonksiyonu vardır,
- (iii) $\Psi_1 \prec \Psi_2$.

İspat. Alıştırma olarak okuyucuya bırakılmıştır. $\square$

Bu kısımda verilen önerme ve teoremler göz önüne alındığında Tanım 3.4.1'de verilen bağıntılar N fonksiyonu için aşağıdaki gibi verilir.

Önerme 3.4.10. Φ_1 ve Φ_2 , N fonksiyonları olmak üzere aşağıdakiler geçerlidir.

- (i) $\Phi_2 \prec \Phi_1$ ise $\Phi_2 \prec \Phi_1$ ve $\Phi_2 \prec \Phi_1$ olur.
- (ii) $\Phi_2 \prec \Phi_1$ ise $\Phi_2 \prec \Phi_1$ ve $\Phi_2 \leq \Phi_1$ ise $\Phi_2 \prec \Phi_1$ olur.

3.5 BÜYÜME ÖZELLİKLERİNİN SINIFLANDIRILMASI

Bu kısımda Young fonksiyonlarının ve N fonksiyonlarının büyüme koşulları verilecektir. Büyüme koşulları ileride tanımlayacağımız Orlicz uzayları için önemli rol oynar.

Tanım 3.5.1. $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ bir Young fonksiyonu olsun. Eğer bir $k > 0$ ve $x_0 \geq 0$ sayıları, her $x \geq x_0 \geq 0$ için

$$\Phi(2x) \leq k\Phi(x) \quad (3.25)$$

koşulunu sağlayacak şekilde varsa Φ Young fonksiyonu Δ_2 koşulunu ($x_0 = 0$ durumunda evrensel olarak) sağlar denir ve $\Phi \in \Delta_2$ ile gösterilir.

Uyarı 3.5.2. $x \neq 0$ için $\Phi(2x) > 2\Phi(x)$ olduğundan $k > 2$ 'dir.

Örnek 3.5.3. $p \geq 1$ olmak üzere $\Phi(x) = |x|^p$ fonksiyonu $k \geq 2$ için Δ_2 koşulunu sağlayan bir Young fonksiyonudur. Üstelik, $a > 0$ reel sayısı için $p \geq 1$ olmak üzere $\Phi(x) = a|x|^p$ fonksiyonu da $k \geq 2^p$ için, Δ_2 koşulunu sağlayan bir Young fonksiyonudur.

$$\Phi(2x) = a|2x|^p = 2^p a|x|^p = 2^p \Phi(x) \leq k\Phi(x)$$

bulunur. Böylece, $\Phi \in \Delta_2$ elde edilir.

Diğer taraftan Δ_2 koşulunu sağlamayan fonksiyonlar da vardır.

Örnek 3.5.4. $\Phi(x) = e^{|x|} - 1$ fonksiyonu Δ_2 koşulunu sağlamayan bir Young fonksiyonudur.

Öte yandan, Δ_2 koşulunun ters durumu için 1960 yılında Ando [1] tarafından sunulan aşağıdaki tanıımı verelim.

Tanım 3.5.5. $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ bir Young fonksiyonu olsun. Bir $l > 1$ ve $x_0 \geq 0$ sayıları, her $x \geq x_0 \geq 0$ için

$$\Phi(x) \leq \frac{1}{2l} \Phi(lx) \quad (3.26)$$

koşulunu sağlayacak şekilde varsa Φ , ∇_2 koşulunu ($x_0 = 0$ durumunda evrensel olarak) sağlar denir ve $\Phi \in \nabla_2$ ile gösterilir.

Aşağıdaki teorem, Δ_2 ve ∇_2 koşullarının karakterizasyonunu verir.

Teorem 3.5.6. (Φ, Ψ) tamlayan N fonksiyon çifti olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) $\Phi \in \Delta_2$,
- (ii) bir $1 < \alpha < \infty$ ve bir $x_0 \geq 0$ vardır öyle ki $x \geq x_0$ için $\frac{x\varphi(x)}{\Phi(x)} < \alpha$,
- (iii) bir $1 < \beta < \infty$ ve bir $y_0 \geq 0$ vardır öyle ki $y \geq y_0$ için $\frac{y\psi(y)}{\Psi(y)} > \beta$,
- (iv) $\Psi \in \nabla_2$,
- (v) bir $\delta > 0$ ve bir $x_0 \geq 0$ vardır öyle ki $x \geq x_0$ için $\Phi((1 + \delta)x) \leq 2\Phi(x)$,
- (vi) $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi^{-1}(x)}{\Phi^{-1}(2x)} < 1$.

İspat. Kabul edelim ki, $\Phi \in \Delta_2$ olsun. (ii)'yi gösterelim. Δ_2 koşulunun tanımı gereği,

$$k\Phi(x) \geq \Phi(2x) = \int_0^{2x} \varphi(t) dt \geq \int_x^{2x} \varphi(t) dt \geq \int_x^{2x} \varphi(x) dt = x\varphi(x)$$

elde edilir. Böylece, $k > 1$ ve $\alpha > k$ için

$$\frac{x\varphi(x)}{\Phi(x)} \leq k < \alpha$$

bulunur. Bu ise (i) $\Rightarrow$ (ii) olmasıdır.

Şimdi (ii) $\Rightarrow$ (iii) olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki, bir $1 < \alpha < \infty$ ve $x_0 \geq 0$ var ve $x \geq x_0$ için $\frac{x\varphi(x)}{\Phi(x)} < \alpha$ olsun. Bir $y_0 \geq 1$, $\psi(y_0) > x_0$ koşulunu sağlayacak şekilde alınırsa, φ ve ψ fonksiyonlarının özelliğinden, $\varphi(\psi(y)) > y$ olur. Böylece, $x = \psi(y)$ alınırsa ve $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\Psi(y)}{y} = +\infty$ olduğu kullanılırsa, her $y \geq y_0 \geq 0$ için, Young eşitsizliğinin eşitlik durumundan

$$\frac{y\psi(y)}{\Psi(y)} = \frac{\varphi(\psi(y))\psi(y)}{\Psi(\varphi(\psi(y)))} = \frac{x\varphi(x)}{\Psi(\varphi(x))} = \frac{x\varphi(x)}{x\varphi(x) - \Phi(x)} = \frac{\frac{x\varphi(x)}{\Phi(x)}}{\frac{x\varphi(x)}{\Phi(x)} - 1} > \frac{\alpha}{\alpha - 1} = \beta > 1$$

bulunur. Böylece (ii) $\Rightarrow$ (iii) elde edilir.

Kabul edelim ki bir $1 < \beta < \infty$ ve bir $y_0 \geq 0$ var ve $y \geq y_0$ için $\frac{y\psi(y)}{\Psi(y)} > \beta$ olsun. Şimdi $\Psi \in \nabla_2$ olduğunu gösterelim. Bir $l > 1$ için, kabul gereği,

$$\ln \left(\frac{\Psi(l y)}{\Psi(y)} \right) = \int_y^{ly} \frac{\psi(t)}{\Psi(t)} dt \geq \int_y^{ly} \frac{\beta}{t} dt = \beta \ln l$$

bulunur. Eğer $l^{\beta-1} \geq 2$ olarak alınırsa, $\beta \ln l \geq \ln 2l$ olur. Buradan $y \geq y_0$ için

$$\Psi(y) \leq \frac{1}{2l} \Psi(l y)$$

elde edilir. Bu ise (iii) $\Rightarrow$ (iv) olmasıdır.

Şimdi (iv) $\Rightarrow$ (i) olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki, $\Psi \in \nabla_2$ olsun. Eğer $\tilde{\Psi}(y) = \frac{1}{2l}\Psi(ly)$ ise, $\tilde{\Phi}(x) = \frac{1}{2l}\Phi(2x)$ bulunur. Böylece, kabul gereği $y \geq y_0 \geq 0$ için

$$\tilde{\Psi}(y) = \frac{1}{2l}\Psi(ly) > \Psi(y)$$

olur. Buradan, Teorem 3.4.3 gereği, $x \geq x_0$ için $\tilde{\Phi}(x) \leq \Phi(x)$ olur. Böylece, $k = 2l > 2$ alınırsa $x \geq x_0$ için $\Phi(2x) \leq k\Phi(x)$ elde edilir. Bu ise istenendir.

Kabul edelim ki $\Phi \in \Delta_2$ olsun. Bu durumda bir $x_0 \geq 0$ ve $k > 2$, $x \geq x_0 \geq 0$ için $\Phi(2x) \leq k\Phi(x)$ olacak şekilde vardır. Eğer $0 < \delta = \frac{1}{k-1} \leq 1$ alınırsa, Φ fonksiyonunun dışbükeyliğinden, her $x \geq x_0$ için,

$$\begin{aligned} \Phi((1+\delta)x) &= \Phi((1-\delta)x + 2\delta x) \leq (1-\delta)\Phi(x) + \delta\Phi(2x) \\ &\leq (1-\delta)\Phi(x) + \delta k\Phi(x) = 2\Phi(x) \end{aligned}$$

bulunur. O halde, (i) $\Rightarrow$ (v) elde edilir.

Kabul edelim ki (v) geçerli olsun. Yani, bir $\delta > 0$ ve $x_0 \geq 0$, her $x \geq x_0$ için $\Phi((1+\delta)x) \leq 2\Phi(x)$ olacak şekilde var olsun. Eğer $x = \Phi^{-1}(y)$ alınırsa $(1+\delta)\Phi^{-1}(y) \leq \Phi^{-1}(2y)$ bulunur. O halde,

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi^{-1}(x)}{\Phi^{-1}(2x)} < 1$$

elde edilir. Böylece (v) $\Rightarrow$ (vi) bulunur.

Son olarak, (vi) $\Rightarrow$ (i) gösterelim. Kabul edelim ki $\Phi \notin \Delta_2$ olsun. Bu durumda, bir (x_n) dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $1 \leq x_n$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ olmak üzere

$$\Phi\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)x_n\right) > 2\Phi(x_n) \quad (3.27)$$

olacak şekilde bulunabilir. Burada $y_n = \Phi(x_n)$ alınırsa, (3.27) ifadesinden

$$1 > \frac{\Phi^{-1}(y_n)}{\Phi^{-1}(2y_n)} > \frac{n}{n+1}$$

olur. Böylece,

$$1 > \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi^{-1}(y_n)}{\Phi^{-1}(2y_n)} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi^{-1}(y_n)}{\Phi^{-1}(2y_n)} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

bulunur, bu ise bir çelişkidir. O halde $\Phi \in \Delta_2$ sağlanır. Böylece (vi) $\Rightarrow$ (i) elde edilir. $\square$

Örnek 3.5.7. $\Phi(x) = (1 + |x|) \ln(1 + |x|) - |x|$ ise Young fonksiyonunun tamlayanı olan $\Psi(y) = e^{|y|} - |y| - 1$ Young fonksiyonu Teorem 3.5.6 ifadesinden $\Phi \in \Delta_2$ fakat $\Phi \notin \nabla_2$ ve $\Psi \in \nabla_2$ fakat $\Psi \notin \Delta_2$ olur.

Teorem 3.5.8. (Φ, Ψ) tamlayan N fonksiyon çifti olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) $\Phi \in \nabla_2$,
- (ii) bir $\delta > 0$ ve $x_0 \geq 0$ vardır öyle ki $x \geq x_0$ için $\Phi(2x) \geq (2 + \delta)\Phi(x)$,
- (iii) bir $0 < \eta < 1$ ve $x_1 \geq 0$ vardır öyle ki $x \geq x_1$ için $\Phi((2 - \eta)x) \geq 2\Phi(x)$,
- (iv) $\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi^{-1}(x)}{\Phi^{-1}(2x)} > \frac{1}{2}$.

İspat. Teorem 3.5.6'ya benzer şekilde yapılır. □

Teorem 3.5.6 (ii) ve (iii) göz önüne alınırsa sırasıyla aşağıdaki sonlu sayılar tanımlanır.

Tanım 3.5.9. (Φ, Ψ) tamlayan N fonksiyon çifti olsun. Bu durumda

$$a_\Phi = \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{x\varphi(x)}{\Phi(x)} \quad \text{ve} \quad b_\Phi = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{x\varphi(x)}{\Phi(x)} \quad (3.28)$$

olsun. Benzer şekilde a_Ψ ve b_Ψ sayıları da tanımlanır.

Aşağıdaki sonuç kolayca elde edilir.

Sonuç 3.5.10. (Φ, Ψ) tamlayan N fonksiyon çifti olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

$$(i) \quad \Phi \in \Delta_2, \quad (ii) \quad \Psi \in \nabla_2, \quad (iii) \quad b_\Phi < +\infty, \quad (iv) \quad a_\Psi > 1.$$

Üstelik, $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ olması için gerek ve yeter koşul $1 < a_\Phi \leq b_\Phi < +\infty$ olmasıdır.

Örnek 3.5.11. $\Phi(x) = (1 + |x|) \ln(1 + |x|) - |x|$ olsun. Bu durumda, Φ fonksiyonunun tamlayan fonksiyonunun $\Psi(y) = e^y - y - 1$ olduğu biliniyor. Ayrıca, $\varphi(x) = \ln(1 + x)$ ve $\psi(y) = e^y - 1$ 'dir.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\varphi(x)}{\Phi(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln(1 + |x|)}{(1 + |x|) \ln(1 + |x|) - |x|} = 1$$

bulunur. Böylece, $a_\Phi = b_\Phi = 1$ olur. Ayrıca, $y > 0$ olmak üzere,

$$a_\Psi = \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{y\psi(y)}{\Psi(y)} = \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{y(e^y - 1)}{e^y - y - 1} = +\infty$$

olur. Benzer olarak $b_\Psi = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{y\psi(y)}{\Psi(y)} = +\infty$ bulunur. Dolayısıyla $\Phi \notin \nabla_2$ fakat $\Phi \in \Delta_2$ olur. Yine, $\Psi \notin \Delta_2$ fakat $\Psi \in \nabla_2$ olur. O halde $\Phi \notin \Delta_2 \cap \nabla_2$ bulunur.

Örnek 3.5.12. Bir $\alpha > 1$ için $\Phi(x) = |x|^\alpha(1 + |\ln |x||)$ ise, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\varphi(x)}{\Phi(x)} = \alpha$ bulunur. Böylece, $a_\Phi = b_\Phi = \alpha$ olur. Buradan, $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ sağlanır.

Sonuç 3.5.13. $\Phi \in \Delta_2$ koşulunu sağlayan bir N fonksiyonu olsun. Bu durumda, bir $C > 0$ ve $\alpha > 1$ için $x \geq x_0$ olmak üzere $\Phi(x) \leq C|x|^\alpha$ koşulu sağlanır. Yine, Φ fonksiyonunun tamlayan fonksiyonu Ψ için ise bir $D > 0$ ve $\beta > 1$ için $y \geq y_0 > 0$ olmak üzere $\Psi(y) \geq D|y|^\beta$ geçerlidir.

İspat. Teorem 3.5.6 (ii) ve (iii)'den $y \geq y_0 > 0$ ve $\beta > 1$ için

$$\ln \frac{\Psi(y)}{\Psi(y_0)} = \int_{y_0}^y \frac{\psi(t)}{\Psi(t)} dt \geq \beta \int_{y_0}^y \frac{dt}{t} = \ln \left(\frac{y}{y_0} \right)^\beta$$

olur. Burada $D = \frac{\Psi(y_0)}{y_0^\beta}$ alınır, $\Psi(y) \geq Dy^\beta$ sağlanır. Benzer şekilde, $\Phi(x) \leq c|x|^\alpha$ olduğu gösterilir. $\square$

Sonuç 3.5.14. (Φ, Ψ) tamlayan N fonksiyon çifti olsun. Eğer $\Phi \in \Delta_2$ (veya $\Psi \in \nabla_2$) ise $(a_\Psi)^{-1} + (b_\Phi)^{-1} = 1$ sağlanır.

İspat. a_Ψ ve b_Φ tanımından, her $\varepsilon > 0$ için, $x \geq x_0$ iken $\frac{x\varphi(x)}{\Phi(x)} < b_\Phi$ olacak şekilde bir $x_0 > 0$ bulunabilir. Teorem 3.5.6 gereği bir $y_0 > 0$ vardır öyle ki $y \geq y_0$ için

$$\frac{y\psi(y)}{\Psi(y)} > \frac{b_\Phi + \varepsilon}{(b_\Phi + \varepsilon) - 1}$$

sağlanır. Buradan $a_\Phi > \frac{b_\Phi + \varepsilon}{(b_\Phi + \varepsilon) - 1}$ olur. Böylece $a_\Psi b_\Phi > a_\Psi + b_\Phi + a_\Psi \varepsilon + \varepsilon$ elde edilir. Her $\varepsilon > 0$ için $a_\Psi b_\Phi > a_\Psi + b_\Phi$ gerçekleşir.

Diğer yandan, $\Phi \in \Delta_2$ ise Teorem 3.5.6 kullanılırsa $\Psi \in \nabla_2$ sağlanır. Böylece, Sonuç 3.5.10 gereği $a_\Psi > 1$ sağlanır. Dolayısıyla, eğer $0 < \delta < a_\Psi - 1$ ise bir $y_0 > 0$ için $y \geq y_0$ olduğunda $\frac{y\psi(y)}{\Psi(y)} > a_\Psi - \delta$ geçerlidir. Ancak, Teorem 3.5.6 gereğince $x \geq x_1$ için $\frac{x\varphi(x)}{\Phi(x)} < \frac{a_\Psi - \delta}{(a_\Psi - \delta) - 1}$ olacak şekilde bir $x_1 > 0$ bulunabilir. Böylece, $b_\Phi < \frac{a_\Psi - \delta}{(a_\Psi - \delta) - 1}$ ve buradan $a_\Psi b_\Phi \leq a_\Psi + b_\Phi$ bulunur. O halde, $a_\Psi b_\Phi = a_\Psi + b_\Phi$ elde edilir. Bu ise istenendir. $\square$

Örnek 3.5.15. Keyfi bir $p > 1$ için $\Phi(x) = \frac{|x|^p}{p}$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ iken $\Psi(x) = \frac{|x|^q}{q}$ ve

$$a_\Psi = \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{x\varphi(x)}{\Phi(x)} = q, \quad b_\Phi = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{x\psi(x)}{\Psi(x)} = p$$

olur.

Hatırlatma. Genel olarak (Φ, Ψ) tamlayan N fonksiyon çiftinde, Φ fonksiyonunun Δ_2 koşulunu, Ψ fonksiyonunun ∇_2 koşulunu sağlaması gerekmez. Aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 3.5.16. Bir $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonu

$$\varphi(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1, \\ n!, & (n-1)! \leq t < n! \quad n \geq 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. 0 halde ψ ters fonsiyonu

$$\psi(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1, \\ (n-1)!, & (n-1)! \leq t < n! \quad n \geq 2 \end{cases}$$

olur. Öte yandan, Φ ve Ψ fonskiyonlarının tanımlarından, $t \geq 0$ için $\Psi(t) \leq \frac{t^2}{2}$ olmak üzere tamlayan N fonskiyon çiftidirler. Ayrıca, Ψ ve Φ fonskiyonları Δ_2 koşulunu sağlamaz. Gerçekten, $n \geq 1$ olmak üzere, $\Phi(2n!) > n\Phi(n!)$ ve $\Psi(2n!) > n\Psi(n!)$ olduğundan Φ ve Ψ fonskiyonları Δ_2 koşulunu sağlamaz.

Başka büyüme koşullarını veren aşağıdaki tanıımı verelim.

Tanım 3.5.17. Φ bir N fonskiyonu olsun. Eğer bir $c > 0$ sayısı, her $x, y \geq x_0 \geq 0$ için

$$\Phi(xy) \leq c\Phi(x)\Phi(y) \quad (3.29)$$

olacak şekilde varsa, Φ fonskiyonuna Δ' koşulunu sağlar denir ve $\Phi \in \Delta'$ ile gösterilir.

Benzer şekilde, bir $b > 0$ sayısı, her $x, y \geq x_0 \geq 0$ için

$$\Phi(x)\Phi(y) \leq \Phi(bxy) \quad (3.30)$$

olacak şekilde varsa, Φ fonskiyonuna ∇' koşulunu sağlar denir ve $\Phi \in \nabla'$ ile gösterilir.

Eğer $x_0 = 0$ ($y_0 = 0$) durumunda Δ' ve ∇' koşulları evrensel olarak sağlanır.

Aşağıda N fonskiyonları için Δ' koşulunu Δ_2 koşulunun bir alt sınıfı olarak ifade eden farklı bir yaklaşım verilmiştir.

Lemma 3.5.18. Bir Φ N fonskiyonunun Δ' koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul bir $a > 0$, $x_1 \geq 0$ sayılarının, $x, y \geq x_1$ için

$$\Phi(axy) \leq \Phi(x)\Phi(y) \quad (3.31)$$

olacak şekilde var olmasıdır. Bundan başka, Δ' koşulunu sağlayan fonskiyonlar Δ_2 koşulunu sağlayan fonskiyonların öz alt sınıfıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\Phi \in \Delta'$ olsun. Bu durumda, $0 < c < \infty$ için $a = \min \left\{ 1, \frac{1}{c} \right\}$ olarak alalım. O halde, tanım gereği, $x, y \geq x_0 \geq 0$ için

$$\Phi(axy) \leq a\Phi(xy) \leq ac\Phi(x)\Phi(y) \quad (3.32)$$

sağlanır. Ayrıca, $ac \leq 1$ olduğundan $\Phi(axy) \leq \Phi(x)\Phi(y)$ elde edilir.

Tersine, $\Phi \in \Delta'$ olduğunu gösterelim. Öte yandan, kabul dolayısıyla $\Phi \in \Delta_2$ olduğunu

gösterelim. Verilen $0 < \varepsilon < 1$ sayısı için $y_1 \geq \max\left\{x_1, \frac{1}{\varepsilon_0}\right\}$ alınırsa $x \geq x_1 \geq 0$ için

$$\Phi\left(\frac{1}{\varepsilon}x\right) \leq \Phi(ay_1x) \leq \Phi(y_1)\Phi(x) \quad (3.33)$$

sağlanır. Bu ise, $k = \Phi(y_1) > 0$ alınırsa $\Phi \in \Delta_2$ olduğunu gösterir. Yine, keyfi $a > 0$ için $\varepsilon = \sqrt{a}$ ve $x \geq x_2 \geq 0$ için,

$$\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) \leq k_1\Phi(x) \quad (3.34)$$

olur. Burada, $c = k_1^2$ ve $x_0 = \max\{\sqrt{a}x_1, x_2\}$ alınırsa $x, y \geq x_0$ için

$$\Phi(xy) \leq \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{a}}\right) \leq k_1^2\Phi(x)\Phi(y)$$

eşitsizliği elde edilir. O halde $\Phi \in \Delta'$ olur. Ayrıca, (3.33) eşitsizliğinden Δ' fonksiyonunun Δ_2 fonksiyonu olduğu biliniyor. Dolayısıyla Δ' koşulunu sağlayan her fonksiyon Δ_2 koşulunu da sağlar. $\square$

Uyarı 3.5.19. Δ_2 koşulunu sağlayan bir N fonksiyonunun Δ' koşulunu sağlaması gerekmez. Aşağıdaki örnek bununla ilgilidir.

Örnek 3.5.20. $\Phi(x) = \frac{x^2}{\ln(e + |x|)}$ fonksiyonu alalım. Bu fonksiyonun türevi Φ' , $[0, +\infty)$ aralığında artan olduğundan Φ bir N fonksiyonudur. Ayrıca, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi(2x)}{\Phi(x)} < +\infty$ olduğundan Δ_2 koşulunu sağlar. Ancak $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi(x^2)}{\Phi^2(x)} = +\infty$ olduğundan (3.29) ile çelişir. Böylece Φ fonksiyonu Δ' koşulunu sağlamaz. O halde Δ_2 fonksiyon sınıfı Δ' fonksiyon sınıfından büyüktür.

Önerme 3.5.21. (Φ_i, Ψ_i) , $i = 1, 2, 3$, tamlayan N fonksiyon çifti olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) Bir $a > 0$, $x_0 \geq 0$ sayıları $x, y \geq x_0$ için $\Phi_1(axy) \leq \Phi_2(x)\Phi_3(y)$ olacak şekilde vardır,
- (ii) bir $b > 0$, $y_0 \geq 0$ sayıları $x, y \geq y_0$ için $\Psi_2(x)\Psi_3(y) \leq \Psi_1(bxy)$ olacak şekilde vardır.

İspat. Kabul edelim ki, (i) ifadesi sağlansın ve $u = \Phi_2(x)$, $v = \Phi_3(y)$ olsun. Ayrıca, $u_0 = \max\{\Phi_2(x_0), \Phi_3(x_0)\}$ alınırsa, Önerme 3.3.5 (i) ve (ii)'den $u, v \geq u_0$ için

$$\frac{uv}{\Psi_2^{-1}(u)\Psi_3^{-1}(v)} < \Phi_2^{-1}(u)\Phi_3^{-1}(v) \leq \frac{1}{a}\Phi_1^{-1}(uv) \leq \frac{1}{a}\frac{2uv}{\Psi_1^{-1}(uv)}$$

sağlanır. Böylece $u, v \geq u_0$ için

$$\Psi_1^{-1}(uv) \leq \frac{2}{a}\Psi_2^{-1}(u)\Psi_3^{-1}(v) \quad (3.35)$$

olur. Yine, bu eşitsizlikte, $x' = \Psi_2^{-1}(u)$, $y' = \Psi_3^{-1}(v)$, $b = \frac{2}{a}$, $y_0 = \max\{\Psi_2^{-1}(v_0), \Psi_3^{-1}(u_0)\}$ seçilsin. Her iki tarafın Ψ_1 altındaki görüntüsü alınır, $x', y' \geq y_0$ için $\Psi_2(x')\Psi_3(y') \leq \Psi_1(bx'y')$ bulunur. Böylece (ii) elde edilir.

Kabul edelim ki (ii) sağlansın. Yine, Önerme 3.3.5 (ii) ve kabulden, yeteri kadar büyük u, v için

$$\frac{uv}{\Phi_1^{-1}(uv)} < \Psi_1^{-1}(uv) \leq b\Psi_2^{-1}(u)\Psi_3^{-1}(v) \leq \frac{2buv}{\Phi_2^{-1}(u)\Phi_3^{-1}(v)}$$

sağlanır. Böylece $\Phi_2^{-1}(u)\Phi_3^{-1}(v) \leq 2b\Phi_1^{-1}(uv)$ olur. Burada $a = \frac{1}{2b}$ seçilir ve her iki tarafın Φ_1 altındaki görüntüsü alınır, $u = \Phi_2(x)$ ve $v = \Phi_3(y)$ için

$$\frac{1}{2b}\Phi_2^{-1}(u)\Phi_3^{-1}(v) \leq \Phi_1^{-1}(uv) \quad \text{ve} \quad \Phi_1(x\Phi_2(y)) \leq \Phi_2(x)\Phi_3(y)$$

olur. Böylece (i) elde edilir. □

Sonuç 3.5.22. (Φ_i, Ψ_i) , $i = 1, 2$ tamlayan N fonksiyon çifti olsun. Bu durumda, $\Psi_2 \prec \Psi_1$ olması için gerek ve yeter koşul $x, y \geq y_0 \geq 0$ için

$$\Psi_3(x)\Psi_2(y) \leq \Psi_1(xy)$$

koşulunu sağlayan (Φ_3, Ψ_3) tamlayan N fonksiyon çiftinin var olmasıdır.

Teorem 3.5.23. (Φ, Ψ) tamlayan N fonksiyon çifti olsun ve sırasıyla φ, ψ sağ türevlerine sahip olsunlar. Aşağıdakiler denktir.

- (i) $\Phi \in \Delta'$,
- (ii) bir $d > 0$, $x_1 \geq 0$ sayıları $x, y \geq x_1$ için $\varphi(xy) \leq d\varphi(x)\varphi(y)$ olacak şekilde vardır,
- (iii) bir $c > 0$, $y_1 \geq 0$ sayıları $x, y \geq y_1$ için $\psi(x)\psi(y) \leq \psi(cxy)$ olacak şekilde vardır,
- (iv) $\Psi \in \nabla'$.

İspat. Kabul edelim ki $\Phi \in \Delta'$ olsun. Lemma 3.5.18 gereği, $\Phi \in \Delta_2$ olur. Böylece $x, y \geq x_1 \geq 0$ için

$$xy\varphi(xy) \leq \Phi(2xy) \leq k\Phi(xy) \leq kc\Phi(x)\Phi(y) \leq kcxy\varphi(x)\varphi(y)$$

sağlanır. Burada $d = kc$ seçilirse (ii) elde edilir.

Şimdi (ii) $\Rightarrow$ (iii) olduğunu göstereyim. Kabul edelim ki $d > 0$ ve $x_1 \geq 0$ sayıları $x, y \geq x_1$ için $\varphi(xy) \leq d\varphi(x)\varphi(y)$ olacak şekilde var olsun.

Eğer $x_2 = \max\{2, x_1\}$ alınır, kabulden $k_0 = d\varphi(x_2) > 0$ olmak üzere $y \geq x_1$ için

$$\varphi(2y) \leq \varphi(x_2y) \leq d\varphi(x_2)\varphi(y) = k_0\varphi(y) \tag{3.36}$$

olur. Burada $y_1 > 0$ sayısı $\psi(y_1) > 2x_1$ olacak şekilde seçilirse ve $0 < \varepsilon < \frac{\varphi(y_1)}{2}$ alınırsa (3.36) eşitsizliğinden $x, y \geq y_1$ için

$$\begin{aligned}\psi(x)\psi(y) &\leq \psi(\varphi(\psi(x)\psi(y))) \leq \psi(d\varphi(\psi(x))\varphi(\psi(y))) = \psi(dk_0^2\varphi(\frac{1}{2}(\psi(x))\varphi(\frac{1}{2}\psi(y)))) \\ &\leq \psi(dk_0^2\varphi(\psi(x) - \varepsilon)\varphi(\psi(y) - \varepsilon)) \leq \psi(dk_0^2\varphi(\psi(x))\varphi(\psi(y))) = \psi(dk_0^2xy)\end{aligned}$$

sağlanır. Burada $c = dk_0^2$ alınırsa (iii) elde edilir.

Kabul edelim ki bir $c > 0$ ve $y_1 \geq 0$ sayıları $x, y \geq x_1$ için $\psi(x)\psi(y) \leq \psi(cxy)$ olacak şekilde var olsun. Yine, ψ artan bir fonksiyon olduğundan kabulden $c > 1$ alınırsa $a = 2c$ ve $y_0 = y_1$ için $x, y \geq y_0$ için

$$\Psi(x)\Psi(y) \leq x\psi(x)y\psi(y) \leq cxy\psi(x)\psi(y) \leq cxy\psi(xy) \leq \Psi(2cxy) = \Psi(axy)$$

olur. Böylece (iv) elde edilir.

Son olarak kabul edelim ki $\Psi \in \nabla'$ olsun. Diğer bir ifadeyle $x, y \geq y_0$ için $\Psi(x)\Psi(y) \leq \Psi(bxy)$ olacak şekilde bir $b > 0$ sayısı olsun. Önerme 3.5.21 ifadesinden bir $c > 0$ ve $x_0 \geq 0$ sayıları $x, y \geq x_0 \geq 0$ için $\Phi(xy) \leq c\Phi(x)\Phi(y)$ olacak şekilde vardır. Bu ise $\Phi \in \Delta'$ olmasıdır. $\square$

Önerme 3.5.24. Eğer $\Phi \in \Delta' \cap \nabla'$ ise $p > 1$ için $\Phi_p(x) = |x|^p$ iken $\Phi \sim \Phi_p$ sağlanır ve tersi de geçerlidir.

İspat. Eğer $\Phi \in \Delta' \cap \nabla'$ ise Δ' ve ∇' tanımından öyle $a_1, a_2 > 0$ ve $x_0 \geq 0$ sayıları vardır ki $x, y \geq x_0$ için

$$\Phi(a_1xy) \leq \Phi(x)\Phi(y) \quad \text{ve} \quad \Phi(x)\Phi(y) \leq \Phi(a_2xy) \quad (3.37)$$

olur. Ayrıca, Φ dışbükey olduğundan, $a_2 \geq a_1$ için $f_i(u) = \ln \Phi(\frac{1}{a_i}e^u)$ ve $u_0 = \max(1, \log_{a_2} x_0)$ olsun. O halde $u, v \geq u_0$ için

$$f_1(u+v) \leq f_1(u) + f_1(v) \quad \text{ve} \quad f_2(u) + f_2(v) \leq f_2(u+v) \quad (3.38)$$

olur. Ayrıca, öyle bir $n \geq 1$ için $u \geq v, nv \leq v < (n+1)v$ olacak şekilde kabul edebiliriz. Böylece (3.37) kullanılırsa,

$$f_1(u) \leq f_1((n+1)v) \leq (n+1)f_1(v) \leq \frac{u+v}{v}f_1(v)$$

bulunur. Böylece

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{f_1(u)}{u} = \limsup_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{u+v}{u} \frac{f_1(v)}{v} \right) = \frac{f_1(v)}{v} \quad (3.39)$$

olur. O halde

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{f_1(u)}{u} \leq \liminf_{v \rightarrow \infty} \frac{f_1(v)}{v} < +\infty \quad (3.40)$$

elde edilir. Böylece (3.40) gereği $p_1 = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f_1(u)}{u} < +\infty$ bulunur. Ayrıca, (3.39) eşitsizliğinden $x \geq x_1 = e^{u_0}$ için, $0 < p_1 \leq \frac{\ln \Phi(\frac{1}{a_1}x)}{\ln x}$ olur. Böylece $x \geq \frac{x_1}{a_1}$ için $\ln(a_1x)^p \leq \ln \Phi(x)$ olur ve

buradan

$$(a_1x)^{p_1} \leq \Phi(x) \quad (3.41)$$

bulunur. Böylece (3.38) kullanılırsa benzer şekilde, $x \geq \frac{x_1}{a_2}$ ve bir $p_2 > 0$ için

$$\Phi(x) \leq (a_2x)^{p_2} \quad (3.42)$$

elde edilir. Fakat Φ bir N fonksiyonu olduğundan, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi(x)}{x} = +\infty$ olur. Yine, $i = 1, 2$ için

$$p_1(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \Phi(x)}{\ln a_1x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \Phi(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \Phi(x)}{\log_{a_2} x} = p_2 \quad (3.43)$$

bulunur. O halde $p = p_1 = p_2$ ve $x \geq \frac{x_1}{a_1}$ için (3.41) ve (3.42) eşitsizliklerinden $(a_1x)^p \leq \Phi(x) \leq (a_2x)^p$ elde edilir. Bu ise $\Phi \sim \Phi_p$ olmasıdır.

Tersine, $\Phi_p(x) = |x|^p$ ise $p > 1$ ve $x \geq 0$ için $\varphi(x) = px^{p-1}$ olur. Böylece Teorem 3.5.23 (ii)'den

$$\varphi(xy) = px^{p-1}y^{p-1} \leq \frac{1}{p}px^{p-1}py^{p-1} = \frac{1}{p}\varphi(x)\varphi(y)$$

olur. Burada $d = \frac{1}{p}$ olarak seçilirse $\Phi \in \Delta'$ olur. (Benzer biçimde $x < 0$ için de elde edilir.)

Yine, $x \geq 0$ için

$$\varphi(x)\varphi(y) = px^{p-1}py^{p-1} = p(p(xy)^{p-1}) \leq \varphi((p)^{\frac{1}{p-1}}(xy))$$

olur. (Benzer biçimde $x < 0$ için de elde edilir.) Burada $c = p^{\frac{1}{p-1}}$ alınırsa, Teorem 3.5.23 (iii)'den $\Phi \in \nabla'$ olur. Böylece $\Phi \in \Delta' \cap \nabla'$ bulunur. $\square$

Yukarıdaki önermenin Δ_2 durumu aşağıdaki gibidir.

Önerme 3.5.25. Φ bir N fonksiyonu olmak üzere $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ olması için gerek ve yeter koşul bir $\tilde{\Phi}$ N fonksiyonunun $x, y \geq y_0$ için

$$\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\tilde{\Phi}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) \leq \Phi(xy) \leq \Phi(x)\tilde{\Psi}(y) \quad (3.44)$$

olacak şekilde var olmasıdır. Burada $\tilde{\Psi}, \tilde{\Phi}$ fonksiyonunun tamlayan fonksiyonudur.

İspat. Kabul edelim ki $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ olsun. Öncelikle $\Phi \prec \Phi$ olduğunu gösterelim. $\Phi \in \Delta_2$ olduğundan $K > 0$ ve $x \geq x_0$ sayıları vardır ki $\Phi(2x) \leq K\Phi(x)$ olur. Yine, $\Phi \in \nabla_2$ olduğundan öyle bir $l > 1$ ve $x \geq x_0$ sayıları için $\Phi(x) \leq \frac{1}{2l}\Phi(lx)$ olur. O halde

$$\Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leq \Phi\left(\frac{2x}{\varepsilon}\right) \leq K\Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leq K\frac{1}{2l}\Phi(x)$$

olur. Burada $C = \frac{K}{2l}$ olacak şekilde seçilirse $\Phi \prec \Phi$ bulunur. Ayrıca, Önerme 3.4.9 (ii)'den öyle bir N fonksiyonu Ψ_1 vardır ki (3.44) ifadesinin sağ tarafı $\tilde{\Phi}$ için Ψ_1 ile sağlanır. Üstelik, Φ 'nin tamlayan fonksiyonu Ψ için $\Phi \in \nabla_2$ olduğundan Teorem 3.5.6'dan $\Psi \in \Delta_2$ olur. Böylece öyle

bir N fonksiyonu Ψ_2 vardır ki (3.44) ifadesi Φ ve $\tilde{\Phi}$ yerine Ψ ve Ψ_2 için doğru olur. Böylece $\tilde{\Psi} = \max\{\Psi_1, \Psi_2\}$, $w_0 = \max\{x_0, x'_0\}$ alınırsa $\tilde{\Psi}$ bir N fonksiyonudur ve $x, y \geq x_0$ için

$$\Phi(xy) \leq \Phi(x)\Phi(y) \quad \text{ve} \quad \Psi(xy) \leq \Psi(x)\Psi(y) \quad (3.45)$$

elde edilir. Fakat Önerme 3.5.21'den $x, y \geq x_0$ için

$$\Phi(x)\tilde{\Phi}(y) \leq \Phi(bxy) \quad (3.46)$$

olur. Burada $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\Psi}$ nin tamlayan fonksiyonudur. $a = 1$ olduğu için $b = \frac{2}{a} = 2$ olduğundan $x, y \geq \max\{w_0, \sqrt{2}x_0\}$ alınırsa (3.44) sağlanır.

Tersine (3.44) sağlansın. Sonuç 3.5.22 ve Önerme 3.4.9 (iii) gereği $\Phi \prec \Phi$ ve $\Phi \prec \Phi$ olduğundan $\Phi \in \nabla_2$ ve $\Phi \in \Delta_2$ olur. $\square$

Φ ve $\tilde{\Phi}$ denk N fonksiyonları olsun. Eğer $\Phi \in \Delta'$ veya $\Phi \in \Delta_2$ ise $\tilde{\Phi} \in \Delta'$ veya $\tilde{\Phi} \in \Delta_2$ olur. Gerçekten, eğer $\Phi \in \Delta'$ ise bir $d > 0$ sayısı

$$\Phi(xy) \leq d\Phi(x)\Phi(y), \quad x, y \geq x_0 \geq 0$$

olacak şekilde vardır. Φ ve $\tilde{\Phi}$ denk N fonksiyonları olduğundan Lemma 2.3.8 kullanılırsa

$$\tilde{\Phi}(xy) \leq \Phi(bxy) \leq \Phi(x)\Phi(y) \leq \tilde{\Phi}(ax)\tilde{\Phi}(ay) \leq \tilde{\Phi}(x)\tilde{\Phi}(y)$$

elde edilir. Böylece Lemma 2.3.8 gereğince $\tilde{\Phi} \in \Delta'$ olur. Eğer $\Phi \in \Delta_2$ ise bir $K > 0$ sayısı

$$\Phi(2x) \leq K\Phi(x), \quad x \geq x_0 \geq 0$$

olacak şekilde vardır. Φ ve $\tilde{\Phi}$ denk N fonksiyonları olduğundan

$$\tilde{\Phi}(2x) \leq \Phi(2bx) \leq \tilde{\Phi}(x)$$

elde edilir. O halde $\tilde{\Phi} \in \Delta_2$ olur.

Δ' koşulunun Δ' evrensel koşulunu gerektirmediği aşağıdaki örnekte verilmiştir.

Örnek 3.5.26. Keyfi bir $x \in \mathbb{R}$ için $\Phi(x) = (1 + |x|) \ln(1 + |x|) - |x|$ olsun. Bu durumda, Φ fonksiyonu Δ' koşulunu sağlar. Ancak bu evrensel değildir. Ayrıca, $\Phi \sim \tilde{\Phi}$ olacak şekilde evrensel olarak Δ' koşulunu sağlayan bir $\tilde{\Phi}$ fonksiyonu yoktur.

Verilen Φ fonksiyonunun Δ' koşulunu sağladığını göstermek için Teorem 3.5.23'ü kullanacağız. $\Phi(x) = (1 + |x|) \ln(1 + |x|) - |x|$ için $\varphi(x) = \ln(1 + x)$ fonksiyonudur. Buradan, $x, y > x_0 = e^2 - 1 > 0$ için

$$\varphi(xy) = \ln(1 + xy) \leq \ln(1 + 2xy + xy) = \ln(1 + x) + \ln(1 + y) \leq \varphi(x)\varphi(y)$$

olur. Böylece, Teorem 3.5.23 gereğince $\Phi \in \Delta'$ olduğu elde edilir. Fakat bu koşul evrensel olarak sağlanmaz.

Eğer evrensel olarak $\Phi \in \Delta'$ koşulu sağlansaydı sabit bir $c > 0$ sayısı için

$$\Phi(xy) \leq x\Phi(x)\Phi(y), \quad x, y \geq x_0 \geq 0$$

olurdu. O halde her $x, y \geq 0$ için $f(x, y) = \left(\frac{\Phi(x)\Phi(y)}{\Phi(xy)} \right) \geq \frac{1}{c} > 0$ olur. Fakat $f(n, \frac{1}{n}) = \left(\frac{\Phi(n)\Phi(\frac{1}{n})}{\Phi(1)} \right)$ olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n, \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\Phi(n)\Phi(\frac{1}{n})}{\Phi(1)} \right) = \frac{1}{\Phi(1)} \lim_{n \rightarrow \infty} (\Phi(n)\Phi(\frac{1}{n})) = \frac{1}{\Phi(1)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi(n)}{\frac{1}{\Phi(\frac{1}{n})}} = 0$$

elde edilir. Bu ise çelişkidir. Böylece, Φ evrensel olarak Δ' koşulunu sağlamaz.

Öte yandan, kabul edelim ki $\Phi \sim \tilde{\Phi}$ olacak şekilde evrensel olarak Δ' koşulunu sağlayan bir $\tilde{\Phi}$ N fonksiyonu var olsun. O halde bir $c > 0$ sayısı her $x, y \geq 0$ için

$$\tilde{\Phi}(xy) \leq c \tilde{\Phi}(x)\tilde{\Phi}(y)$$

olacak şekilde vardır. Ayrıca, $\Phi \sim \tilde{\Phi}$ olduğundan $0 < a \leq b < \infty$ ve $x \geq x_0 > 0$ için

$$\Phi(ax) \leq \tilde{\Phi}(x) \leq \Phi(bx)$$

olur. Ancak bu eşitsizlik gerçekleşmez. Aksi takdirde, $0 < x < 1$ ve $y \geq \frac{x_0}{x}$ olmak üzere

$$\frac{\tilde{\Phi}(xy)}{\tilde{\Phi}(y)} \geq \frac{\Phi(axy)}{\Phi(by)} = \frac{(1+axy) \ln(1+axy) - axy}{(1+by) \ln(1+by) - by}$$

olur ve

$$\liminf_{y \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\Phi}(xy)}{\tilde{\Phi}(y)} \geq \frac{ax}{b} \quad \text{ve} \quad \limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\Phi}(xy)}{\tilde{\Phi}(y)} \leq c \tilde{\Phi}(x)$$

bulunur. Böylece, her $0 < x < 1$ için

$$\frac{ax}{b} \leq \liminf_{y \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\Phi}(xy)}{\tilde{\Phi}(y)} \quad \text{ve} \quad \limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\Phi}(xy)}{\tilde{\Phi}(y)} \leq c \tilde{\Phi}(x)$$

olur. Buradan $\frac{a}{cb} \leq \frac{\tilde{\Phi}(x)}{x}$ elde edilir. Bu ise $\tilde{\Phi}$ bir N fonksiyonu olduğundan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tilde{\Phi}(x)}{x} = 0$ olmasıyla çelişir. Böylece, eğer Φ evrensel olarak Δ' koşulunu sağlamıyorsa $\Phi \sim \tilde{\Phi}$ olacak şekilde herhangi bir $\tilde{\Phi}$ fonksiyonu da evrensel olarak Δ' koşulunu sağlamaz.

Uyarı 3.5.27. ∇' koşulunu sağlayan fonksiyonların Δ' koşulunu sağlayan tamlayan fonksiyonları vardır.

Örnek 3.5.28. $\Phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonu $\Phi(x) = (1+x)^{\sqrt{\ln(1+x)}} - 1$ şeklinde tanımlansın. $\Phi(-x) = \Phi(x)$ olduğu kolayca elde edilir. Öte yandan, $\Phi \in \nabla'$ fakat tamlayan fonksiyonu $\Psi \in \Delta'$ olur.

3.6 N FONKSİYONLARI İÇİN TAMAMLAYICI SONUÇLAR

Bu bölüme kadar N fonksiyonlarına ilişkin pek çok karşılaştırma ve özellikler verilmesine rağmen polinomlar ile karşılaştırılmamıştır. Bu kısımda tamamlayıcı bazı karşılaştırmalar verilecektir.

Tanım 3.6.1. $\Phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ bir N fonksiyonu olsun.

(i) Eğer bir $b > 0$ sayısı her $x \geq x_0 \geq 0$ için

$$x\Phi(x) \leq \Phi(bx) \quad (3.47)$$

olacak şekilde varsa, Φ fonksiyonu Δ_3 koşulunu sağlar denir ve $\Phi \in \Delta_3$ ile gösterilir.

(ii) Eğer bir $k > 0$ sayısı her $x \geq x_0 \geq 0$ için

$$\Phi^{-1}(x)\Phi(x) \leq kx^2 \quad (3.48)$$

olacak şekilde varsa Φ fonksiyonu ∇_3 koşulunu sağlar denir ve $\Phi \in \nabla_3$ ile gösterilir.

Burada (3.47) ifadesi $x \geq \max\{x_0, 2b\} > 0$ için $\Phi(x) \leq \frac{1}{x}\Phi(bx) \leq \frac{1}{2b}\Phi(bx)$ olarak da verilebilir. Böylece, $\Phi \in \Delta_3$ ise $\Phi \in \nabla_2$ elde edilir. Ayrıca, $\Phi \sim \tilde{\Phi}$ ve $\Phi \in \Delta_3$ ise $\tilde{\Phi} \in \Delta_3$ olur. Eğer $x_0 = 0$ ise (3.47) ve (3.48) ifadeleri evrensel koşullar olarak adlandırılır.

Önerme 3.6.2. Eğer $\Phi \in \Delta_3$ ise, bir $\alpha > 0$ ve $x_1 > 0$ sayıları vardır öyle ki $x \geq x_1$ için

$$\Phi(x) \geq x^{\alpha \ln x} \quad (3.49)$$

olur.

İspat. Kabul edelim ki $\Phi \in \Delta_3$ olsun. Bu durumda, (3.47) eşitsizliğinden, $x \geq x_0 \geq 0$ için $x\Phi(x) \leq \Phi(bx)$ olacak şekilde bir $b > 0$ sayısı vardır. Buradan, $b > 1$, $x_0 > 1$ ve $\Phi(x_0) > 1$ sayılarını seçelim. Böylece, $y = \ln x$ ve $y_0 = \ln x_0$ alınırsa, $y \geq y_0$ için, (3.47) eşitsizliğinden $e^y\Phi(e^y) \leq \Phi(e^yb)$ olur. Buradan,

$$e^{(y+\ln \Phi(e^y))} \leq e^{\ln \Phi(e^y+\ln b)} \quad (3.50)$$

bulunur. Eğer $f(y) = \ln \Phi(e^y)$ alınırsa, $y \geq y_0$ için (3.50) eşitsizliğinden

$$f(y + \ln b) \geq y + f(y) \quad (3.51)$$

bulunur. Logaritma ve Φ fonksiyonu artan olduğundan, her $y \geq y_0 > 0$ için, f fonksiyonu da artan bir fonksiyondur. O halde,

$$y_0 + (n-1) \ln b \leq y \leq y_0 + n \ln b \quad (3.52)$$

olacak şekilde $n \geq 1$ tam sayısı bulunabilir. Böylece, (3.51) ve (3.52) eşitsizlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
 f(y) &\geq f(y_0 + (n-1) \ln b) \geq y_0 + (n-2) \ln b + f(y_0 + (n-2) \ln b) \\
 &\geq y_0 + (y_0 + \ln b) + \cdots + (y_0 + (n-2) \ln b) + f(y_0) \\
 &= (n-1)y_0 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \ln b + f(y_0) \\
 (3.53) \quad &\geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2) \ln b \\
 &\geq \frac{\ln b}{2} \left(\frac{y-y_0}{\ln b} - 1 \right) \left(\frac{y-y_0}{\ln b} - 2 \right)
 \end{aligned}$$

bulunur. Burada, $y \geq y_1$ için $y - y_0 - 2 \ln b \geq \frac{1}{2}y$ olacak şekilde öyle bir $y_1 \geq y_0$ bulabiliriz ki (3.53) eşitsizliğinden, $y \geq y_1$ için $f(y) \geq \frac{y^2}{8 \ln b}$ olur. Böylece, $x \geq e^{y_1}$ için

$$\ln \Phi(x) \geq \frac{1}{8 \ln b} (\ln x)^2 \quad (3.54)$$

bulunur. Burada, $\alpha = \frac{1}{8 \ln b}$ ve $x = e^{y_1}$ seçilirse (3.49) elde edilir. $\square$

Örnek 3.6.3. $\Phi(x) = e^{|x|} - |x| - 1$ veya $e^{x^2} - 1$ fonksiyonları $x > e$ için Δ_3 koşulunu sağlarken, $\Phi(x) = (1 + |x|) \sqrt{\ln(1+|x|)} - 1$ fonksiyonu Δ_3 koşulunu sağlamaz.

Şimdi, Δ_3 ve ∇_3 için denk koşulları verelim.

Teorem 3.6.4. (Φ, Ψ) tamlayan N fonksiyon çifti olsun. Aşağıdaki koşullar denktir.

- (i) $\Phi \in \Delta_3$,
- (ii) bir $k_1 > 0$ ve $x_1 \geq 0$ sayıları vardır öyle ki $x \geq x_1$ için, $x\varphi(x) \leq \varphi(k_1x)$,
- (iii) bir $k_2 > 0$ ve $y_1 > 0$ sayıları vardır öyle ki $y \geq y_1$ için, $\psi(y\psi(y)) \leq k_2\psi(y)$,
- (iv) $\Psi \in \nabla_3$,
- (v) bir $k > 0$ ve $y_0 \geq 0$ sayıları vardır öyle ki $y \geq y_0$ için $\Psi(y) \leq ky\Phi^{-1}(y)$,
- (vi) bir $c > 0$ ve $x \geq \tilde{x} \geq 0$ için $\Psi(\Phi(x)) \leq \Phi(cx)$ olur. Yani, $\Psi \circ \Phi < \Phi$.

Burada, φ, ψ fonksiyonları, sırasıyla Φ, Ψ N fonksiyonlarının sağ türevidir.

İspat. Kabul edelim ki $\Phi \in \Delta_3$ olsun. Bu durumda, her $x \geq x_0 \geq 0$ için, bir $b > 0$ sayısı vardır öyle ki $x\Phi(x) \leq \Phi(bx)$ olur. Öte yandan, Önerme 3.3.7 kullanılırsa,

$$x\varphi(x) \leq \Phi(2x) \leq \frac{1}{2x}\Phi(2bx) \leq \frac{1}{2x}2bx\varphi(2bx) = 2b\varphi(2bx) \quad (3.55)$$

bulunur. Bu ifade, her $x \geq x_0$ için doğru olduğundan $x \geq \frac{x_0}{2b}$ için de doğru olacaktır. Böylece, (3.55) eşitsizliğinde, x yerine $2bx$ yazılırsa, $x \geq \frac{x_0}{2b}$ için

$$2bx\varphi(2bx) \leq 2b\varphi(2b2bx) = 2b\varphi(4b^2x)$$

olur. Burada, $k_1 = 4b^2$ ve $x_1 = \max\{\frac{x_0}{2b}, 2b\}$ seçilirse, $x \geq x_1$ için

$$x\varphi(x) \leq 2b\varphi(2bx) \leq x\varphi(2bx) \leq \varphi(4b^2x) = \varphi(k_1x)$$

bulunur. Böylece, (i) $\Rightarrow$ (ii) elde edilir.

Kabul edelim ki, bir $k_1 > 0$ ve bir $x_1 \geq 0$ sayıları, her $x \geq x_1$ için $x\varphi(x) \leq \varphi(k_1x)$ olacak şekilde var olsun. Buradan, φ artan bir fonksiyon olduğundan $k_1 \geq 1$ alalım.

Eğer $\psi(y_1) \geq \max\{x_1, 2\}$ ise $y_1 \geq 0$ alabiliriz. Öte yandan, $k_2 = k_1^2$ denirse, (ii)'den $y \geq y_1$ ve $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\varphi(k_2\psi(y))$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \psi(y\psi(y)) &\leq \psi(\varphi(\psi(y))\psi(y)) \leq \psi(\varphi(k_1\psi(y))) \leq \psi\left(\frac{1}{k_1\psi(y)}\varphi(k_1^2\psi(y))\right) \\ &\leq \psi\left(\frac{1}{2}\varphi(k_2\psi(y))\right) \leq \psi(\varphi(k_2\psi(y) - \varepsilon)) \leq \psi(\varphi(k_2\psi(y))) = k_2\psi(y) \end{aligned}$$

olur. Böylece, (ii) $\Rightarrow$ (iii) elde edilir.

Şimdi, kabul edelim ki, bir $k_2 > 0$ ve bir $y_0 \geq 0$ sayıları, her $y \geq y_1$ için $\psi(y\psi(y)) \leq k_2\psi(y)$ olacak şekilde var olsun. Bu durumda, $\psi(\frac{w_0}{2}) \geq 2$ olacak şekilde bir $w_0 \geq 2y_1$ sayısını alalım ve $k = 4k_2^3$ olsun. Böylece, $w \geq w_0$ için, Önerme 3.3.7 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} w\Psi(\Psi(w)) &\leq \Psi(w\psi(w)) \leq w^2\psi(w)\psi(w\psi(w)) \leq w^2k_2\psi^2(w) \\ &\leq 4k_2\left(\frac{w}{2}\right)^2\psi^2\left(\frac{w}{2}\psi\left(\frac{w}{2}\right)\right) \leq 4k_2^3\left(\frac{w}{2}\right)^2\psi^2\left(\frac{w}{2}\right) \leq k\Psi^2(w) \end{aligned}$$

olur. Böylece, $y = \Psi(w)$ ve $y_0 = \Psi(w_0)$ alınırsa, her $y \geq y_0$ için, $\Psi^{-1}(y)\Psi(y) \leq ky^2$ olur. Böylece, (iii) $\Rightarrow$ (iv) elde edilir.

Kabul edelim ki $\Psi \in \nabla_3$ olsun. Yani, her $y \geq y_0 \geq 0$ için bir $k > 0$ sayısı vardır öyle ki $\Psi^{-1}(y)\Psi(y) \leq ky^2$ olur. O halde, Önerme 3.3.5 gereği $y \geq y_0$ için

$$\Psi(y) \leq \frac{ky^2}{\Psi^{-1}(y)} \leq ky\Phi^{-1}(y)$$

olur. Böylece, (iv) $\Rightarrow$ (v) elde edilir.

Kabul edelim ki (v) geçerli olsun ve $c = 2k$ ve $\tilde{x} = \Phi^{-1}(y_0)$ alalım. Bu durumda, Young eşitsizliği kullanılırsa, $x \geq \tilde{x} \geq 0$ için,

$$\Psi(\Phi(x)) \leq 2\Psi(\Phi(x)) \leq 2k\Phi(x)\Phi^{-1}(\Phi(x)) = 2kx\Phi(x) \leq \Phi(2kx) + \Psi(\Phi(x))$$

bulunur. Böylece, $x \geq \tilde{x}$ için $(\Psi \circ \Phi)(x) \leq \Phi(cx)$ olur. O halde, (vi) elde edilir.

Şimdi, (vi) doğru olsun. Bu durumda, $c \geq 1$ alınırsa, Young eşitsizliğinden,

$$x\Phi(x) \leq \Phi(x) + \Psi(\Phi(x)) \leq \Phi(x) + \Phi(cx) = \Phi(cx) + \Phi(cx) = 2\Phi(cx) \leq \Phi(2cx)$$

bulunur. Eğer $b_1 = 2cx$ seçilirse, (i) elde edilir. Bu ise, (vi) $\Rightarrow$ (i) olmasıdır. $\square$

Sonuç 3.6.5. Φ bir N fonksiyonu olsun. Eğer $\Phi \in \nabla_3$ ise $\Phi \in \Delta_2$ olur.

İspat. Kabul edelim ki $\Phi \in \nabla_3$ olsun. Bu durumda, Ψ, Φ fonksiyonunun tamlayan Young

çifti olmak üzere, Teorem 3.6.4 (iv) ifadesinden $\Psi \in \Delta_3$ olur.

Öte yandan, $\Psi \in \Delta_3$ ise $\Psi \in \nabla_2$ olur. Böylece, Teorem 3.5.6 gereği $\Phi \in \Delta_2$ elde edilir. $\square$

Tanım 3.6.6. Φ bir N fonksiyonu olsun. Eğer $\Phi \sim \Phi^2$ ise, yani bir $b > 0$ ve bir $x_0 \geq 0$ sayıları her $x \geq x_0$ için

$$\Phi^2(x) \leq \Phi(bx) \quad (3.56)$$

olacak şekilde varsa, Φ fonksiyonu Δ^2 koşulunu sağlar denir ve $\Phi \in \Delta^2$ ile gösterilir.

Örnek 3.6.7. $\delta \geq 1$ olmak üzere,

$$\Phi(x) = e^{|x|^\delta} - 1 \quad (3.57)$$

şeklinde alınan N fonksiyonu Δ^2 koşulunu sağlar. Gerçekten, her $x \geq 0$ için,

$$\Phi^2(x) = e^{2|x|^\delta} - 2|x|^\delta + 1 \leq e^{2|x|^\delta} - 1 = \Phi(\sqrt[2]{2}x)$$

bulunur. Burada, $b = \sqrt[2]{2}$ seçilirse, $\Phi \in \Delta^2$ olur.

Öte yandan, (3.57) ile verilen Φ fonksiyonu, Δ_3 koşulunu sağlar. Bunun için, her $x \geq x_0 \geq 0$ için $x\Phi(x) \leq \Phi(b_1x)$ olacak şekilde bir $b_1 > 0$ sayısının var olduğunu gösterelim. Burada, $\Phi \in \Delta^2$ olduğundan, öyle bir $b > 1$ ve $x \geq x_0 \geq 0$ sayıları vardır. Böylece $\Phi^2(x) \leq \Phi(bx)$ sağlanır. O halde, her $x > x_1$ için $\Phi(x) > x$ alınırsa, $x \geq \max\{x_0, x_1\}$ için,

$$x\Phi(x) \leq \Phi^2(x) \leq \Phi(bx)$$

bulunur. Böylece, $\Phi \in \Delta_3$ elde edilir.

Uyarı 3.6.8. Bir N fonksiyonu Δ_3 koşulunu sağlıyorsa, Δ^2 koşulunu sağlamak zorunda değildir. Bu, ileride gösterilecektir.

Önerme 3.6.9. Eğer bir Φ N fonksiyonu, Δ^2 koşulunu sağlıyorsa, bir $a > 0$ ve bir $x_1 \geq 0$ sayıları, $x \geq x_1$ için $\Phi(x) \geq e^{x^a}$ olacak şekilde vardır.

İspat. Kabul edelim ki $\Phi \in \Delta^2$ olsun. O halde, bir $b > 0$ ve bir $x_0 \geq 0$ sayıları vardır öyle ki her $x \geq x_0$ için $\Phi^2(x) \leq \Phi(bx)$ olur. Yine, Φ fonksiyonunun dışbükey olduğu kullanılırsa, $b \geq 2$ ve $x_0 \geq 1$ için

$$2 \ln \Phi(x) = \ln \Phi^2(x) \leq \ln \Phi(bx) \quad (3.58)$$

olur. Öte yandan, her $x \geq x_0$ için, bir $n \geq 1$ tam sayısı vardır ki

$$b^n x_0 \leq x < b^{n+1} x_0 \quad (3.59)$$

olur. Böylece, (3.58) ve (3.59) eşitsizliklerinden

$$\ln \Phi(x) \geq \ln \Phi(b^n x_0) \geq 2^n \ln \Phi(x_0) \geq \left(\frac{x}{bx_0} \right)^{\log_b^2} \ln \Phi(x_0) = \frac{\ln \Phi(x_0)}{(bx_0)^{\log_b^2}} x^{\log_b^2} \quad (3.60)$$

elde edilir. Yine, $0 < \alpha < \log_b^2$ ve $x_1 \geq x_0$ olmak üzere, $x \geq x_1$ için

$$x^{\log_b^2 - \alpha} \geq \frac{(bx_0)^{\log_b^2}}{\ln \Phi(x_0)} \quad (3.61)$$

olur. Böylece, (3.60) ve (3.61) eşitsizliklerinden

$$\ln \Phi(x) \geq \frac{\ln \Phi(x_0)}{(bx_0)^{\log_b^2}} x^{\log_b^2} \geq x^\alpha$$

bulunur. Bu ise, $\Phi(x) \geq e^{x^\alpha}$ olmasıdır. $\square$

Şimdi, Δ^2 koşulunun tersi olarak ifade edebileceğimiz ∇^2 koşulunun tanımını verelim.

Tanım 3.6.10. Φ bir N fonksiyonu olsun. Eğer bir $c > 0$ ve bir $x_0 \geq 0$ sayıları, her $x > x_0$ için

$$\frac{\Phi(x)}{x} \leq c \frac{\Phi(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \quad (3.62)$$

sağlayacak şekilde varsa, Φ fonksiyonu ∇^2 koşulunu sağlar denir ve $\Phi \in \nabla^2$ ile gösterilir.

Uyarı 3.6.11. Tanım 3.6.6 ve Tanım 3.6.10 gereği, bir N fonksiyonunun bu koşulları sağlaması gerekmediği gözlemlenebilir. Aşağıda Δ^2 ile ∇^2 koşullarının karakterizasyonu verilmiştir.

Teorem 3.6.12. (Φ, Ψ) tamlayan N fonksiyon çifti olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) $\Phi \in \Delta^2$,
- (ii) bir $k_1 > 0$ ve bir $x_1 > 0$ sayıları, her $x \geq x_1$ için $\varphi^2(x) \leq \varphi(k_1 x)$ olacak şekilde vardır,
- (iii) bir $k_2 > 0$ ve bir $y_1 > 0$ sayıları, her $y \geq y_1$ için $\psi(y^2) \leq k_2 \psi(y)$ olacak şekilde vardır,
- (iv) $\Psi \in \nabla^2$.

İspat. Kabul edelim ki, $\Phi \in \Delta^2$ olsun. Bu durumda, Önerme 3.6.9 ifadesinden $\Phi \in \Delta_3$ olur. Öte yandan, Teorem 3.6.4 gereği, bir $b > 1$ ve $x_0 \geq 1$ sayıları vardır öyle ki her $x \geq x_0$ için

$$x\varphi(x) \leq \varphi(bx) \text{ ve } \Phi^2(x) \leq \Phi(bx) \quad (3.63)$$

sağlanır. Öte yandan, $x \geq 0$ için, $x\varphi(x) \leq \Phi(2x)$ eşitsizliği kullanılır ve $k_1 = 2b^2$ alınırsa, $x > x_0 \geq 1$ için, (3.63) eşitsizliğinden,

$$\varphi^2(x) \leq \frac{1}{x^2} \Phi^2(2x) \leq \frac{1}{x^2} \Phi(2bx) \leq \frac{1}{x^2} 2bx\varphi(2bx) \leq 2bx\varphi(2bx) \leq \varphi(2b^2x) = \varphi(k_1x)$$

bulunur. Böylece (i) $\Rightarrow$ (ii) elde edilir.

Kabul edelim ki (ii) sağlansın. Buradan, bir $k_1 > 0$ ve $x_1 \geq 0$ sayıları, her $x \geq x_1$ için $\varphi^2(x) \leq \varphi(k_1x)$ sağlayacak şekilde vardır. Öte yandan, $y = \varphi(x)$ ve $k_2 = 4k_1$ alınırsa, her $y \geq y_1 = \varphi(x_1)$ için

$$\psi(y^2) = \psi(\varphi^2(x)) \leq \psi(\varphi(k_1x)) = k_1x \leq 2k_1x \leq 4k_1\psi(y) = k_2\psi(y)$$

bulunur. Böylece (ii) $\Rightarrow$ (iii) elde edilir.

Kabul edelim ki (iii) sağlansın. O halde, $y \geq y_0 = \max\{2y_1, 4\}$ için

$$\psi(y) = \psi\left(2\frac{y}{2}\right) \leq \psi\left(\left(\frac{y}{2}\right)^2\right) \leq k_2\psi\left(\frac{y}{2}\right) \quad (3.64)$$

olur. Eğer $c = 2k_2^2$ alınırsa, her $y \geq y_0$ için

$$\Psi(y^2) \leq y^2\psi(y^2) \leq k_2y^2\psi(y) \leq 2k_2^2y\frac{y}{2}\psi\left(\frac{y}{2}\right) \leq cy\Psi(y)$$

bulunur. Böylece, (iii) $\Rightarrow$ (iv) elde edilir.

Şimdi (iv)'yi, yani $\Psi \in \nabla^2$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, bir $c > 0$ ve bir $x_0 \geq 0$ sayıları, her $x > x_0$ için $\frac{\Psi(x)}{x} \leq c \frac{\Psi(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ olacak şekilde vardır. Öte yandan, Ψ bir N fonksiyonu olduğundan,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\Psi(y)}{y} = 0 \text{ ve } \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\Psi(y)}{y} = +\infty \quad (3.65)$$

geçerlidir. Eğer $\xi(y) = \frac{\Psi(y)}{y}$ tanımlanırsa, $\Psi_1(y) = \int_0^{|y|} \xi(t)dt$ bir N fonksiyonu olur. Gerçekten de, Ψ_1 fonksiyonu dışbükey olup $\Psi_1(0) = 0$ ve $\Psi_1(-y) = \Psi(y)$ olduğunu görmek kolaydır. Yine, (3.65) kullanılırsa,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\Psi_1(y)}{y} = 0 \text{ ve } \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\Psi_1(y)}{y} = +\infty$$

kolayca bulunur. Ayrıca,

$$\Psi_1(y) = \int_0^{|y|} \xi(t)dt \leq y\xi(y) = y\frac{\Psi(y)}{y} = \Psi(y) \quad (3.66)$$

ve

$$\Psi_1(2y) \geq \frac{2y}{y}\xi(y) = \Psi(y) \quad (3.67)$$

olduğundan, $\Psi \sim \Psi_1$ olur. O halde, $y \geq y_0$ için, $\Psi \in \nabla^2$, (3.66) ve (3.67) kullanılırsa,

$$\frac{\Psi_1(y)}{y} \leq \frac{\Psi(y)}{y} \leq \frac{b\Psi(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} \leq \frac{b\Psi(2\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} \quad (3.68)$$

bulunur. Eğer $x_0 = \max\{y, 2\sqrt{y}\}$ alınırsa, $\Psi_1 \in \nabla^2$ olur. Böylece, Önerme 3.3.7 ve (3.68) kullanılırsa,

$$\xi(y) = \frac{\Psi_1(y)}{y} \leq \frac{b\Psi(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} = b\xi(\sqrt{y})$$

olur. Buradan, $y = \xi^{-1}(w)$ olmak üzere, $\frac{w}{b} \leq \xi(\sqrt{\xi^{-1}(w)})$ ve $\xi^{-1}(\frac{w}{b}) \leq \sqrt{\xi^{-1}(w)}$ elde edilir.

O halde, $\varphi_1(x) = \xi^{-1}(x)$ denirse, $x \geq x_0$ için

$$\varphi_1^2(x) \leq \varphi_1(bx) \quad (3.69)$$

elde edilir.

Öte yandan, Önerme 3.6.9 ve (3.60) kullanılırsa, bir $\alpha > 0$ ve $x \geq x_1 \geq 0$ için, $\varphi_1(x) > e^{x^\alpha}$ olur. O halde, bir $x_2 > 0$ vardır ki $x \geq x_2$ için $\varphi_1(x) \geq x$ olur. Eğer $x_2 = \max\{x_0, x_1\}$ olarak seçilirse, φ 'ye karşılık gelen N fonksiyonu Φ_1 olmak üzere, (3.69) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \Phi_1^2(x) &\leq x^2 \varphi_1^2(x) \leq x^2 \varphi_1(bx) \leq x \varphi_1(x) \varphi_1(bx) \leq x \varphi_1(bx) \varphi_1(bx) = x \varphi_1^2(bx) \\ &\leq x \varphi_1(k^2x) \leq k^2 x \varphi_1(k^2x) \leq \Phi_1(2k^2x) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise, $\Phi_1 \in \Delta^2$ olmasıdır. Böylece, $\Phi_1 \sim \Phi$ olduğundan $\Phi \in \Delta^2$ bulunur. O halde (iv) $\Rightarrow$ (i) elde edilir. $\square$

Sonuç 3.6.13. Φ bir N fonksiyonu olsun. Eğer $\Phi \in \nabla^2$ ise $\Phi \in \nabla_3$ olur.

Önerme 3.6.14. Φ bir N fonksiyonu olsun. Eğer $\Phi \in \Delta^2$ ise $\Phi \in \nabla'$ olur.

İspat. Kabul edelim ki $\Phi \in \Delta^2$ olsun. Böylece, bir $b > 0$ ve $x_0 \geq 1$ sayıları vardır ki her $x \geq x_0$ için $\Phi^2(x) \leq \Phi(bx)$ olur. Öte yandan, Φ monoton olduğundan, her $x \geq y \geq x_0 \geq 1$ için,

$$\Phi(x)\Phi(y) \leq \Phi(x)\Phi(x) = \Phi^2(x) \leq \Phi(bx) \leq \Phi(bxy)$$

olur. Benzer şekilde, Φ 'nin monotonluğundan $y \geq x \geq x_0 \geq 1$ için

$$\Phi(x)\Phi(y) \leq \Phi(y)\Phi(y) = \Phi^2(y) \leq \Phi(by) \leq \Phi(bxy)$$

bulunur. Böylece, her $x, y \geq x_0$ için $\Phi(x)\Phi(y) \leq \Phi(bxy)$ elde edilir. Bu ise, $\Phi \in \nabla'$ olmasıdır. $\square$

Uyarı 3.6.15. Şimdiye kadar yapılan koşulları aşağıdaki gibi diyagramla kısaca ifade edebiliriz.

$$\begin{array}{ccc} \Delta^2 \implies \Delta_3 & & \nabla^2 \implies \nabla_3 \\ \Downarrow & \text{ve} & \Downarrow \\ \nabla' \implies \nabla_2 & & \Delta' \implies \Delta_2 \end{array}$$

Öte yandan Δ_3 ile ∇' veya ∇_3 ile Δ' arasında bir karşılaştırma yoktur. Yine, bu gerektirmelerin tersi mevcut değildir. Ters örnekleri 1960 yılında Ando tarafından verilmiştir.

4. ORLICZ FONKSİYON UZAYLARI

Orlicz uzayları W. Orlicz (1903-1990, Polonyalı matematikçi) tarafından 1932 yılında, L^p ($1 < p < \infty$) Lebesgue uzaylarının genellemesi olarak verilmiştir [26]. Bu genellemede L^p uzayları tanımındaki x^p fonksiyonu yerine N fonksiyonu olarak adlandırılan daha genel bir dışbükey Φ fonksiyonu alınmış ve bu uzay üzerinde bir norm tanımlanmıştır. Orlicz uzaylarına ilişkin ayrıntılı ilk çalışma ise 1961 yılında M. A. Krasnosel'skii ve Ya. B. Rutickii tarafından yapılmış ve Φ fonksiyonu N fonksiyonu olarak alınmıştır [24]. Bununla birlikte bazı kaynaklarda N fonksiyonu Young fonksiyon olarak adlandırılmaktadır [25]. Öte yandan, Orlicz uzaylarına ilişkin uygulamaları da kapsayan daha geniş çalışmalar 1991 ve 2002 yıllarında M. Rao ve Z. D. Ren tarafından verilmiştir [38, 39].

Bu bölümde, Orlicz uzayları ve temel özellikleri verilecektir. Bu kısım boyunca Young fonksiyonu ve keyfi ölçü uzayı alınacaktır. Orlicz uzayları üzerinde birbirine denk olan Orlicz ve Gauge (Luxemburg) normunun varlığı ve Orlicz uzayının bu normlara göre bir Banach uzayı olduğu gösterilecektir. Burada [38] kitabı temel alınmıştır. Orlicz uzayı ile ilgili ayrıntılı çalışmalar Bölüm 5'de verilecektir.

4.1 ÖLÇÜ UZAYLARINDA ORLICZ SINIFLARI

Öncelikle keyfi ölçü uzaylarında Orlicz uzaylarının yapısını kurarak başlayalım. Böylece bu fonksiyon uzaylarının genel teorisindeki bazı kısıtlamalar kaldırılacaktır. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ bir Young fonksiyonu olsun.

Tanım 4.1.1. $\tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ ölçülebilir ve $\int_X \Phi(|f|)d\mu < +\infty$ koşulunu sağlayan tüm fonksiyonların kümesi olsun. Diğer bir ifadeyle

$$\tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f, \mathcal{A} \text{ ölçülebilir fonksiyon ve } \int_X \Phi(|f|)d\mu < +\infty\}$$

olsun.

Uyarı 4.1.2. $\tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ kümesinde sadece reel fonksiyonları göz önüne alacağız, ancak kompleks değerli fonksiyonlara da doğal olarak genişletilebilir. Kompleks değerli fonksiyonlarla çalışacağımız zaman bu ayrıca belirtilecektir. Ayrıca, kitabın geri kalan kısmında tekrardan kaçınmak için μ ölçüsünün sonlu alt küme özelliğini sağladığını kabul edelim. Yani, $E \in \mathcal{A}$ için $\mu(E) > 0$ iken bir $F \in \mathcal{A}$ kümesi $F \subseteq E$, $0 < \mu(F) < \infty$ olacak şekilde vardır. Bu, $A = \emptyset$ için $\mu(A) = 0$ ve $A \neq \emptyset$ için $\mu(A) = +\infty$ durumlarını ortadan kaldırır. Aksi takdirde teoremin genelliği bozulmaz.

Uyarı 4.1.3. $\tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ 'de bir μ ölçüsü için $\mu(X) = +\infty$ iken evrensel olarak $\Phi \in \Delta$ sağlanıyorsa ve $\mu(X) < \infty$ iken yerel olarak $\Phi \in \Delta$ sağlanıyorsa bu durumda Δ (veya ∇) koşulu regülerdir diyeceğiz. Bundan sonra tekrar etmeksizin μ böyle alınacaktır.

Şimdi $\tilde{\mathcal{L}}^\Phi$ kümesinin yapısını verelim. Aşağıdaki teorem $\tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ kümesinin genel olarak bir vektör uzayı olmadığını ifade eder.

Teorem 4.1.4. Φ bir Young fonksiyonu olsun. Aşağıdakiler gerçekleşir.

- (i) $\tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ uzayı mutlak dışbükeydir. Diğer bir ifadeyle, $f, g \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ ve $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ koşulunu sağlayan α, β skalerleri için $\alpha f + \beta g \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ olur. Ayrıca, $h \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ ve f ölçülebilir fonksiyonu için $|f| \leq |h|$ ise $f \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ olur.
- (ii) Eğer $\mu(X) = +\infty$ için evrensel olarak $\Phi \in \Delta_2$ ve $\mu(X) < \infty$ için yerel olarak $\Phi \in \Delta_2$ ise $\tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ vektör uzayıdır. Tersine eğer μ , pozitif ölçüye sahip bir küme üzerinde atomsız ise Δ_2 koşulu (evrensel ve yerel olarak) gereklidir.

İspat. (i) $f, g \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ olsun. O halde,

$$\int_X \Phi(|f|) d\mu < +\infty \quad \text{ve} \quad \int_X \Phi(|g|) d\mu < +\infty$$

olur. Böylece Φ artan ve dışbükey olduğundan, $0 < \gamma = |\alpha| + |\beta| \leq 1$ için

$$\begin{aligned} \Phi(|\alpha f + \beta g|) &\leq \Phi(|\alpha||f| + |\beta||g|) = \Phi\left(\gamma \frac{|\alpha|}{\gamma}|f| + \gamma \frac{|\beta|}{\gamma}|g|\right) \\ &\leq \gamma \Phi\left(\frac{|\alpha|}{\gamma}|f| + \frac{|\beta|}{\gamma}|g|\right) \leq |\alpha|\Phi(|f|) + |\beta|\Phi(|g|) \end{aligned} \quad (4.1)$$

olur. Ayrıca, eşitsizliğin sağ tarafı integrallebilir olduğundan,

$$\int_X \Phi(|\alpha f + \beta g|) d\mu \leq |\alpha| \int_X \Phi(|f|) d\mu + |\beta| \int_X \Phi(|g|) d\mu < +\infty$$

sağlanır. Böylece $\alpha f + \beta g \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ olur.

Yine, $h \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ ise $\int_X \Phi(|h|) d\mu < +\infty$ geçerlidir. Kabul gereği $|f| \leq |h|$ ve Φ fonksiyonunun artanlığı kullanılırsa,

$$\int_X \Phi(|f|) d\mu \leq \int_X \Phi(|h|) d\mu < +\infty$$

elde edilir. O halde $f \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ bulunur.

(ii) $\tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ vektör uzayı olduğunu göstermek için her bir $f \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ için $2f \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Çünkü o zaman, her $n \in \mathbb{Z}$ için $nf \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ ve böylece (i)'den her $\alpha > 0$ için $\alpha f \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ olur. Buradan, $i = 1, 2$ olmak üzere her $f_i \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ için $\gamma = |\alpha| + |\beta| > 0$ iken $\alpha f_1 + \beta f_2 = \gamma \left(\frac{\alpha}{\gamma} f_1 + \frac{\beta}{\gamma} f_2 \right) \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ olur. Bu nedenle, sadece $f \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ için $2f \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Eğer $\Phi \in \Delta_2$ regüler ise

$\mu(X) = +\infty$ durumunda $k > 0$ olmak üzere $\Phi(2|f|) \leq k\Phi(|f|)$ olur. Böylece

$$\int_X \Phi(2|f|)d\mu \leq k \int_X \Phi(|f|)d\mu < +\infty$$

olduğundan $2f \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ bulunur. Öte yandan, $\mu(X) < +\infty$ durumunda ise her $x \geq x_0 \geq 0$ için $\Phi(2x) \leq k\Phi(x)$ olur. Şimdi

$$f_1 = \begin{cases} f, & |f| \leq x_0, \\ 0, & |f| > x_0 \end{cases}$$

ve $f_2 = f - f_1$ olsun. Böylece,

$$\Phi(2|f|) = \Phi(2|f_1|) + \Phi(2|f_2|) \leq \Phi(2|f_1|) + K\Phi(|f_2|)$$

olur. O halde $f \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ ve $\mu(X) < \infty$ olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \int_X \Phi(2|f|)d\mu &\leq \int_X \Phi(2|f_1|)d\mu + K \int_X \Phi(|f_2|)d\mu \leq \int_X \Phi(2x_0)d\mu + K \int_X \Phi(|f_2|)d\mu \\ &= \Phi(2x_0)\mu(X) + K \int_X \Phi(|f_2|)d\mu \leq \Phi(2x_0)\mu(X) + K \int_X \Phi(|f|)d\mu < +\infty \end{aligned}$$

eşitsizliğinden $2f \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ elde edilir. Bu ise istenendir.

Tersine, kabul edelim ki $\tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ vektör uzayı olsun. $E \in \mathcal{A}$ pozitif ölçüye sahip bir küme olsun. Kabul edelim ki, μ atomsuz olsun ve Φ, Δ_2 regüler olmasın. Bu durumda, $f \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ koşulunu sağlayan bir f fonksiyonu kurup $2f \notin \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ çelişkisi elde edeceğiz.

Eğer $0 < \alpha < \mu(E) \leq \infty$ ise μ atomsuz olduğundan $F \subseteq E$ olacak şekilde bir $F \in \mathcal{A}$ vardır öyle ki $\mu(F) = \alpha < \infty$ olur. Böylece F kümesi aracılığıyla aranan f fonksiyonunu kuracağız. Öte yandan, $\Phi \notin \Delta_2$ olduğundan $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \geq n$ dizisi vardır öyle ki $\Phi(2x_n) > n\Phi(x_n)$ sağlanır.

Her $n \geq n_0$ için

$$\Phi(x_n) \geq 1 \text{ ve } \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{n^2} < \alpha$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{Z}$ alalım. Yine, μ atomsuz olduğundan $\mu(F_0) = \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{n^2} < \alpha$ olacak şekilde $F_0 \subseteq F$ koşulunu sağlayan bir $F_0 \in \mathcal{A}$ vardır. Benzer şekilde, $D_1 \subseteq F_0$ olacak şekilde bir $D_1 \in \mathcal{A}$ bulabiliriz ve $\mu(D_1) = n_0^{-2}$ elde edilir. Atomsuzluğun tanımından $\mu(F_0 \setminus D_1) > 0$ sağlanır. Bu işlemi tekrar uygularsak, $\mu(D_2) = (n_0 + 1)^{-2}$ olacak şekilde $D_2 \subseteq F_0 \setminus D_1$ koşulunu sağlayan bir $D_2 \in \mathcal{A}$ bulabiliriz. Bu metodu uygulayarak, $n \geq 1$ için $\mu(D_n) = (n_0 + n - 1)^{-2}$ olacak şekilde ayrık $D_n \in \mathcal{A}$ kümeleri bulunabilir. Şimdi $F_k \subseteq D_k$, $F_k \in \mathcal{A}$ kümeleri $\mu(F_k) = \frac{\mu(D_k)}{\Phi(x_n)}$ olsun. Ayrıca, f fonksiyonunu $f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{F_n}$

olarak alalım. O halde f fonksiyonu ölçülebilirdir ve

$$\begin{aligned}\int_X \Phi(f) d\mu &= \int_X \Phi\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{F_n}\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(x_n) \mu(F_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(x_n) \frac{\mu(D_k)}{\Phi(x_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_k) = \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{n^2} < +\infty\end{aligned}$$

olduğundan $f \in \tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$ olur. Öte yandan,

$$\begin{aligned}\int_X \Phi(2f) d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(2x_n) \mu(F_n) \geq \sum_{n \geq n_0} n \Phi(x_n) \mu(F_n) \\ &= \sum_{n \geq n_0} n \Phi(x_n) \frac{\mu(D_k)}{\Phi(x_n)} = \sum_{n \geq n_0} n \mu(D_k) = \sum_{n \geq n_0} n \frac{1}{n^2} = \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{n} = +\infty\end{aligned}$$

olduğundan $2f \notin \tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$ olur. Bu ise vektör uzayı olması ile çelişir. O halde, $\Phi \in \Delta_2$ koşulu sağlanır. $\square$

Uyarı 4.1.5. Teorem 4.1.4'te (i) koşulu gereği $\tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$ uzayı mutlak dışbükey ve katı uzaydır. Diğer bir ifadeyle $f \in \tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$ ise mutlak değeri 1 olan herhangi bir h fonksiyonu için $hf \in \tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$ sağlanır.

O halde aşağıdaki sonucu verelim.

Sonuç 4.1.6. $\tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$ skaler değerli fonksiyonların mutlak dışbükey ve katı bir sınıfıdır ve vektör uzayı olması için gerek ve yeter koşul pozitif sayılarla çarpımının kapalı olmasıdır.

Uyarı 4.1.7. Teorem 4.1.4'te (ii)'nin gerekliliği için μ ölçüsünün pozitif ölçüye sahip bir küme üzerinde atomsuz olması koşulu önemlidir. Aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 4.1.8. $X = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ ve μ sayma ölçüsü olsun. O halde $\Phi(x) = e^{x^2} - 1$ fonksiyonu bir N fonksiyonudur. Öte yandan, Φ 'nin Δ_2 koşulunu sağlamadığını göstermek kolaydır.

$\tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$ bir vektör uzaydır. Öncelikle, $f \in \tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$ olduğunu gösterelim. Yine, μ sayma ölçüsü olduğundan,

$$\int_X \Phi(f) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(f(n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{|f(n)|^2} - 1 \right) < +\infty$$

olduğundan $f \in \tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$ bulunur. Öte yandan, $\int_X \Phi(2f) d\mu < +\infty$ olduğu da benzer şekilde gösterilir. Böylece $\tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$ bir vektör uzayıdır. $\square$

Tanım 4.1.9. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçülebilir uzay ve $\tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$ Tanım 4.1.1'de verilen fonksiyonların kümesi olsun. Bir $\alpha > 0$ için $\alpha f \in \tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$ koşulunu sağlayan ölçülebilir $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$

fonksiyonlarının uzayı Orlicz uzayı olarak adlandırılır ve $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$ ile gösterilir. Böylece aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\mathcal{L}^\Phi(\mu) = \left\{ f : X \rightarrow [-\infty, +\infty] \text{ ölçülebilir} : \int_X \Phi(\alpha f) d\mu < +\infty, \exists \alpha > 0 \right\}. \quad (4.2)$$

Aşağıdaki önemli önermeyi verelim.

Önerme 4.1.10. $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$ bir vektör uzayıdır. Üstelik, her $f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ için bir $\alpha > 0$ sayısı vardır ve $\alpha f \in B_\Phi$ olur. Burada B_Φ ,

$$B_\Phi = \left\{ g \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu) : \int_X \Phi(g) d\mu \leq 1 \right\} \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanan mutlak dışbükey ve katı bir kümedir.

İspat. Kabul edelim ki $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ olsun. O halde, tanımdan $i = 1, 2$ için $\alpha_i f_i \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ olacak şekilde $\alpha_i > 0$ vardır. Yine, $\alpha = \min \{\alpha_1, \alpha_2\}$ denirse $\alpha > 0$ olur. Ayrıca, Φ fonksiyonunun artanlığı ile dışbükeyliği kullanılırsa,

$$\int_X \Phi\left(\frac{\alpha}{2}(f_1 + f_2)\right) d\mu \leq \frac{1}{2} \left(\int_X \Phi(\alpha f_1) d\mu + \int_X \Phi(\alpha f_2) d\mu \right) < +\infty$$

bulunur. Böylece $\frac{\alpha}{2} > 0$ olduğu için, (4.2) dolayısıyla $f_1 + f_2 \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ olur. Özel olarak, her $f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ için $2f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ olur. Dolayısıyla, tümevarım metodu kullanılırsa her $n \in \mathbb{N}$ için $nf \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ olur. Böylece herhangi bir $\beta \in \mathbb{R}$ için $\beta f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ bulunur. O halde $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$ bir vektör uzayıdır. Diğer yandan $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$ vektör uzayı olduğundan mutlak dışbükey ve katı bir kümedir. Ayrıca, B_Φ kümesi de bu özelliğe sahiptir.

Son olarak (4.3) ifadesinin gerçekleştiğini gösterelim. Bir $\alpha > 0$ için $\alpha f \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ olacak şekilde bir $f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ alalım. Keyfi bir $a_n \searrow 0$ dizisi alalım ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n = \min\{\alpha, a_n\}$ olsun. Böylece, $\alpha_n \searrow 0$ ve $\Phi(\alpha_n f) \leq \Phi(\alpha f)$ olur. Eğer Φ sürekli bir Young fonksiyonu ise $\Phi(\alpha_n f) \rightarrow 0$ olur. Baskın Yakınsaklık Teoremi gereği $\int_X \Phi(\alpha_n f) d\mu \rightarrow 0$ olur, öyle ki bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için $\int_X \Phi(\alpha_{n_0} f) d\mu \leq 1$ bulunur. Böylece, $\alpha_{n_0} f \in B_\Phi$ olur. Eğer $x > x_0 > 0$ için $\Phi(x) = +\infty$ ise her $f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ sınırlıdır ve dolayısıyla yine istenen elde edilir.

Şimdi Orlicz uzayı teorisi için önemli rol oynayan, klasik $L^1(\mu)$ ve $L^\infty(\mu)$ Lebesgue uzaylarına ilişkin iki özellik verilecektir.

Önerme 4.1.11. (a) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir sonlu ölçü uzayı olsun. O halde,

$$(i) \quad \mathcal{L}^1(\mu) = \bigcup \{ \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu) : \Phi \text{ tüm } N \text{ fonksiyonları} \},$$

$$(ii) \quad \mathcal{L}^\infty(\mu) = \bigcap \{ \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu) : \Phi \text{ tüm } N \text{ fonksiyonları} \}.$$

(b) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ herhangi bir ölçü uzayı ve (Φ, Ψ) tamlayan N fonksiyon çifti olsun. O halde, $\mathcal{L}^1(\mu) = \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)\tilde{\mathcal{L}}^\Psi(\mu)$ olur. Burada, $\tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)\tilde{\mathcal{L}}^\Psi(\mu) = \{fg : f \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu), g \in \tilde{\mathcal{L}}^\Psi(\mu)\}$ şeklindedir.

İspat. (a) (i) Sonuç 3.1.3'te verilmişti.

(ii) Keyfi bir $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ alalım. $\mu(X_0) = 0$ olmak üzere her $\omega \in X \setminus X_0$ için, $|f(\omega)| \leq k < \infty$ sağlanır öyle ki herhangi N fonksiyonu Φ için

$$\int_X \Phi(f) d\mu \leq \int_X \Phi(k) d\mu = \Phi(k)\mu(X) < +\infty$$

olur. Böylece

$$\mathcal{L}^\infty(\mu) \subseteq \bigcap \{ \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu) : \Phi \text{ tüm } N \text{ fonksiyonları} \}$$

bulunur. Şimdi, bu kapsamanın kesin olduğunu kabul edelim. Bu durumda, her N fonksiyonu Φ için $f \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ olmasına karşın esasen sınırlı olmayan bir f fonksiyonu bulunabilir. Bu kabul altında $f \notin \tilde{\mathcal{L}}^{\Phi_0}(\mu)$ olacak şekilde bir N fonksiyonu Φ_0 olduğunu gösterelim.

Keyfi bir $k \in \mathbb{N}$ için $X_k = \{\omega : n_k \leq |f(\omega)| < n_{k+1}\}$ olmak üzere $\mu(X_k) \geq \mu(X_{k+1}) > 0$ olacak şekilde, tam sayıların artan bir (n_k) dizisi alınsın. Burada, f esasen sınırlı olmadığından bu seçimleri yapmak mümkündür. Ayrıca, $X_k \in \mathcal{A}$ kümeleri ayrık olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k) \leq \mu(X) < \infty$ bulunur. Dolayısıyla $k \rightarrow +\infty$ için $\mu(X_k) \rightarrow 0$ olur. Şimdi

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \frac{2t}{n_1\mu(X_{n_1})}, & 0 \leq t < \frac{n_1}{2}, \\ \frac{1}{\mu(X_k)}, & \frac{n_k}{2} \leq t < \frac{n_{k+1}}{2}, k \geq 1 \end{cases}$$

tanımlayalım. Bu durumda, φ_0 artan, $\varphi_0(0) = 0$ ve $t \rightarrow +\infty$ için $\varphi_0(t) \rightarrow +\infty$ olur. Böylece $\Phi_0(x) = \int_0^{|x|} \varphi_0(t) dt$ şeklinde tanımlanan bir N fonksiyonudur. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} \int_X \Phi_0(f) d\mu &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} \Phi_0(f) d\mu \geq \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_0(n_k)\mu(X_k) \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k}{2} \varphi_0\left(\frac{n_k}{2}\right) \mu(X_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k}{2\mu(X_k)} \mu(X_k) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} n_k = +\infty \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $f \notin \tilde{\mathcal{L}}^{\Phi_0}(\mu)$ olur ki bu ise istenendir.

(b) Kabul edelim ki $(X, \mathcal{A}, \mu)$ herhangi ölçü uzayı ve (Φ, Ψ) tamlayan N fonksiyon çifti olsun. Bir $0 \leq h \in \mathcal{L}^1(\mu)$ alalım. Burada $|h| = h \operatorname{sgn}(h)$ olduğundan, genelliği kaybetmek-sizin $h \geq 0$ kabul edilebilir. Böylece, $A_1 = \{\omega : 0 < h(\omega) < \infty\}$ ve $A_2 = \{\omega : h(\omega) = 0\}$ olmak üzere

$$f(\omega) = \begin{cases} \Phi^{-1}(h(\omega)), & \omega \in A_1, \\ 0, & \omega \in A_2, \\ +\infty, & \omega \in X \setminus (A_1 \cup A_2) \end{cases}$$

ve

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{h(\omega)}{\Phi^{-1}(h(\omega))}, & \omega \in A_1, \\ 0, & \omega \in A_2, \\ +\infty, & \omega \in X \setminus (A_1 \cup A_2) \end{cases}$$

tanımlayalım. Buradan, $h = fg$ olur. Diğer yandan, h integrallenebilir olduğundan $\mu(X \setminus (A_1 \cup A_2)) = 0$ dir. O halde,

$$\int_X \Phi(f) d\mu = \int_{A_1} \Phi(f) d\mu = \int_X h d\mu < +\infty$$

ve Önerme 3.3.5 (ii) ile Φ fonksiyonunun kesin artanlığı kullanılarak

$$\int_X \Psi(g) d\mu = \int_{A_1} \Psi\left(\frac{h}{\Phi^{-1}(h)}\right) d\mu \leq \int_{A_1} \Psi\left(\Psi^{-1}(h)\right) d\mu = \int_X h d\mu < +\infty$$

elde edilir. Yani, $f \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$, $g \in \tilde{\mathcal{L}}^\Psi(\mu)$ olur. Böylece, $\mathcal{L}^1(\mu) \subseteq \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu) \tilde{\mathcal{L}}^\Psi(\mu)$ elde edilir. Diğer taraftan, bir $f \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ ve $g \in \tilde{\mathcal{L}}^\Psi(\mu)$ alındığında, Young eşitsizliğinden

$$\int_X |fg| d\mu \leq \int_X \Phi(|f|) d\mu + \int_X \Psi(|g|) d\mu < +\infty$$

bulunur. Böylece, $\mathcal{L}^1(\mu) = \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu) \tilde{\mathcal{L}}^\Psi(\mu)$ eşitliği elde edilir.

Uyarı 4.1.12. Eğer $1 < p < \infty$ için $\Phi(x) = |x|$ alınırsa, klasik Lebesgue uzayı teorisi için Önerme 4.1.11'deki (a) şikkına benzer bir sonuç geçerli değildir.

$\mathcal{L}^\Phi(\mu)$ Orlicz uzaylarının motivasyonu, $\mathcal{L}^p(\mu)$ Lebesgue uzaylarının bir genellemesi olmasına karşın, bu uzaylar arasında ileride belirteceğimiz bazı önemli farklar söz konusudur. Benzerlik ise $1 \leq p < \infty$ için $\Phi(x) = |x|^p$ alınırsa $\mathcal{L}^\Phi(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu)$ olur. Yine $\Phi_0(-x) = \Phi_0(x)$ olmak üzere

$$\Phi_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ +\infty, & x \geq 1 \end{cases}$$

olarak alınırsa $\mathcal{L}^{\Phi_0}(\mu) = \mathcal{L}^\infty(\mu)$ bulunur. Yani, Φ bir Young fonksiyonu olmak üzere $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$ Orlicz uzayları ailesi, $1 \leq p \leq \infty$ için $\mathcal{L}^p(\mu)$ Lebesgue uzaylarını kapsar.

Örnek 4.1.13. $X = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ ve μ ise sayma ölçüsü olsun. Bu durumda,

Orlicz dizi uzayı

$$\ell^\Phi = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n \in \mathbb{N}} \Phi(\alpha |a_n|) < +\infty, \exists \alpha > 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

4.2 ORLICZ UZAYLARININ TEMEL YAPISI

Tanım 4.2.1. Her $f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ için $I_\Phi^f(\tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)) = I_\Phi^f := \{k \geq 0 : kf \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)\}$ ve $k_f = \sup\{I_\Phi^f\} \in [0, +\infty)$ olsun. Yine, $k \in I_\Phi^f$ için $l_f : k \rightarrow \int_X \Phi(kf) d\mu$ olarak tanımlanacaktır.

Burada I_Φ^f kümesi ve l_f fonksiyoneli, $\mathcal{L}^p$ Lebesgue uzaylarında verilmeyen ancak Orlicz uzayları için yeni ve ilginç yorumlar sağlayacaktır.

$0 \neq f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ ve I_Φ^f, l_f Tanım 4.2.1'de verilen fonksiyonlar olsun. Aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 4.2.2. $0 \neq f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ olmak üzere $l_f : I_\Phi^f \rightarrow [0, +\infty]$ fonksiyonu artan ve $[0, k_f)$ aralığında sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca, $\lim_{k \rightarrow k_f} l_f(k) < \infty$ olur. Diğer taraftan, bir μ pozitif ölçüsü bir $E \in \mathcal{A}$ kümesinde atomsuz ve keyfi $0 < \alpha, \beta < \infty$ sayıları verilsin. Bu durumda bir Φ Young fonksiyonu ve $k_f = \alpha, l_f(k_f) = \beta$ koşulunu sağlayan bir $f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ bulunur. Bundan başka, $k_g = \alpha$ ve $l_g(k_g) = +\infty$ koşulunu sağlayan bir $g \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ bulunur.

İspat. Φ ve l_f fonksiyonlarının tanımından $f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ olmak üzere

$$l_f(k) = \int_X \Phi(kf) d\mu \quad (4.4)$$

olur. Buradan, Φ artan bir fonksiyon olduğundan $0 < k_1 < k_2 < k_f$ için

$$l_f(k_1) = \int_X \Phi(k_1 f) d\mu \leq \int_X \Phi(k_2 f) d\mu = l_f(k_2)$$

olur. Böylece, $[0, k_f)$ üzerinde l_f fonksiyonu artan bir fonksiyondur.

Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = k_0 \in [0, k_f)$ ise $k_0 < k_f$ için monoton yakınsaklık teoreminden

$$l_f(k_n) \nearrow l_f(k_0) \quad (4.5)$$

olur.

Eğer $k_0 = k_f$ ise $l_f(k_n) = \int_X \Phi(k_n f) d\mu \leq \int_X \Phi(k_0 f) d\mu = l_f(k_0)$ olduğundan

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} l_f(k_n) \leq l_f(k_0) \quad (4.6)$$

bulunur. Diğer taraftan Φ pozitif fonksiyon olduğundan $\Phi(k_n f) \geq 0$ olur. Yine, (4.5)

gereğince hemen hemen her yerde $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(k_n f) = \Phi(k_0 f)$ geçerlidir. Ayrıca, Fatou Lemmasından

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} l_f(k_n) \geq \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi(k_n f) d\mu = \int_X \Phi(k_0 f) d\mu = l_f(k_0) \quad (4.7)$$

elde edilir. Yine, (4.6) ifadesinden,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} l_f(k_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} l_f(k_n) \leq l_f(k_0)$$

olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} l_f(k_n) = l_f(k_0)$ geçerlidir. Böylece, l_f fonksiyoneli süreklidir. Ayrıca, pozitif ölçüye sahip bir küme üzerinde $f \neq 0$ iken, Φ kesin artan ve sürekli ise l_f fonksiyoneli de kesin artan ve sürekli olur.

Son olarak, μ ölçüsü pozitif ve bir $E \in \mathcal{A}$ üzerinde, atomsuz ve keyfi $0 < \alpha, \beta < \infty$ olarak verilsin. Young fonksiyonu $\Phi(x) = e^{|x|} - 1$ alalım. Ayrıca, $\Phi \in \Delta_2$ olduğu açıktır. Kabul gereği, bir $E \in \mathcal{A}$ kümesi vardır ki $\mu(E) > 0$ olur ve μ ölçüsü atomsuz olduğundan öyle bir $F \subseteq E$ vardır ki, $0 < \mu(F) < \infty$ olur. Ayrıca, ölçü kuramı kullanılırsa,

$$\mathcal{L}^\Phi(F, \mathcal{A}, \mu) \cong \mathcal{L}^\Phi(I, \mathcal{B}, \lambda)$$

olur. Burada $I = [0, \mu(F))$ 'dir. $\mathcal{A}$, σ cebirinin F kümesine kısıtlanması ve $(I, \mathcal{B}, \lambda)$ Lebesgue aralığıdır. Böylece, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçü uzayı, $J = [0, \mu(F))$ ve $(J, \mathcal{B}, \lambda)$ olmak üzere $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$ yerine $\mathcal{L}^\Phi(\lambda)$ alalım. Buradan, J kümesinden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$$

koşulunu sağlayan bir (x_n) dizi seçelim öyle ki $x_{n-1} - x_n = \frac{\beta}{n(n+1)(2^{n+1}-1)}$ olsun. O halde,

$$f = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} (\log 2^{n+1}) \chi_{[x_n, x_{n+1})} \quad (4.8)$$

olarak tanımlayalım. Buradan,

$$\begin{aligned} (4.9) \quad \int_J \Phi(\alpha f) d\lambda &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (e^{\ln(2^{n+1})} - 1) d\lambda \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} ((2^{n+1} - 1) \frac{\beta}{n(n+1)(2^{n+1}-1)}) = \beta \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan her $0 < \varepsilon < 1$ için, benzer şekilde,

$$\begin{aligned} \int_J \Phi((1 + \varepsilon)\alpha f) d\lambda &= \beta \sum_{n=1}^{\infty} \left((2^{(1+\varepsilon)(n+1)} - 1) \frac{1}{n(n+1)(2^{n+1} - 1)} \right) \\ &> \beta \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^{\varepsilon(n+1)}}{n(n+1)} \right) = +\infty \end{aligned}$$

olur. Burada, $\alpha = k_f$ ve $\beta = l_f(k_f)$ 'dir. O halde, (4.8) ifadesinde $f = g$ ve her $n \geq 1$ için $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n(2^{n+1}-1)}$ ve $\Phi(x) = e^{|x|} - 1$ olmak üzere,

$$\int_J \Phi(\alpha g) d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (e^{\ln 2^{n+1}} - 1) d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

olur. Fakat $0 < \varepsilon < 1$ için

$$\begin{aligned} \int_J \Phi((1 - \varepsilon)\alpha g) d\lambda &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2^{(1-\varepsilon)(n+1)} - 1)}{n(2^{n+1} - 1)} \right) \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^{-(n+1)\varepsilon}}{n} \right) < +\infty \end{aligned}$$

olur. Böylece, $k_g = \alpha$ ve $l_f(k_g) = +\infty$ olur. □

Şimdi $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$ fonksiyon uzayının üzerinde bir norm tanımlayacağız. Bu normun tanımında Önerme 4.1.10'da tanımladığımız B_Φ kümesini kullanacağız. $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$ üzerinde aşağıdaki gibi bir fonksiyon tanımlayalım.

$$\|f\|_\Phi := \inf \left\{ k > 0 : \frac{1}{k} f \in B_\Phi \right\} = \inf \left\{ k > 0 : \int_X \Phi\left(\frac{f}{k}\right) d\mu \leq 1 \right\}. \quad (4.10)$$

Aşağıda $\|\cdot\|_\Phi$ fonksiyonunun bazı önemli özelliklerini vereceğiz. Burada vurgulamak gerekir ki, Lebesgue uzaylarında olduğu gibi birbirine denk fonksiyonları özdeş sayarak aşağıdaki teoremi elde ederiz. Bunu ileride vereceğiz.

Teorem 4.2.3. $(\mathcal{L}^\Phi, \|\cdot\|_\Phi)$ bir normlu uzaydır. Üstelik, $\|f\|_\Phi \leq 1$ olması için gerek ve yeter koşul $\int_X \Phi(f) d\mu \leq 1$ olmasıdır.

İspat. İlk olarak $\|\cdot\|_\Phi$ fonksiyonunun $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$ üzerinde bir norm olduğunu göstereceğiz.

(i) Her $f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ için

$$\|f\|_\Phi = \inf \left\{ k > 0 : \int_X \Phi\left(\frac{f}{k}\right) d\mu \leq 1 \right\} \geq 0$$

olur. Böylece, $\|f\|_\Phi \geq 0$ olur.

(ii) Her $f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ için $\|f\|_\Phi = 0$ olması için gerek ve yeter koşulun hemen hemen her yerde $f = 0$ olduğunu gösterelim.

Eğer hemen hemen her yerde $f = 0$ ise $\|f\|_\Phi = 0$ olduğunu göstermek kolaydır. Kabul edelim ki, bir ölçülebilir küme üzerinde $|f| > 0$ olsun. Bu durumda, bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki $A = \{x : |f(x)| \geq \delta\}$ kümesi için $\mu(A) > 0$ olur. Öte yandan, (4.10) gereği her $k \geq 0$ için $\frac{f}{k} \in B_\Phi$ olur öyle ki, her $n \in \mathbb{N}$ için $nf \in B_\Phi$ olur. Buradan, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\Phi(n\delta)\mu(A) = \int_A \Phi(n\delta) d\mu \leq \int_A \Phi(nf) d\mu \leq \int_X \Phi(nf) d\mu \leq 1$$

olur. Yine, $\mu(A) > 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(n\delta) = +\infty$ olduğundan $\mu(A) = 0$ olması mümkün değildir. O halde istenen elde edilir.

(iii) Her $f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ ve $\alpha \neq 0$ skaleri için

$$\begin{aligned} \|\alpha f\|_\Phi &= \inf \left\{ k > 0 : \int_X \Phi\left(\frac{\alpha f}{k}\right) d\mu \leq 1 \right\} = |\alpha| \inf \left\{ \frac{k}{|\alpha|} > 0 : \int_X \Phi\left(\frac{f}{k/|\alpha|}\right) d\mu \leq 1 \right\} \\ &= |\alpha| \inf \left\{ \beta > 0 : \int_X \Phi\left(\frac{f}{\beta}\right) d\mu \leq 1 \right\} = |\alpha| \|f\|_\Phi \end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) Her $f, g \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ için $\|f + g\|_\Phi \leq \|f\|_\Phi + \|g\|_\Phi$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki, $u = \|f\|_\Phi$ ve $v = \|g\|_\Phi$ pozitif reel sayılar olsun. Yine, Φ fonksiyonunun dışbükeyliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \int_X \Phi\left(\frac{f+g}{u+v}\right) d\mu &= \int_X \Phi\left(\frac{u}{u+v} \frac{f}{u} + \frac{v}{u+v} \frac{g}{v}\right) d\mu \\ &\leq \frac{u}{u+v} \int_X \Phi\left(\frac{f}{u}\right) d\mu + \frac{v}{u+v} \int_X \Phi\left(\frac{g}{v}\right) d\mu \leq \frac{u}{u+v} + \frac{v}{u+v} = 1 \end{aligned}$$

olur. Böylece, $\|\cdot\|_\Phi$ fonksiyonunun tanımından, $\|f + g\|_\Phi \leq u + v$ elde edilir. Bu ise, $\|f + g\|_\Phi \leq \|f\|_\Phi + \|g\|_\Phi$ olmasıdır.

Ayrıca, Önerme 4.1.10'dan $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$ 'nin bir vektör uzayı olduğunu biliyoruz. Böylece, $\|\cdot\|_\Phi$ fonksiyonu $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$ üzerinde bir normdur.

Son olarak $\|f\|_\Phi \leq 1$ olması için gerek ve yeter koşulun $\int_X \Phi(f) d\mu \leq 1$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $\|f\|_\Phi = \inf \left\{ k > 0 : \int_X \Phi\left(\frac{f}{k}\right) d\mu \leq 1 \right\} \leq 1$ olsun. O halde,

$$\int_X \Phi(f) d\mu \leq \int_X \Phi\left(\frac{f}{\|f\|_\Phi}\right) d\mu \leq 1$$

olur. Böylece, $\int_X \Phi(f) d\mu \leq 1$ 'dir.

Tersine, kabul edelim ki $\int_X \Phi(f) d\mu \leq 1$ olsun. $\|\cdot\|_\Phi$ tanımından $\|f\|_\Phi \leq 1$ olur. Eğer

$\|f\|_\Phi > 1$ olsaydı, $\int_X \Phi\left(\frac{f}{\|f\|_\Phi}\right) d\mu \leq 1$ olur fakat $\int_X \Phi(f) d\mu = +\infty$ olur ki bu ise kabul ile çelişir. O halde, $\int_X \Phi(f) d\mu \leq 1$ ise, $\|f\|_\Phi \leq 1$ olur. $\square$

Uyarı 4.2.4. $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$ üzerinde tanımlanan $\|\cdot\|_\Phi$ normu, Orlicz uzayının gauge normu ya da yaygın kullanımı ile Luxemburg normu olarak adlandırılır. Çoğunlukla $N_\Phi(\cdot)$ ile gösterilir.

Önerme 4.2.5. $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$ uzayında bir (f_n) dizisi, hemen hemen her yerde $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ olsun. O halde, $\Phi(x) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x = 0$ olmasıdır. Bu durumda,

$$\|f\|_\Phi \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_\Phi$$

olur. Yani, Luxemburg normu $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$ üzerinde alt yarı süreklidir.

İspat. Kabul edelim ki $f \neq 0$ olsun. O halde, $\|f\|_\Phi > 0$ olur. Böylece, yeteri kadar büyük n doğal sayısı için $\|f_n\|_\Phi > 0$ dır. Eğer $k_0 = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_\Phi = +\infty$ alınırsa, $\|f\|_\Phi \leq +\infty$ olur. Dolayısıyla, $0 \leq k_0 < \infty$ olarak kabul edebiliriz. Fakat $k_0 = 0$ ise (f_n) dizisinin $\lim_{i \rightarrow \infty} \|f_{n_i}\|_\Phi = 0$ olacak şekilde bir (f_{n_i}) alt dizisi vardır. Böylece, Φ 'nin dışbükey olması da kullanılırsa, $i \geq i_0$ için $\|f_{n_i}\|_\Phi \leq 1$ ve

$$\frac{1}{\|f_{n_i}\|_\Phi} \int_X \Phi(|f_{n_i}|) d\mu \leq \int_X \Phi\left(\frac{f_{n_i}}{\|f_{n_i}\|_\Phi}\right) d\mu \leq 1$$

olur. Buradan, $i \rightarrow +\infty$ için

$$0 \leq \int_X \Phi(|f_{n_i}|) d\mu \leq \|f_{n_i}\|_\Phi \rightarrow 0 \quad (4.11)$$

bulunur. Diğer taraftan hemen hemen her yerde $\lim_{i \rightarrow \infty} |f_{n_i}| = |f|$ olduğundan ve $|x| > 0$ için $\Phi(x) > 0$ olduğu için Fatou lemmasından

$$0 < \int_X \Phi(|f|) d\mu = \int_X \lim_{i \rightarrow \infty} \Phi(|f_{n_i}|) d\mu \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_X \Phi(|f_{n_i}|) d\mu = 0$$

olur. Bu ise bir çelişkidir, dolayısıyla $0 < k_0 < \infty$ olur.

Son olarak, keyfi $0 < k_0 < t < \infty$ olsun. O halde, bir i için $k_0 < k_i < t$ olmak üzere

$$\int_X \Phi\left(\frac{f}{t}\right) d\mu = \int_X \lim_{i \rightarrow \infty} \Phi\left(\frac{f_{n_i}}{t}\right) d\mu \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_X \Phi\left(\frac{f_{n_i}}{t}\right) d\mu \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_X \Phi\left(\frac{f_{n_i}}{k_i}\right) d\mu \leq 1 \quad (4.12)$$

olur. Fakat, (4.12) ve infimum özelliği (4.10) dan, $\|f\|_\Phi \leq t$ dir. Yine, $k_0 < t$ keyfi olduğundan $\|f\|_\Phi \leq k_0 = \liminf_{i \rightarrow \infty} \|f_n\|_\Phi$ olur. Aksi halde, $\|f\|_\Phi > t$ çelişkisi elde edilir. Böylece, $\|\cdot\|_\Phi$ fonksiyonu alt yarı süreklidir. $\square$

4.3 ORLICZ VE LUXEMBURG NORMLARI ARASINDAKİ İLİŞKİ

Orlicz uzayı üzerinde bir diğer norm olan Orlicz normu verilecektir. Bunun için öncelikle Orlicz uzayları için Hölder eşitsizliğinden başlayalım. Burada, (Φ, Ψ) normalleştirilmiş Young fonksiyon çifti olsun. Bu durumda, $\Phi(1) + \Psi(1) = 1$ olur. Yine, $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$ ve $\mathcal{L}^\Psi(\mu)$ Orlicz uzaylarının normlarını sırasıyla $\|\cdot\|_\Phi$ ve $\|\cdot\|_\Psi$ ile gösterelim.

Önerme 4.3.1. (Φ, Ψ) normalleştirilmiş Young fonksiyon çifti olsun. Eğer $f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ ve $g \in \mathcal{L}^\Psi(\mu)$ ise,

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_\Phi \|g\|_\Psi \quad (4.13)$$

olur.

İspat. Eğer $\|f\|_\Phi = 0$ veya $\|g\|_\Psi = 0$ ise hemen hemen her yerde $f = 0$ veya $g = 0$ olur. Böylece, (4.13) için eşitlik durumu sağlanır. O halde, $\|f\|_\Phi > 0$ ve $\|g\|_\Psi > 0$ olsun. Young eşitsizliğinden $\omega \in X$ için,

$$\frac{|fg|(\omega)}{\|f\|_\Phi \|g\|_\Psi} \leq \Phi\left(\frac{|f|}{\|f\|_\Phi}\right)(\omega) + \Psi\left(\frac{|g|}{\|g\|_\Psi}\right)(\omega) \quad (4.14)$$

olur. Böylece, (Φ, Ψ) normalleştirilmiş Young fonksiyon çifti olduğundan, (4.14) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\int_X \left(\frac{|fg|}{\|f\|_\Phi \|g\|_\Psi} \right) d\mu \leq \Phi(1) + \Psi(1) = 1 \quad (4.15)$$

elde edilir. □

Uyarı 4.3.2. Eğer (Φ, Ψ) tamlayan Young fonksiyon çifti, normalleştirilmiş değil ise bu durumda,

$$\int_X |fg| d\mu \leq 2\|f\|_\Phi \|g\|_\Psi \quad (4.16)$$

bulunur.

Tanım 4.3.3. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçülebilir bir uzay olsun. Bir $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon ve (Φ, Ψ) tamlayan Young fonksiyon çifti verilsin. Bu durumda, $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$ Orlicz uzayı üzerinde

$$\|f\|_\Phi^\circ = \sup \left\{ \int_X |fg| d\mu : \int_X \Psi(|g|) d\mu \leq 1 \right\} \quad (4.17)$$

şeklinde tanımlanan $\|\cdot\|_\Phi^\circ$ fonksiyonu bir normdur. Bu norm, Orlicz normu olarak adlandırılır.

Şimdi, $\|\cdot\|_\Phi^\circ$ ile $\|\cdot\|_\Phi$ normlarının denk olduğunu göstereyim. Bunun için, aşağıdaki önermeyi ispatsız verelim.

Önerme 4.3.4. Eğer bir $f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ için $\|f\|_\Phi^\circ \neq 0$ ise,

$$\int_X \Phi\left(\frac{f}{\|f\|_\Phi^\circ}\right) d\mu \leq 1 \quad (4.18)$$

olur.

Önerme 4.3.5. Φ bir Young fonksiyonu olmak üzere, her $f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ için

$$\|f\|_\Phi \leq \|f\|_\Phi^\circ \leq 2\|f\|_\Phi \quad (4.19)$$

geçerlidir. Ayrıca, (Φ, Ψ) normleştirilmiş Young fonksiyon çifti ise, her $f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ için

$$\Phi(1)\|f\|_\Phi \leq \|f\|_\Phi^\circ \leq 2\|f\|_\Phi \quad (4.20)$$

olur. Üstelik, her iki durum için $\|\cdot\|_\Phi$ ve $\|\cdot\|_\Phi^\circ$ artan fonksiyonlardır.

İspat. İstenen (4.19) eşitsizliği, Young eşitsizliği ve (4.18) kullanılarak kolayca elde edilir.

Şimdi, kabul edelim ki (Φ, Ψ) normleştirilmiş Young fonksiyon çifti olsun. Eğer $\alpha = \Phi(1)$ alınrsa, $0 < \alpha = \Phi(1) \leq \Phi(1) + \Psi(1) = 1$ olur. Böylece, (4.18) eşitsizliği ve Φ Young fonksiyonunun dışbükeyliği kullanılırsa,

$$\int_X \Phi\left(\frac{\alpha f}{\|f\|_\Phi^\circ}\right) d\mu \leq \alpha \int_X \Phi\left(\frac{f}{\|f\|_\Phi^\circ}\right) d\mu \leq \alpha \leq 1$$

bulunur. Buradan,

$$\Phi(1)\|f\|_\Phi \leq \|f\|_\Phi^\circ \quad (4.21)$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafı için, Young eşitsizliği kullanılırsa, Luxemburg normu tanımı gereği

$$\begin{aligned} \int_X |fg| d\mu &= \|f\|_\Phi \int_X \frac{|f|}{\|f\|_\Phi} |g| d\mu \leq \|f\|_\Phi \left(\int_X \Phi\left(\frac{|f|}{\|f\|_\Phi}\right) d\mu + \int_X \Psi(|g|) d\mu \right) \\ &\leq \|f\|_\Phi (\Phi(1) + 1) \leq 2\|f\|_\Phi \end{aligned}$$

bulunur. Eğer $\int_X \Psi(|g|) d\mu \leq 1$ koşulunu sağlayan her $g \in \mathcal{L}^\Psi(\mu)$ için supremum alınrsa,

$$\|f\|_\Phi^\circ \leq 2\|f\|_\Phi \quad (4.22)$$

olur. Böylece, (4.21) ve (4.22) eşitsizliklerinden istenen elde edilir. $\square$

Uyarı 4.3.6. (4.17) ve (4.20) eşitsizliklerinin bir sonucu olarak, (4.16) ile verilen Hölder eşitsizliği aşağıdaki şekilde verilir.

Her $f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ ve $g \in \mathcal{L}^\Psi(\mu)$ için,

$$\int_X |fg| d\mu = \|g\|_\Psi \int_X |f| \frac{g}{\|g\|_\Psi} d\mu \leq \|g\|_\Psi \|f\|_\Phi^\circ \quad (4.23)$$

olur. Eğer Φ ile Ψ fonksiyonları yer değiştirilirse,

$$\int_X |fg| d\mu \leq \min \{ \|f\|_\Psi \|g\|_\Phi^\circ, \|g\|_\Psi \|f\|_\Phi^\circ \} \quad (4.24)$$

elde edilir. Eğer (Φ, Ψ) normalleştirilmiş Young fonksiyon çifti ise, (4.24) ifadesi (4.13) eşitsizliğine dönüşür, yani

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_\Phi^\circ \|g\|_\Psi$$

olur.

Uyarı 4.3.7. Eğer (Φ, Ψ) normalleştirilmiş Young fonksiyon çifti ise, (4.17) eşitliği ile verilen Orlicz normu

$$\|f\|_\Phi^\circ = \sup \left\{ \left| \int_X fg d\mu \right| : \|g\|_\Psi \leq 1 \right\}$$

şeklinde ifade edilir.

Şimdi, Önerme 2.2.9'da olduğu gibi, Φ 'nin dışbükeyliğine gerek duymadan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Lemma 4.3.8. Her bir $i = 1, 2, 3$ için, $\Phi_i : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$ artan ve sağ sürekli Young fonksiyonları, her $x \geq 0$ için

$$\Phi_1^{-1}(x) \Phi_2^{-1}(x) \leq \Phi_3^{-1}(x) \quad (4.25)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda, her $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ için

$$\Phi_3(xy) \leq \Phi_1(x) + \Phi_2(y) \quad (4.26)$$

olur.

Burada, her $i = 1, 2, 3$ için $\Phi_i^{-1}(x) = \inf \{ y : \Phi_i(y) > x \}$ ve $\inf(\emptyset) = +\infty$ şeklindedir.

İspat. Öncelikle, ters fonksiyon tanımından, her bir i için

$$\Phi_i(\Phi_i^{-1}(x)) \leq x \leq \Phi_i^{-1}(\Phi_i(x)) \quad (4.27)$$

olur. Şimdi, keyfi $x, y \in [0, +\infty)$ elemanlarını sabitleyelim ve $\Phi_1(x) \leq \Phi_2(y)$ olduğunu kabul edelim. O halde, (4.27) eşitsizliği kullanılırsa

$$xy \leq \Phi_1^{-1}(\Phi_1(x)) \Phi_2^{-1}(\Phi_2(y)) \leq \Phi_1^{-1}(\Phi_2(y)) \Phi_2^{-1}(\Phi_2(y)) \leq \Phi_3^{-1}(\Phi_2(y))$$

bulunur. Böylece,

$$\Phi_3(xy) \leq \Phi_3(\Phi_3^{-1}(\Phi_2(y))) \leq \Phi_2(y)$$

olur. Eğer $\Phi_2(y) \leq \Phi_1(x)$ olsaydı, $\Phi_3(xy) \leq \Phi_1(x)$ elde edilirdi. Buradan,

$$\Phi_3(xy) \leq \max\{\Phi_1(x), \Phi_2(y)\} \leq \Phi_1(x) + \Phi_2(y)$$

olur. Böylece, istenen elde edilir. Bu ise Young eşitsizliğini genelleştirir. $\square$

Aşağıdaki teorem Hölder eşitsizliğini genelleştirir.

Teorem 4.3.9. Her bir $i = 1, 2, 3$ için, $\Phi_i : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$ Young fonksiyonları

$$\Phi_1^{-1}(x)\Phi_2^{-1}(x) \leq \Phi_3^{-1}(x), \quad x \geq 0 \quad (4.28)$$

koşulunu sağlasın. Eğer $f_1 \in \mathcal{L}^{\Phi_1}(\mu)$, $f_2 \in \mathcal{L}^{\Phi_2}(\mu)$ ise $f_1 f_2 \in \mathcal{L}^{\Phi_3}(\mu)$ ve

$$\|f_1 f_2\|_{\Phi_3} \leq 2\|f_1\|_{\Phi_1}\|f_2\|_{\Phi_2} \quad (4.29)$$

geçerlidir.

İspat. Kolaylık için $i = 1, 2$ için $\|f_i\|_{\Phi_i} = 1$ alalım. O halde Φ_i fonksiyonlarının dışbükey olması ve (4.26) kullanılırsa

$$\int_X \Phi_3\left(\frac{|f_1 f_2|}{2}\right) d\mu \leq \frac{1}{2} \int_X \Phi_3(|f_1| |f_2|) d\mu \leq \frac{1}{2} \left[\int_X \Phi_1(|f_1|) d\mu + \int_X \Phi_2(|f_2|) d\mu \right] \leq \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

olur. Buradan $\|f_1 f_2\|_{\Phi_3} \leq 2$ olup (4.29) elde edilir. $\square$

Uyarı 4.3.10. Teorem 4.3.9'te $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, $p, q, r \geq 1$ olmak üzere $\Phi_1(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $\Phi_2(x) = \frac{|x|^q}{q}$ ve $\Phi_3(x) = \frac{|x|^r}{r}$ alınırse aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.11. Eğer $f_1 \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $f_2 \in \mathcal{L}^q(\mu)$ ise $f_1 f_2 \in \mathcal{L}^r(\mu)$ ve

$$\|f_1 f_2\|_r \leq 2\|f_1\|_p\|f_2\|_q \quad (4.30)$$

sağlanır.

Uyarı 4.3.12. Eğer ölçü uzayında grup yapısı varsa, Teorem 4.3.9'te verilen sonuç $f_1 f_2$ yerine $f_1 * f_2$ girişim çarpımı ile verilir. Aşağıdaki teorem bununla ilgilidir.

Teorem 4.3.13. Her bir $i = 1, 2, 3$ için, $\Phi_i : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$ Young fonksiyonları

$$\Phi_1^{-1}(x)\Phi_2^{-1}(x) \leq x\Phi_3^{-1}(x), \quad x \geq 0 \quad (4.31)$$

koşulunu sağlasın. G bir yerel kompakt unimodular grup, $\mathcal{A}$ Borel σ cebiri, μ Haar ölçüsü olmak üzere $(G, \mathcal{A}, \mu)$ ölçü uzayı olsun. Bu durumda $i = 1, 2, 3$ olmak üzere, $f_i \in \mathcal{L}^{\Phi_i}(\mu)$ için $f_1 * f_2 \in \mathcal{L}^{\Phi_3}(\mu)$ olur ve

$$\|f_1 * f_2\|_{\Phi_3} \leq 2\|f_1\|_{\Phi_1}\|f_2\|_{\Phi_2} \quad (4.32)$$

sağlanır.

İspat. Önceki ispatta yapıldığı gibi $x \geq 0, y \geq 0$ için $\Phi_1(x) \leq \Phi_2(y)$ ya da $\Phi_2(y) \leq \Phi_1(x)$ geçerlidir. Kabul edelim ki $\Phi_1(x) \leq \Phi_2(y)$ olsun. Buradan $x \leq \Phi_1^{-1}(\Phi_2(y))$ olur. Böylece (4.31) gereğince

$$x\Phi_2^{-1}(\Phi_1(x)) \leq \Phi_1^{-1}(\Phi_1(x))\Phi_2^{-1}(\Phi_1(x)) \leq \Phi_1(x)\Phi_3^{-1}(\Phi_1(x))$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki yanı $\Phi_2^{-1}(\Phi_1(x))$ ile bölünürse ve $\frac{x}{\Phi_1^{-1}(x)}$ fonksiyonunun artan olduğu kullanılırsa $x \geq 0$ için

$$x \leq \frac{\Phi_1(x)}{\Phi_2^{-1}(\Phi_1(x))} \Phi_3^{-1}(\Phi_1(x)) \quad (4.33)$$

ve

$$\frac{\Phi_1(x)}{\Phi_2^{-1}(\Phi_1(x))} \leq \frac{\Phi_2(y)}{\Phi_2^{-1}(\Phi_2(y))} \leq \frac{\Phi_2(y)}{y} \quad (4.34)$$

elde edilir. (4.33) ve (4.34) ifadeleri kullanılırsa

$$xy \leq \Phi_2(y) \Phi_3^{-1}(\Phi_1(x)) \quad (4.35)$$

bulunur.

Benzer şekilde, eğer $\Phi_1(x) > \Phi_2(y)$ ise, $\Phi_2(y)$ ve $\Phi_1(x)$ fonksiyonlarının rolleri değiştirilerek

$$xy \leq \Phi_1(x) \Phi_3^{-1}(\Phi_2(y)) \quad (4.36)$$

elde edilir. Bu durumda xy ifadesi (4.35) ve (4.36) ifadelerinin maksimumu ile sınırlıdır ve

$$xy \leq \Phi_1(x) \Phi_3^{-1}(\Phi_2(y)) + \Phi_2(y) \Phi_3^{-1}(\Phi_1(x)) \quad (4.37)$$

elde edilir.

(4.32) eşitsizliğini elde etmek için kolaylık açısından $i = 1, 2$ için $\|f_i\|_{\Phi_i} = 1$ alınabilir. Öncelikle girişim işleminin $f(x) = (f_1 * f_2)(x) = \int_G f_1(t) f_2(t^{-1}x) dt$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \int_G \Phi_3\left(\frac{|f|}{2}\right) d\mu &\leq \int_G \Phi_3\left(\frac{1}{2} \int_G |f_1(t)| |f_2(t^{-1}x)| d\mu(t)\right) d\mu(x) \\ &\leq \int_G \Phi_3\left[\frac{1}{2} \int_G \Phi_1(|f_1(t)|) \Phi_3^{-1}(\Phi_2(|f_2(t^{-1}x)|)) d\mu(t) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_G \Phi_2(|f_2(t^{-1}x)|) \Phi_3^{-1}(\Phi_1(|f_1(t)|)) d\mu(t)\right] d\mu(x) \\ &\leq \frac{1}{2} \int_G \Phi_3\left(\int_G \Phi_1(|f_1(t)|) \Phi_3^{-1}(\Phi_2(|f_2(t^{-1}x)|)) d\mu(t)\right) d\mu(x) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_G \Phi_3\left(\int_G \Phi_2(|f_2(t^{-1}x)|) \Phi_3^{-1}(\Phi_1(|f_1(t)|)) d\mu(t)\right) d\mu(x) \\ &= \frac{1}{2} (I_1 + I_2) \end{aligned} \quad (4.38)$$

olur. Şimdi $j = 1, 2$ için $I_j \leq 1$ olduğunu gösterelim. Simetriden dolayı I_1 için göstermek

yeterlidir. $\alpha = \int_G \Phi_1(|f_1(t)|)d\mu(t)$ olsun. Yine, $0 < \alpha \leq 1$ için

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_G \Phi_3 \left(\int_G \Phi_1(|f_1(t)|) \Phi_3^{-1}(\Phi_2(|f_2(t^{-1}x)|))d\mu(t) \right) d\mu(x) \\ &\leq \alpha \int_G \Phi_3 \left(\int_G \Phi_3^{-1}(\Phi_2(|f_2(t^{-1}x)|))d\nu(t) \right) d\mu(x) \end{aligned}$$

olur. Burada $\nu(A) = \frac{1}{\alpha} \int_A \Phi_1(|f_1|)d\mu(t)$ olasılık ölçüsüdür. O halde

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \alpha \int_G \Phi_3 \left(\int_G \Phi_3^{-1}(\Phi_2(|f_2(t^{-1}x)|))d\nu(t) \right) d\mu(x) \\ &\leq \alpha \int_G \left(\int_G \Phi_3(\Phi_3^{-1}(\Phi_2(|f_2(t^{-1}x)|)))d\nu(t) \right) d\mu(x) \leq \alpha \int_G \int_G \Phi_2(|f_2(t^{-1}x)|)d\nu(t)d\mu(x) \\ &= \alpha \int_G \left(\int_G \Phi_2(|f_2(t^{-1}x)|)d\mu(x) \right) d\nu(t) \leq \alpha \int_G 1d\nu(t) = \alpha \leq 1 \end{aligned}$$

olur.

Benzer şekilde $I_2 \leq 1$ dir. Böylece (4.38) dolayısıyla $\int_G \Phi_3 \left(\frac{|f|}{2} \right) d\mu \leq 1$ bulunur. Buradan $\|f\|_{\Phi_3} \leq 2$ olup (4.32) elde edilir. $\square$

Teorem 4.3.14. $(\mathcal{L}^\Phi(\mu), \|\cdot\|_\Phi)$ normlu uzayı bir Banach uzayıdır.

İspat. $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$ uzayında bir $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy dizisi alalım. Buna göre, $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\|_\Phi = 0$ koşulunu sağlayan bir $f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ bulmak istiyoruz. Öte yandan, Φ Young fonksiyonu olduğundan iki durum söz konusudur.

Öncelikle, $x_0 = \sup\{x \in [0, +\infty) : \Phi(x) = 0\}$ olsun. O halde $0 \leq x_0 < \infty$ olduğundan Φ 'nin tanımı gereği $K = \{x \in [0, +\infty) : \Phi(x) = 0\}$ kümesinin kapanışı kompakttır. Yine, $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\|_\Phi = 0$ kabulünden, $k_{mn} > 0$ vardır öyle ki $k_{mn}^{-1} \leq \|f_n - f_m\|_\Phi$ ve

$$\int_X \Phi(k_{mn}|f_n - f_m|)d\mu \leq 1 \quad (4.39)$$

sağlanır. Öte yandan, $A_{mn} = \{w : k_{mn}|f_n - f_m|(w) > x_0\} \in \mathcal{A}$ kümesi μ için σ sonludur. Gerçekten, eğer $B_k = B_k^{mn} = \{w : k_{mn}|f_n - f_m|(w) > x_0 + k^{-1}\}$ olarak tanımlanırsa, $A_{mn} = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ olur. Böylece, her $k > 0$ için

$$\mu(B_k) \leq \frac{1}{\Phi(x_0 + k^{-1})} \int_{B_k} \Phi(k_{mn}|f_n - f_m|)d\mu \leq 1$$

olduğundan $\mu(B_k) < \infty$ olur. Böylece her bir A_{mn} , σ sonludur. Ayrıca, $A = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} A_{nm}$ olduğundan A kümesi de σ sonludur. $X \setminus A$ kümesinde $k_{mn}|f_n - f_m|(w) \leq x_0$ olduğundan $w \in X \setminus A$ için $\lim_{n,m \rightarrow \infty} |f_n(w) - f_m(w)| = 0$ yakınsaması düzgündür. Böylece, ölçülebilir bir $g_0 \in X \setminus A$ fonksiyonu $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(w) = g_0(w)$ ve $w \in X \setminus A$ için $|g_0| \leq x_0$ olacak şekilde vardır.

Bir an için $A = X$ olarak alalım. O halde $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$ uzayında bir Cauchy dizisidir ve her bir $B \in \mathcal{A}$ ve $\mu(B) < \infty$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \mu(B_n \cap \{|f_n - f_m| \geq \varepsilon\}) &= \mu(B \cap \{\Phi(k_{mn}|f_n - f_m|) \geq \Phi(k_{mn}\varepsilon)\}) \\ &\leq \frac{1}{\Phi(k_{mn}\varepsilon)} \int_B \Phi(k_{mn}|f_n - f_m|) d\mu \leq (\Phi(k_{mn}\varepsilon))^{-1} \end{aligned}$$

olur. Bu ise $k_{mn} \rightarrow \infty$ ve $\varepsilon > 0$ sabit olduğundan $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin bu şekildeki her bir B üzerinde μ ölçüsüne göre Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Öte yandan, σ sonluluk kullanılırsa $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi ölçüsel Cauchy dizisi olduğundan ölçü içinde $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \tilde{f}$ olur. O halde $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin bir $(f_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ alt dizisi vardır ki, hemen hemen her yerde $\lim_{i \rightarrow \infty} f_{n_i} = \tilde{f}$ olur. Buradan, $f = \tilde{f}\chi_A + g_0\chi_{X \setminus A}$ olsun. Böylece, hemen hemen her yerde $\lim_{i \rightarrow \infty} f_{n_i} = f$ olur. Öte yandan, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\|\cdot\|_\Phi$ normuna göre bir Cauchy dizisi olduğundan, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_\Phi = \rho$ ve $\lim_{i \rightarrow \infty} \|f_{n_i}\|_\Phi = \rho$ olur. O halde Fatou lemmasından,

$$\int_X \Phi\left(\frac{|f|}{\rho}\right) d\mu \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_X \Phi\left(\frac{f_{n_i}}{\|f_{n_i}\|_\Phi}\right) d\mu \leq 1$$

olur. Böylece $f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ elde edilir. Son olarak $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\Phi = 0$ olduğunu gösterelim. Eğer m sabitlenirse ve $k \geq 0$ alınırsa hemen hemen her yerde $\lim_{i \rightarrow \infty} \Phi(|f_{n_i} - f_{n_j}|k) = \Phi(|f - f_{n_j}|k)$ olur. Böylece, eğer $n_0 \geq 1$ sayısı, $n_i, n_j \geq n_0$ olarak seçilirse $k_{n_i n_j} \geq k$ olur ve

$$\int_X \Phi(|f_{n_i} - f_{n_j}|k) d\mu \leq \int_X \Phi(|f_{n_i} - f_{n_j}|k_{n_i n_j}) d\mu \leq 1 \quad (4.40)$$

elde edilir. Böylece, $n_i \rightarrow \infty$ alınırsa, Fatou lemmasından $\|f - f_{n_j}\|_\Phi \leq \frac{1}{k}$ bulunur. O halde $k > 0$ keyfi olduğundan $\lim_{j \rightarrow \infty} \|f_{n_j} - f\|_\Phi = 0$ olur. Eğer $\lim_{j \rightarrow \infty} \|f_{n_j} - f'\|_\Phi = 0$ olacak şekilde başka bir alt dizi seçilirse hemen hemen her yerde $f = f'$ olur. Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\Phi = 0$ elde edilir. Bu ise $(\mathcal{L}^\Phi(\mu), \|\cdot\|_\Phi)$ uzayındaki her Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu gösterir. O halde $(\mathcal{L}^\Phi(\mu), \|\cdot\|_\Phi)$ bir Banach uzayıdır. $\square$

Uyarı 4.3.15. Benzer sonuç $\|\cdot\|_\Phi^\circ$ Orlicz normu için de geçerlidir. Ancak bu durumda μ ölçüsünün atomsız olduğu kabul edilmelidir. Aksi halde $\|\cdot\|_\Phi^\circ$ bir yarı normdur.

Aşağıdaki önermeyi ispatsız verelim.

Önerme 4.3.16. μ atomsız bir ölçü olmak üzere $(\mathcal{L}^\Phi(\mu), \|\cdot\|_\Phi^\circ)$ normlu uzayı bir Banach uzayıdır.

Uyarı 4.3.17. Teorem 4.2.3 (ii) şıkkı nedeniyle $\|\cdot\|_\Phi$ fonksiyonu $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$ üzerinde bir norm değildir. Bu nedenle $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$ uzayı üzerinde bir “ $\sim$ ” denklik bağıntısı $f, g \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ olmak üzere,

$$f \sim g \Leftrightarrow \text{hemen hemen her } x \in X \text{ için } f(x) = g(x)$$

şeklinde tanımlansın ve $f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ için denklik sınıfı $[f]$ ile gösterilsin. Böylece, $L^\Phi(\mu) = \mathcal{L}^\Phi(\mu)/\sim$ olarak tanımlanır. Burada, $g \in [f]$ olması için gerek ve yeter koşul hemen hemen her $x \in X$ için $g(x) = f(x)$ ’dir ve $\|g\|_\Phi = \|f\|_\Phi$ olur. Böylece, $[f] \in L^\Phi(\mu)$ için $\|[f]\|_\Phi = \|f\|_\Phi$ ile tanımlanır. Böyle tanımlanan $L^\Phi(\mu)$ uzayı Orlicz uzayı olarak adlandırılır. Bu nedenle Teorem 4.2.3 gereği, $\|\cdot\|_\Phi$ fonksiyonu $L^\Phi(\mu)$ uzayında bir normdur ve yaygın kullanımı ile Luxemburg normu olarak adlandırılır.

Uyarı 4.3.18. Bir Φ Young fonksiyonu Δ_2 koşulunu sağlarsa, aşağıda ispatsız vereceğimiz önemli teoremi elde ederiz.

Teorem 4.3.19. Φ bir Young fonksiyonu ve $L^\Phi(\mu)$ Orlicz uzayı olsun. Eğer Φ , Δ_2 koşulunu sağlarsa basit fonksiyonlar $L^\Phi(\mu)$ uzayında yoğundur.

5. İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ EKİBİNİN ÇALIŞMALARI

Bu bölüm, bu kitabın yazarlarının Orlicz uzayları üzerine yapmış olduğu bilimsel çalışmalara ayrılmıştır. Bu çalışmaların önemli kısmı Orlicz uzaylarının soyut harmonik analizi, zaman-frekans analizi ve geometrisi üzerinedir. Özellikle ağırlıklı Orlicz uzayları ilk kez literatüre kazandırılmış, yeni ve aktif bir çalışma alanı tanıtılmıştır. Ağırlıklı Orlicz uzayları klasik (ağırlıklı) Lebesgue uzaylarının genelleştirilmesidir. Yerel kompakt bir G grubu üzerinde tanımlı $L^1(G)$ uzayının ve ağırlıklı $L^1_\omega(G)$ uzayının girişim işlemine göre Banach cebir yapısı ve bu cebir yapısından gelen temel özellikler literatürde mevcut iken ağırlıklı $L^\Phi_\omega(G)$ Orlicz uzayının girişim işlemine göre Banach cebir yapısı bilinmemekteydi. 2013 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora tezi [28] ile A. Osaçlıoğlu ve S. Öztop tarafından 2015 yılında yapılan uluslararası yayınlı ağırlıklı Orlicz cebirleri tanıtılmıştır [30]. Bu çalışma temel alınarak Orlicz uzaylarının yapısı genişletilmiş, girişim çarpımı dışında bükülmüş (twisted) çarpıma göre Banach cebir ve operatör cebir yapıları kapsayıcı şekilde incelenmiştir. Bu çalışmalarda grup yapısı ile Orlicz cebirleri arasında ilişkiler kurulmuş ve Banach cebirinin homolojik ve eş homolojik özellikleri incelenmiştir [33, 34, 35, 36]. Yine, ağırlıklı Orlicz uzaylarının Banach modül yapısı kullanılarak çarpanları, değişmez alt kümeleri ve homolojik özellikleri literatüre kazandırılmıştır [48, 49, 50]. Orlicz uzayları yerel kompakt grup dışında aşırı gruplar (hypergroup) üzerinde tanıtılarak Banach cebir yapısı ve temel özellikleri çalışılmıştır [37]. Ağırlıklı Orlicz uzayları üzerinde tanımlı bazı özel operatörler için ayrık geçişlilik, aşırı döngüsellik (hypercyclic) gibi lineer dinamik özellikler çalışılmıştır [8, 9]. Yine, yarı Orlicz uzayları ve modülasyon uzayları çalışılarak süreklilik, kompaktlık gibi temel özellikler incelenmiştir [44, 45]. Afin gruplar ve yerel kompakt gruplar üzerinde tanımlı ağırlıklı Orlicz uzayları için Wiener amalgam uzayları ve özellikleri ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Lebesgue uzayları için iyi bilinen Wiener amalgam uzay yapısı ve özellikleri yerel kompakt gruplar üzerinde tanımlı ağırlıklı Orlicz uzayları için de kapsamlı olarak incelenerek literatüre kazandırılmıştır [2, 3]. Öte yandan, Orlicz uzaylarının bileer çarpanları ve Fourier çarpanlar incelenerek Lebesgue uzaylarının dışında daha geniş fonksiyon sınıfına bu çarpanlar genişletilmiştir [6]. Orlicz uzaylarının farklı normlara göre geometrik yapıları da kapsamlı olarak ele alınmış ve uç noktaları karakterize edilerek literatüre kazandırılmıştır [4, 5, 47, 51]. Harmonik analizin önemli operatörlerinden biri olan Hardy- Littlewood maksimal operatörler üzerine Orlicz uzaylarında çalışmalar karşılaştırmalı olarak incelenmiştir [46].

Şimdi bu kitabın yazarları tarafından yapılan, ortak yazarları çeşitli ülkelerden de olan bilimsel çalışmalardan bazılarını kısaca gözden geçirelim.

5.1 AĞIRLIKLI ORLICZ UZAYLARI

Bu kesimde, Φ bir Young fonksiyonu, G bir yerel kompakt değişmeli grup ve ω bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere $L^\Phi_\omega(G)$ ile gösterilen ağırlıklı Orlicz uzayları tanıtıldı. Bu kısımda

Orlicz uzayları ağırlıklı Orlicz uzaylarına genişletilmiştir. Ağırlıklı Orlicz uzaylarına ilişkin temel yapı kapsamlı olarak [28, 29, 30] çalışmalarında verilmiştir.

Tanım 5.1.1. G üzerinde tanımlı pozitif değerli, Borel ölçülebilir ve her $x, y \in G$ için

$$\omega(x+y) \leq \omega(x)\omega(y)$$

koşulunu sağlayan fonksiyona bir ağırlık fonksiyonu denir.

Ayrıca, ω ağırlık fonksiyonu genelliği bozmaksızın için sürekli olarak kabul edilebilir [20, 40].

Örnek 5.1.2. $G = \mathbb{R}$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere her $x \in \mathbb{R}$ için $\omega(x) = (1+|x|)^\alpha$ ve $\omega(x) = e^{\lambda|x|^\alpha}$ fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde birer ağırlık fonksiyonudur.

Örnek 5.1.3. $G = \mathbb{R}^n$ için $\delta : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ sürekli fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için $\delta(x+y) \leq \delta(x) + \delta(y)$ koşulunu sağlasın. Bu durumda $\alpha \geq 0$ olmak üzere her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\omega(x) = (1 + \delta(x))^\alpha$$

$\mathbb{R}^n$ üzerinde bir ağırlık fonksiyonudur.

Tanım 5.1.4. G bir yerel kompakt değişmeli grup, ω bir ağırlık fonksiyonu ve Φ bir Young fonksiyonu olmak üzere $L_\omega^\Phi(G)$ ile gösterilen ağırlıklı Orlicz uzayı

$$L_\omega^\Phi(G) = \left\{ f : G \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ ölçülebilir, } \exists \alpha > 0, \int_G \Phi(\alpha |f(x)\omega(x)|) d\mu(x) < +\infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $\mathbb{K}$, reel sayılar $\mathbb{R}$ veya karmaşık sayılar $\mathbb{C}$ cismini, $\alpha > 0$ sayısı ise f fonksiyonuna bağlı bir sabiti göstermektedir. Yine, ağırlıklı Orlicz uzayı $L_\omega^\Phi(G)$, en az bir $\alpha > 0$ için

$$\int_G \Phi(\alpha \omega(x) |f(x)|) d\mu(x) < +\infty$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonunun, Lebesgue uzaylarında olduğu gibi hemen hemen her yerde eşit olma bağıntısına göre belirlediği denklik sınıflarından oluşmaktadır. Ayrıca, $L^\Phi(G)$ Orlicz uzayı ve $L_\omega^\Phi(G)$ ağırlıklı Orlicz uzayı tanımları göz önüne alınırsa

$$f \in L_\omega^\Phi(G) \Leftrightarrow f\omega \in L^\Phi(G)$$

denkliği geçerlidir. Böylece ağırlıklı Orlicz uzayının bir vektör uzayı olduğu kolayca görülür.

Önerme 5.1.5. Her $f \in L_\omega^\Phi(G)$ için

$$\|f\|_{\Phi, \omega}^\circ = \sup \left\{ \int_G |f(x)\omega(x)v(x)| d\mu(x) : v \in L^\Psi(G), \int_G \Psi(|v(x)|) d\mu(x) \leq 1 \right\} < +\infty$$

şeklinde tanımlı $\|\cdot\|_{\Phi,\omega}^\circ$ fonksiyonu $L_\omega^\Phi(G)$ ağırlıklı Orlicz uzayı üzerinde bir normdur.

Öte yandan, $(L^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi}^\circ)$ Orlicz uzayının Banach uzayı olması ve her $f \in L_\omega^\Phi(G)$ için $\|f\|_{\Phi,\omega}^\circ = \|f\omega\|_{\Phi}^\circ$ eşitliği kullanılırsa $(L_\omega^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,\omega}^\circ)$ ağırlıklı Orlicz uzayı Banach uzayı olur. Ayrıca, $f \mapsto f\omega$ dönüşümü ile $L_\omega^\Phi(G)$ ağırlıklı Orlicz uzayı $L^\Phi(G)$ Orlicz uzayına Banach uzayı olarak izomorftur. Yine, $(L_\omega^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,\omega}^\circ)$ uzayı tanımından $f \in L_\omega^\Phi(G)$ olması için gerek ve yeter koşul $\|f\|_{\Phi,\omega}^\circ < \infty$ olmasıdır.

Daha önceden belirtildiği gibi Orlicz uzayları Lebesgue uzaylarının genelleştirmesidir. Benzer şekilde ağırlıklı Orlicz uzaylarının da ağırlıklı Lebesgue uzaylarının genelleştirmesi olduğunu gösterelim.

G bir yerel kompakt değişmeli grup ve ω bir ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $L_\omega^p(G)$ ile gösterilen ağırlıklı Lebesgue uzayı

$$L_\omega^p(G) = \{f : G \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ ölçülebilir ve } \|f\|_{p,\omega} = \left(\int_G |f(x)\omega(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty\}$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca, $p = \infty$ ise

$$L_\omega^\infty(G) = \{f : G \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ ölçülebilir ve } \|f\|_{\infty,\omega} = \operatorname{esssup}_{x \in G} |f(x)\omega(x)| < +\infty\}$$

şeklinde tanımlıdır ve esasen sınırlı fonksiyonlar uzayı olarak adlandırılır. Burada, $1 < p < \infty$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($p = 1$ ise $q = \infty$) olmak üzere $L_\omega^p(G)$ uzayının dual uzayının $L_{\omega^{-1}}^q(G)$ olduğu biliniyor. Yine, Hahn-Banach teoreminden her $f \in L_\omega^p(G)$ için

$$\|f\|_{p,\omega} = \|f\omega\|_p = \left(\int_G |f(x)\omega(x)|^p dx \right)^{1/p} = \sup \left\{ \int_G |f(x)\omega(x)v(x)| dx : \|v\|_q \leq 1 \right\}$$

biliniyor [40].

Şimdi ω , G yerel kompakt değişmeli grubu üzerinde ağırlık fonksiyonu olmak üzere $L_\omega^\Phi(G)$ ağırlıklı Orlicz uzayında $x \geq 0$ için $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}$, ($1 < p < \infty$) Young fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda, $L_\omega^\Phi(G)$ uzayı tanımından

$$f \in L_\omega^\Phi(G) \text{ ancak ve ancak bir } \alpha > 0 \text{ için } \int_G \frac{|\alpha f(x)\omega(x)|^p}{p} d\mu(x) < +\infty$$

geçerlidir. Bu ise

$$\int_G |f(x)\omega(x)|^p d\mu(x) < +\infty$$

olmasına denktir. Böylece, $f\omega \in L^p(G)$ ve $f \in L_\omega^p(G)$ olur. Buradan $L_\omega^\Phi(G) = L_\omega^p(G)$ olduğu elde edilir.

Dikkat edilecek olursa, $L_\omega^\Phi(G)$ ağırlıklı Orlicz uzayında f fonksiyonuna bağlı olarak bulunan $\alpha > 0$ sayısı $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}$ aracılığı ile $L_\omega^p(G)$ ağırlıklı Lebesgue uzaylarına geçildiğinde

önemini yitirmektedir. Bu durum $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}$ Young fonksiyonunun Δ_2 koşulunu sağlamasından kaynaklanmaktadır.

Teorem 4.1.4 (ii) göz önüne alınırsa Φ Young fonksiyonu Δ_2 koşulunu sağlamak üzere

$$\int_G \Phi(|f(x)\omega(x)|)d\mu(x) < +\infty \text{ ancak ve ancak bir } \alpha > 0 \text{ için } \int_G \Phi(\alpha|f(x)\omega(x)|)d\mu(x) < +\infty$$

eşdeğerliği elde edilir.

Ayrıca, $1 < p < \infty$ olmak üzere $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}, x \geq 0$ Young fonksiyonunun tamlayıcı $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $\Psi(x) = \frac{x^q}{q}$ fonksiyonudur. Böylece, $\|\cdot\|_{\Phi,\omega}^\circ$ tanımından her $f \in L_\omega^\Phi(G)$ için

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Phi,\omega}^\circ &= \|f\omega\|_\Phi^\circ = \sup \left\{ \int_G |f(x)\omega(x)v(x)|dx : \int_G \Psi(|v(x)|)dx \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_G |f(x)\omega(x)v(x)|dx : \int_G \frac{|v(x)|^q}{q}dx \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ q^{1/q} \int_G \left| f(x)\omega(x) \frac{v(x)}{q^{1/q}} \right| dx : \left\| \frac{v}{q^{1/q}} \right\|_q \leq 1 \right\} \\ &= q^{1/q} \|f\omega\|_p = q^{1/q} \|f\|_{p,\omega} \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\|\cdot\|_{\Phi,\omega}^\circ$ ve $\|\cdot\|_{p,\omega}$ ağırlıklı normları eşit değildir. Fakat bu iki norm eşdeğerdir.

Özel olarak $p = 1$ durumunda ise $\Phi(x) = x$ Young fonksiyonu için $L_\omega^\Phi(G)$ ağırlıklı Orlicz uzayı $L_\omega^1(G)$ Lebesgue uzayıdır. Bu durumda, her $f \in L_\omega^\Phi(G)$ için $\|f\|_{\Phi,\omega} = \|f\|_{1,\omega}$ olur.

Yine $p = \infty$ ise

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ +\infty, & x > 1 \end{cases}$$

Young fonksiyonu için $L_\omega^\Phi(G) = L_\omega^\infty(G)$ esasen sınırlı fonksiyonlar uzayı elde edilir. Yine, burada $\|\cdot\|_{\infty,\omega} = \|\cdot\|_{\Phi,\omega}$ eşitliği geçerli olur.

Uyarı 5.1.6. Öte yandan, $L_\omega^\Phi(G)$ ağırlıklı Orlicz uzayında

(i) w ağırlık fonksiyonu her $x \in G$ için $\omega(x) = 1$ olarak seçilirse $L^\Phi(G)$ Orlicz uzayı,

(ii) $\omega = 1$ iken $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}, x \geq 0$ Young fonksiyonu için de $L^p(G)$ Lebesgue uzayları elde edilir.

$L^\Phi(G)$ Orlicz uzayı üzerinde $\|\cdot\|_\Phi^\circ$ Orlicz normundan başka $\|\cdot\|_\Phi$ Luxemburg normunun var olduğu biliniyor. Benzer şekilde, ağırlıklı Orlicz uzayı $L_\omega^\Phi(G)$ üzerinde de yukarıda tanımlanan $\|\cdot\|_{\Phi,\omega}^\circ$ normundan başka, Orlicz uzayındaki Luxemburg normuna benzer şekilde

her $f \in L_{\omega}^{\Phi}(G)$ için

$$\|f\|_{\Phi, \omega} = \inf \left\{ b > 0 : \int_G \Phi\left(\frac{|f(x)\omega(x)|}{b}\right) d\mu(x) \leq 1 \right\} < +\infty$$

normu da tanımlanır ve bu iki norm arasında her $f \in L_{\omega}^{\Phi}(G)$ için

$$\|f\|_{\Phi, \omega} \leq \|f\|_{\Phi, \omega}^{\circ} \leq 2\|f\|_{\Phi, \omega}$$

denkliği geçerlidir. Dolayısıyla $(L_{\omega}^{\Phi}(G), \|f\|_{\Phi, \omega})$ uzayı da bir Banach uzayı olarak elde edilir.

Önerme 5.1.7. Eğer Φ Young fonksiyonu Δ_2 koşulunu sağlarsa $C_c(G)$ kompakt destekli sürekli fonksiyonlar uzayı $L_{\omega}^{\Phi}(G)$ uzayında yoğundur.

5.1.1 $L_{\omega}^{\Phi}(G)$ Uzayında Kapsamalar

Bu kesimde, G bir yerel kompakt değişmeli grup, ω_1 ve ω_2 G üzerinde iki ağırlık fonksiyonu, Φ_1 ve Φ_2 iki Young fonksiyonu olmak üzere $L_{\omega_1}^{\Phi_1}(G)$ ve $L_{\omega_2}^{\Phi_2}(G)$ uzayları arasındaki kapsama ilişkileri incelenmiştir. Bu kapsama ilişkileri özel olarak $L^{\Phi}(G)$ Orlicz uzayları ve $L^p(G)$ Lebesgue uzayları içinde geçerlidir.

Tanım 5.1.8. ω_1 ve ω_2 G üzerinde iki ağırlık fonksiyonu olmak üzere bir $c > 0$ sayısı her $x \in G$ için

$$\omega_1(x) \leq c \omega_2(x)$$

olacak şekilde varsa $\omega_1 \preccurlyeq \omega_2$ ile gösterilir. Eğer ω_1 ve ω_2 ağırlık fonksiyonları için hem $\omega_1 \preccurlyeq \omega_2$ hem de $\omega_2 \preccurlyeq \omega_1$ ise ω_1 ve ω_2 ağırlıkları eşdeğerdir denir ve $\omega_1 \sim \omega_2$ ile gösterilir.

Örnek 5.1.9. $\mathbb{R}$ üzerindeki $\omega_1(x) = (1 + |x|)$, $x \in \mathbb{R}$ ve $\omega_2(x) = e^{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ ağırlık fonksiyonları için $c = 1$ olmak üzere $\omega_1 \preccurlyeq \omega_2$ olduğu kolayca görülür.

5.1.2 Kapsamalar ve Normlar Arasındaki İlişki

Bu kısımda, $L_{\omega_1}^{\Phi_1}(G)$ ile $L_{\omega_2}^{\Phi_2}(G)$ uzayları arasındaki kapsamalar, bu uzaylar üzerindeki $\|\cdot\|_{\Phi_1, \omega_1}$ ve $\|\cdot\|_{\Phi_2, \omega_2}$ normları aracılığı ile incelenmiştir.

Önerme 5.1.10. Φ_1, Φ_2 iki Young fonksiyonu ve ω_1, ω_2 iki ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$L_{\omega_2}^{\Phi_2}(G) \subseteq L_{\omega_1}^{\Phi_1}(G) \text{ ancak ve ancak bir } c > 0 \text{ ve her } f \in L_{\omega_2}^{\Phi_2}(G) \text{ için } \|f\|_{\Phi_1, \omega_1} \leq c \|f\|_{\Phi_2, \omega_2}$$

olmasıdır.

Sonuç 5.1.11. G bir yerel kompakt değişmeli grup, ω bir ağırlık fonksiyonu ve Φ bir Young fonksiyonu olsun. Eğer $L_{\omega}^{\Phi}(G) \subseteq L_{\omega}^1(G)$ ise en az bir $c > 0$ sayısı her $f \in L_{\omega}^{\Phi}(G)$ için

$$\|f\|_{1, \omega} \leq c \|f\|_{\Phi, \omega}$$

olacak şekilde vardır.

5.1.3 ω Ağırlık Fonksiyonuna Göre Kapsamalar

Bu kısımda Φ Young fonksiyonu, ω_1 ve ω_2 de ağırlık fonksiyonları olmak üzere $L_{\omega_1}^{\Phi_1}(G)$ ile $L_{\omega_2}^{\Phi_2}(G)$ uzayları arasındaki kapsamalar $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$ için incelenmiştir.

Teorem 5.1.12. Φ Young fonksiyonu, ω_1 ve ω_2 ağırlık fonksiyonları olmak üzere

$$\omega_1 \preccurlyeq \omega_2 \text{ ise } L_{\omega_2}^{\Phi}(G) \subseteq L_{\omega_1}^{\Phi}(G)$$

geçerli olur.

Sonuç 5.1.13. Φ Young fonksiyonu ve ω_1, ω_2 de G üzerinde ağırlık fonksiyonları olsun. Bu durumda

$$\omega_1 \sim \omega_2 \text{ ise } L_{\omega_1}^{\Phi}(G) = L_{\omega_2}^{\Phi}(G)$$

geçerlidir.

5.1.4 Φ Young Fonksiyonuna Göre Kapsamalar

Bu kısımda Φ_1 ve Φ_2 iki Young fonksiyonu ve ω, G yerel kompakt değişmeli grup üzerinde bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere $L_{\omega_1}^{\Phi_1}(G)$ ile $L_{\omega_2}^{\Phi_2}(G)$ uzayı arasındaki kapsama ilişkileri $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ için incelenmiştir.

Önerme 5.1.14. Φ_1 ve Φ_2 iki Young fonksiyonu, ω da ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$\Phi_1 < \Phi_2 \text{ ise } L_{\omega}^{\Phi_2}(G) \subseteq L_{\omega}^{\Phi_1}(G)$$

geçerlidir.

Uyarı 5.1.15. Önerme 5.1.14'ün tersi doğru değildir. Yani

$$L_{\omega}^{\Phi_2}(G) \subseteq L_{\omega}^{\Phi_1}(G) \nRightarrow \Phi_1 < \Phi_2.$$

Teorem 5.1.16. G kompakt grup ve Φ_1, Φ_2 iki Young fonksiyonu olmak üzere $\Phi_1 < \Phi_2$ ise $L_{\omega}^{\Phi_2}(G) \subseteq L_{\omega}^{\Phi_1}(G)$ olur.

Son olarak ağırlıklı Orlicz uzaylarının Young fonksiyonu ve ağırlık fonksiyonuna göre karşılaştırması aşağıdaki teoremdedir verilmiştir.

Teorem 5.1.17. Φ_1, Φ_2 Young fonksiyonları ve ω_1, ω_2 ağırlık fonksiyonları olmak üzere

$$\Phi_1 < \Phi_2 \text{ ve } \omega_1 \preccurlyeq \omega_2 \text{ ise } L_{\omega_2}^{\Phi_2}(G) \subseteq L_{\omega_1}^{\Phi_1}(G)$$

olur.

Uyarı 5.1.18. Teorem 5.1.17'nin tersi doğru değildir. Yani,

$$L_{\omega_2}^{\Phi_2}(G) \subseteq L_{\omega_1}^{\Phi_1}(G) \text{ ise } \Phi_1 < \Phi_2 \text{ ve } \omega_1 \preccurlyeq \omega_2$$

sağlanması gerekmez.

Örnek 5.1.19. G kompakt değişmeli grup olmak üzere ω_1 ve ω_2 , G üzerinde ağırlık fonksiyonları olsun. O halde $x \geq 0$ ve $1 < p_1 < p_2 < \infty$ için

$$\Phi_1(x) = \frac{x^{p_1}}{p_1}, \quad \Phi_2(x) = \frac{x^{p_2}}{p_2}$$

fonksiyonları alınırsa istenen elde edilir.

Lemma 5.1.20. G bir yerel kompakt değişmeli grup, ω bir ağırlık fonksiyonu ve Φ bir Young fonksiyonu olmak üzere $x_0 > 0$ için $\Phi(x_0) > 0$ olsun. Bu durumda, bir $c > 0$ sayısı vardır öyle ki her $x \geq x_0$ için $\Phi(x) \geq cx$ olacak şekilde bulunur.

Sonuç 5.1.21. G kompakt grup ve Φ Young fonksiyonu ise $L_\omega^\Phi(G) \subseteq L_\omega^1(G)$ geçerlidir.

Teorem 5.1.22. G bir yerel kompakt değişmeli grup, ω bir ağırlık fonksiyonu ve Φ bir Young fonksiyonu olmak üzere $\Phi'_+(x) > 0$ olsun. Bu durumda, $L_\omega^\Phi(G) \subseteq L_\omega^1(G)$ geçerlidir.

Teorem 5.1.23. G bir yerel kompakt grup, ω bir ağırlık fonksiyonu ve Φ bir Young fonksiyonu olsun. Eğer $L_\omega^\Phi(G) \subseteq L_\omega^1(G)$ ise $L_\omega^\Phi(G)$ girişim işlemine göre bir Banach cebiridir. Üstelik, G değişmeli bir yerel kompakt grup ise $(L_\omega^\Phi(G), *)$ değişmeli bir Banach cebiridir.

Sonuç 5.1.24. Eğer $\Phi'_+(0) > 0$ ise $L_\omega^\Phi(G)$ girişim işlemine göre bir Banach cebiridir.

Teorem 5.1.25. G bir yerel kompakt grup, ω bir ağırlık fonksiyonu ve Φ bir Young fonksiyonu olsun. Bu durumda, $L_\omega^\Phi(G) \subseteq L_\omega^\infty(G)$ olması için gerek ve yeter koşul G grubunun ayrık olmasıdır.

5.2 ORLICZ UZAYLARINDA BİLEŞKE OPERATÖRLER

Matematiksel analizin önemli operatörlerinden olan bileşke operatörlerinin Orlicz uzaylarında çalışması kapsamlı olarak incelenmiştir [13]. Bu kısımda $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve Φ fonksiyonu, Young fonksiyonunun özel bir hali olan Orlicz fonksiyonu olarak alınmıştır.

Tanım 5.2.1 (Orlicz Fonksiyonu). Bir $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ dışbükey fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa **Orlicz fonksiyonu** olarak adlandırılır.

- (i) Her $x \in \mathbb{R}$ için $\Phi(-x) = \Phi(x)$,
- (ii) $\Phi(0) = 0$,
- (iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = +\infty$,
- (iv) bir $x_0 \in (0, +\infty)$ için $\Phi(x_0) \neq 0$ ve $\Phi(x_0) \neq +\infty$,
- (v) $c_\Phi = \sup\{u > 0 : \Phi(u) < +\infty\}$ noktasında soldan sürekli.

Ayrıca Φ Orlicz fonksiyonu için bir diğer sabit $\sigma_\Phi = \sup\{u \geq 0 : \Phi(u) = 0\}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 5.2.2. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $T : X \rightarrow X$ dönüşüm olmak üzere, eğer her $S \in \mathcal{A}$ için $T^{-1}(S) \in \mathcal{A}$ ise T dönüşümüne ölçülebilir dönüşüm denir.

Tanım 5.2.3. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $T : X \rightarrow X$ ölçülebilir dönüşüm olsun. $S \in \mathcal{A}$ olmak üzere eğer $\mu(S) = 0$ için $\mu(T^{-1}(S)) = 0$ koşulu sağlanıyor ise T dönüşümüne singüler olmayan dönüşüm denir.

Tanım 5.2.4. T singüler olmayan bir dönüşüm olmak üzere μT^{-1} ölçüsü her $S \in \mathcal{A}$ için

$$\mu T^{-1}(S) = \mu(T^{-1}(S))$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 5.2.5. $L^0(\mu)$ ölçülebilir fonksiyonların oluşturduğu bir vektör uzayı olmak üzere, eğer $T : X \rightarrow X$ singüler olmayan dönüşüm ise her $f \in L^0(\mu)$ için

$$C_T f = f \circ T$$

şeklinde tanımlanan $C_T : L^0(\mu) \rightarrow L^0(\mu)$ dönüşümü iyi tanımlıdır.

Aşağıdaki örnek T singüler olmayan dönüşüm olmadığında C_T dönüşümünün iyi tanımlı olmadığını gösterir.

Örnek 5.2.6. $X = [0, 1]$ ve

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

olmak üzere, $\mu(\{1\}) = 0$ olup

$$\mu T^{-1}(\{1\}) = \mu(T^{-1}(\{1\})) = \mu\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = \frac{1}{2}$$

olduğundan T singüler olmayan dönüşüm değildir. Ayrıca, $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ ve $g(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ seçilirse,

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = \mu(\{1\}) = 0$$

olduğundan hemen hemen her $x \in X$ için $f = g$ olur. Böylece,

$$C_T f = f \circ T = \chi_{[0,1]} \circ T = \chi_{T^{-1}[0,1]} = \chi_{[0, \frac{1}{2})} \text{ ve } C_T g = g \circ T = \chi_{[0,1]} \circ T = \chi_{T^{-1}[0,1]} = \chi_{[0,1]}$$

bulunur. Buradan, $C_T f \neq C_T g$ olur. O halde C_T iyi tanımlı değildir.

Tanım 5.2.7. T singüler olmayan dönüşüm ve $f \in L^0(\mu)$ olmak üzere,

$$C_T f = f \circ T$$

şeklinde tanımlanan C_T dönüşümü $L^0(\mu)$ uzayından $L^0(\mu)$ uzayına sınırlı ise C_T dönüşümüne Orlicz uzayı üzerinde T dönüşümü tarafından belirlenen bileşke operatörü denir.

Tanım 5.2.8. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçü uzayı ve $Y \in \mathcal{A}$ için $T : Y \rightarrow X$ ölçülebilir dönüşüm olmak

üzere her $f \in L^\Phi(\mu)$ için,

$$C_T f(x) = \begin{cases} (f \circ T)(x), & x \in Y, \\ 0, & x \notin Y \end{cases}$$

dönüşümü tanımlansın. Eğer $C_T : L^\Phi(\mu) \rightarrow L^\Phi(\mu)$ sınırlı ise C_T dönüşümüne genelleştirilmiş bileşke operatörü denir.

Uyarı 5.2.9. Singüler olmayan her dönüşüm Orlicz uzaylarında bileşke operatörü oluşturmaz. Eğer Orlicz fonksiyonu olarak $x \geq 0$ ve $1 \leq p < \infty$ için $\Phi(x) = x^p$ şeklinde alınırsa Orlicz uzayının L^p Lebesgue uzayı olduğunu biliyoruz.

Özel olarak $X = \mathbb{R}$, μ Lebesgue ölçüsü, $T(x) = e^x$ ve $1 \leq p < \infty$ için $\Phi(x) = x^p$ olsun. $L^p(\mu)$ uzayında $T(x) = e^x$ dönüşümü singüler olmayan bir dönüşümdür.

Uyarı 5.2.10. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $L^p(\mu)$ uzayında singüler olmayan her $T : X \rightarrow X$ dönüşümü C_T bileşke operatörünü tanımlamaz fakat $L^\infty(\mu)$ uzayında singüler olmayan her dönüşüm bileşke operatörü tanımlar.

Aşağıdaki teorem ile C_T operatörünün modüler sınırlı olması için gerek ve yeter koşul verilecektir.

Teorem 5.2.11. $T : X \rightarrow X$ singüler olmayan dönüşüm olmak üzere

(i) Eğer $0 < \sigma_\Phi = c_\Phi < \infty$ ve $\Phi(f) < +\infty$ ise

$$\Phi(C_T f) = \Phi(f)$$

eşitliği gerçekleşir.

(ii) Eğer $0 \leq \sigma_\Phi < c_\Phi \leq \infty$ ve $\Phi(f) < +\infty$ ise

$$\Phi(C_T f) \leq K\Phi(f)$$

eşitsizliği sağlayacak bir $K > 0$ sayısının var olması için gerek ve yeter koşul

$$\mu T^{-1}(A) \leq K\mu(A)$$

eşitsizliğinin $\mu(A) < \infty$ koşulunu sağlayan her $A \in \mathcal{A}$ kümesi için geçerli olmasıdır.

Aşağıdaki teorem, Orlicz uzaylarında C_T operatörünün modüler sınırlılığı için Teorem 5.2.11'de bulunan gerek ve yeter koşulun gerçekleştiği durumda C_T operatörünün bileşke operatörü olduğunu belirtir.

Teorem 5.2.12. $T : X \rightarrow X$ singüler olmayan dönüşüm olsun. Eğer

$$\mu T^{-1}(A) \leq K\mu(A)$$

eşitsizliği bir $K > 0$ sayısı ve $\mu(A) < \infty$ olacak şekilde her $A \in \mathcal{A}$ kümesi için sağlanıyor ise $C_T : L^\Phi(\mu) \rightarrow L^\Phi(\mu)$ bileşke operatörüdür. Bu ise, bir $M > 0$ sayısı için

$$\|C_T f\|_\Phi \leq M \|f\|_\Phi$$

eşitsizliğinin her $f \in L^\Phi(\mu)$ fonksiyonu için sağlanmasıdır.

Uyarı 5.2.13. Teorem 5.2.12'nin tersi doğru olmayabilir.

Örnek 5.2.14. $X = \mathbb{R}$ ve Orlicz fonksiyonu

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, a] \\ +\infty, & x \in (a, +\infty) \end{cases}$$

ve $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = e^x$ singüler olmayan dönüşüm seçilirse C_T norm sınırlı olduğu halde

$$\mu T^{-1}(A) \leq L \mu(A)$$

eşitsizliği hiçbir L pozitif sayısı için sağlanmaz.

Lemma 5.2.15. Eğer Φ Young fonksiyonu Δ_2 koşulunu sağlarsa Teorem 5.2.12'nin tersi doğrudur.

Aşağıdaki teorem ile μ atomik olmayan sonsuz ölçü olmak üzere C_T operatörünün bileşke operatörü olması için gerek ve yeter koşul verilecektir.

Teorem 5.2.16. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ sonlu ölçü uzayı, μ atomik olmayan sonsuz ölçü, $T : X \rightarrow X$ singüler olmayan dönüşüm ve Φ fonksiyonu Δ_2 koşulunu sağlayan Orlicz fonksiyonu olmak üzere

$$C_T : L^\Phi(\mu) \rightarrow L^\Phi(\mu)$$

operatörünün bileşke operatörü olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{1}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\mu T^{-1}(A)}\right)} \leq \frac{K}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\mu(A)}\right)}$$

eşitsizliğinin bir $K \geq 1$ sayısı ve $0 < \mu(A) < \infty$ koşulunu sağlayan her $A \in \mathcal{A}$ kümesi için sağlanmasıdır.

5.3 BÜKÜLMÜŞ GİRİŞİM ALTINDA ORLICZ CEBİRLERİ

Bir yerel kompakt grup G üzerinde tanımlı Orlicz uzaylarını daha genel bir Banach cebir yapısıyla inceleyen ve ağırlıklı Lebesgue uzayları da dahil tüm çalışmaları genelleyen, soyut harmonik analizi Banach cebiri ve operatör cebiri teorisine ilişkin özellikler kapsamlı olarak [33, 34, 35, 36] çalışmalarında incelenmiştir.

Bu kısımda, G yerel kompakt grubu üzerinde бүкүлмүш girişime göre Orlicz cebirleri tanımlanmış ve temel homolojik özellikleri incelenmiştir. Osançlıol ve Öztöp [30] çalışmalarında eğer $L_\omega^\Phi(G) \subseteq L_\omega^1(G)$ ise $L_\omega^\Phi(G)$ ağırlıklı Orlicz uzayının girişim işlemine göre bir

Banach cebiri olduğunu göstermiştir. Bu kısımda bahsedilen çalışmalar $L^p_\omega(G) \subseteq L^1_\omega(G)$ koşulu kaldırılmasına yönelik çalışmalara dayanmaktadır.

Tanım 5.3.1. G bir yerel kompakt grup olmak üzere G üzerinde yerel integrallenebilir, ölçülebilir bir $\omega : G \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonu, eğer $\omega(e) = 1$, $\frac{1}{\omega} \in L^\infty(G)$ ve

$$\Omega(s, t) = \frac{\omega(st)}{\omega(s)\omega(t)} \in L^\infty(G \times G)$$

koşullarını sağlıyorsa, ω fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir. Buna göre,

$$L^\Phi_\omega(G) := \{f : G \rightarrow \mathbb{C} : f\omega \in L^\Phi(G)\}$$

şeklinde tanımlı uzay ağırlıklı Orlicz uzayı olarak adlandırılır ve $L^\Phi_\omega(G)$ uzayı $\|f\|_{\Phi, \omega} = \|f\omega\|_\Phi$ şeklinde tanımlı norm ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 5.3.2. G bir yerel kompakt grup olmak üzere $\Omega : G \times G \rightarrow \mathbb{C}^*$ ölçülebilir dönüşümü, eğer

$$(i) \quad \Omega(r, s)\Omega(rs, t) = \Omega(s, t)\Omega(r, st), \quad (r, s, t \in G),$$

$$(ii) \quad \Omega(r, e_G) = \Omega(e_G, r) = 1$$

koşullarını sağlıyorsa, Ω fonksiyonuna normalleştirilmiş 2 eş çevrim fonksiyon denir. Tüm normalleştirilmiş 2 eş çevrim fonksiyonların uzayı $\mathcal{Z}^2(G, \mathbb{C}^*)$ ile gösterilecektir.

G üzerinde $\mathbb{C}^*$ değerli herhangi bir Ω , 2 eş çevrim fonksiyonu, $0 \leq \theta < 2\pi$ için $\Omega(s, t) = |\Omega(s, t)|e^{i\theta}$ şeklinde tek türlü yazılır. Bu durumda, eğer

$$|\Omega|(s, t) = |\Omega(s, t)| \text{ ve } \Omega_{\mathbb{T}}(s, t) = e^{i\theta} \quad (5.1)$$

denirse, $\Omega = |\Omega|\Omega_{\mathbb{T}}$ olur. Böylece, $|\Omega|$ ve $\Omega_{\mathbb{T}}$ dönüşümleri G üzerinde sırasıyla, $\mathbb{R}^+$ ve $\mathbb{T}$ değerli 2 eş çevrim fonksiyonlardır.

Tanım 5.3.3. G bir yerel kompakt grubu üzerinde tanımlı $\mathbb{C}^*$ değerli tüm sınırlı eş çevrim fonksiyonların grubu

$$\mathcal{Z}^2_b(G, \mathbb{C}^*) := \{\Omega \in \mathcal{Z}^2(G, \mathbb{C}^*) : \Omega \in L^\infty(G \times G) \text{ ve } \Omega_{\mathbb{T}} \text{ sürekli}\}$$

şeklinde gösterilir. Ayrıca, $\omega : G \rightarrow \mathbb{R}^+$ ağırlık olmak üzere,

$$|\Omega|(s, t) = \frac{\omega(st)}{\omega(s)\omega(t)}, \quad (s, t \in G)$$

koşulunu sağlayan tüm $\omega \in \mathcal{Z}^2_b(G, \mathbb{C}^*)$ elemanlarının uzayı $\mathcal{Z}^2_{b\omega}(G, \mathbb{C}^*)$ ile gösterilecektir. Bu durumda $|\Omega|$ 'ya ω tarafından belirlenen veya ω ile ilişkili 2 eş sınır denir. Üstelik, eğer G bir ortalama (amenable) grup (yani, $L^\infty(G)$ üzerinde sol değişmez ortalaması olan grup) ise $\mathcal{Z}^2_b(G, \mathbb{C}^*) = \mathcal{Z}^2_{b\omega}(G, \mathbb{C}^*)$ olur.

Tanım 5.3.4. G bir yerel kompakt grubu üzerinde tanımlı f, g ölçülebilir fonksiyonları verilsin ve $\Omega \in Z_b^2(G, \mathbb{C}^*)$ olsun. E , G 'nin σ sonlu ölçülebilir bir alt kümesi olmak üzere $G \setminus E$ üzerinde $f = g = 0$ ise f ve g fonksiyonlarının Ω üzerindeki bükülmüş girişimi

$$f \otimes g(t) = \int_G f(s)g(s^{-1}t)\Omega(s, s^{-1}t)ds$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 5.3.5. $\Omega \in Z_b^2(G, \mathbb{C}^*)$ ve $\otimes, \Omega$ üzerinde bükülmüş girişim olsun. Eğer $(L^\Phi(G), \otimes)$ Banach cebiri ise bir başka deyişle, bir $C > 0$ sayısı, her $f, g \in L^\Phi$ için $f \otimes g \in L^\Phi(G)$ ve

$$\|f \otimes g\|_\Phi^\circ \leq C\|f\|_\Phi^\circ \|g\|_\Phi^\circ$$

olacak şekilde varsa $(L^\Phi(G), \otimes)$ ikilisine bir bükülmüş Orlicz cebiri denir.

Teorem 5.3.6. G bir yerel kompakt grup, $\Omega \in Z_b^2(G, \mathbb{C}^*)$ ve $\otimes, \Omega$ üzerinde bükülmüş girişim olsun. Bu durumda, aşağıdakiler geçerlidir.

(i) $S^\Phi(G)$ esasen $L^1(G)$ Banach modülüdür ve $L^\Phi(G), \otimes$ bükülmüş girişime göre $L^1(G)$ Banach modülüdür.

(ii) Eğer $u, v, L^\Psi(G)$ üzerinde negatif olmayan fonksiyonlar ve

$$|\Omega(s, t)| \leq u(s) + v(t), \quad s, t \in G$$

ise $(L^\Phi(G), \otimes)$ bükülmüş Orlicz cebiri olur ve $S^\Phi(G)$ kapalı alt cebiridir.

Tanım 5.3.7. Bir A Banach cebirinden dual ikili A modüllerine giden tüm sınırlı türevler iç türev ise A Banach cebiri **ortalama malı cebir** olarak adlandırılır.

Teorem 5.3.8. $\Omega \in Z_{bw}^2(G, \mathbb{C}^*)$ ve $\omega, |\Omega|$ ile ilişkili ağırlık fonksiyonu olsun. Eğer $(L^\Phi(G), \otimes)$ bir bükülmüş Orlicz cebiri ise aşağıdakiler gerçekleşir.

(i) $(S^\Phi(G), \otimes)$ kompakt destekli fonksiyonlardan oluşan yaklaşık birim içerir.

(ii) G bir ayrık olmayan yerel kompakt grup olsun. Bu durumda, $(S^\Phi(G), \otimes)$ nin yaklaşık biriminin $(L^\Phi(G), \otimes)$ için de yaklaşık birim olması için gerek ve yeter koşul $L^\Phi(G) = S^\Phi(G)$ ve buna denk olarak $\Phi \in \Delta_2$ olmasıdır.

(iii) G bir ayrık olmayan yerel kompakt grup olsun. Bu durumda $(S^\Phi(G), \otimes)$ ve $(L^\Phi(G), \otimes)$ yaklaşık birime sahip değildir.

(iv) $(L^\Phi(G), \otimes)$ ya da $(S^\Phi(G), \otimes)$ 'nin birime sahip olması için gerek ve yeter koşul G 'nin ayrık grup olmasıdır.

Teorem 5.3.9. G bir ayrık olmayan yerel kompakt grup ve $\Omega \in Z_{bw}^2(G, \mathbb{C}^*)$ olsun. Eğer $(L^\Phi(G), \otimes)$ bükülmüş Orlicz cebiri ise $(L^\Phi(G), \otimes)$ ve $(S^\Phi(G), \otimes)$ ortalama malı değildir.

Teorem 5.3.10. G bir ayrık grup ve ω , G üzerinde bir ağırlık olsun. Eğer $(\ell_\omega^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,\omega})$ bir Banach cebiri ve $\frac{1}{\omega} \in S^\Psi(G)$ ise aşağıdakiler denktir.

- (i) $\ell_\omega^\Phi(G)$ ortalamalıdır,
- (ii) $S^\Psi(G)$ ortalamalıdır,
- (iii) G sonludur.

Teorem 5.3.11. $\Omega : G \times G \rightarrow \mathbb{C}^*$ bir 2 eş çevrim fonksiyon olsun. Eğer $L^\Phi(G) \subseteq L^2(G)$ ve $u, v \in L^2(G)$ elemanları

$$|\Omega(s, t)| \leq u(s) + v(t), \quad s, t \in G$$

olacak şekilde varsa $(L^\Phi(G), \otimes)$ maksimal operatör uzay yapısıyla birlikte bir bükülmüş Orlicz cebiridir ve bir operatör cebirine izomorftur. Bir başka deyişle, H bir Hilbert uzayı olmak üzere bir $B \subseteq B(H)$ kapalı alt cebirine izomorftur.

Tanım 5.3.12. A bir Banach cebiri olmak üzere, sınırlı her $D : A \rightarrow A^*$ türevi iç türev ise A **zayıf ortalamalı** olarak adlandırılır.

Teorem 5.3.13. G bir yerel değişmeli grup, ω , G üzerinde bir ağırlık fonksiyonu ve $(L_\omega^\Phi(G), *)$ bir Banach cebiri olsun. Kabul edelim ki, hiçbir $\xi : G \rightarrow \mathbb{C}$

$$\tilde{\xi}(s) := \frac{\xi(s)}{\omega(s)\omega(s^{-1})}$$

şeklinde sıfırdan farklı sürekli bir grup homeomorfisi var olmasın. Bu durumda, $S^\Psi(G)$ zayıf ortalamalı cebir olur.

5.4 GRUP CEBİRLERİ ÜZERİNDE TANIMLI ORLICZ MODÜLLERİNİN DEĞİŞMEZ ALT KÜMELERİ VE HOMOLOJİK ÖZELLİKLERİ

G yerel kompakt grup ve Φ Young fonksiyonu olmak üzere, $L^\Phi(G)$ Orlicz uzaylarının $L^1(G)$ üzerinde girişim işlemine göre modül olması kullanılarak, projektiflik, injektiflik, yassı (flat) olma gibi homolojik özellikleri [48] çalışmasında araştırılmış ve çarpanlar uzayı, özellikle kompakt çarpanlar uzayı belirlenmiştir.

Yine, $L^\Phi(G)$ Orlicz uzaylarının $L^1(G)$ Banach modül yapısı kullanılarak kapalı, dışbükey, değişmez alt kümeleri belirlenmiş, afin dönüşümler aracılığıyla kompakt çarpanlar uzayı incelenmiştir. Böylece grubun kompaktlığının çarpanlar uzayının kompaktlığı ile belirlenebilmesi için bir ölçüt de elde edilmiştir. Bu yapılar, ağırlıklı Orlicz uzaylarına [49] çalışmasında genişletilmiştir.

Tanım 5.4.1. A bir Banach cebiri ve P bir sol Banach A modülü olsun. Eğer her bir E ve F sol Banach A modülü, her bir $T \in {}_A B(E, F)$ makul örten dönüşümü ve her bir $S \in {}_A B(P, F)$ dönüşümü için öyle bir $R \in {}_A B(P, E)$ dönüşümü $T \circ R = S$ olacak şekilde bulunabiliyorsa P 'ye projektif A modülü denir.

Tanım 5.4.2. A bir Banach cebiri ve J bir sol Banach A modülü olsun. Eğer her bir E ve F sol Banach A modülü, $T \in {}_A B(E, F)$ makul, birebir dönüşümü ve her bir $S \in {}_A B(E, J)$ dönüşümü için öyle bir $R \in {}_A B(F, J)$ dönüşümü $R \circ T = S$ olacak şekilde varsa J injektif A modülü denir.

Teorem 5.4.3. G bir yerel kompakt grup ve Φ bir Young fonksiyonu olsun. Bu durumda, $L^\Phi(G)$ uzayının projektif sol Banach $L^1(G)$ modülü olması için gerek ve yeter koşul G grubunun kompakt olmasıdır.

Önerme 5.4.4. G bir yerel kompakt grup, (Φ, Ψ) tamlayan Young fonksiyon çifti ve $\Psi \in \Delta_2$ olsun. Eğer $L^\Phi(G)$ projektif sol Banach $L^1(G)$ modülü ve G ayrılabilir ise G kompakttır.

$L^\Phi(G)$ Orlicz uzayının hangi koşullar altında injektif ve yassı modül olduğunu gösteren aşağıdaki sonuç önemlidir.

Önerme 5.4.5. G bir yerel kompakt grup ve (Φ, Ψ) tamlayan Young fonksiyon çifti olsun. Eğer G ortalamalı grup ise aşağıdakiler gerçekleşir.

- (i) $L^\Phi(G)$ yassı sol Banach $L^1(G)$ modülüdür.
- (ii) $L^\Phi(G)$ 'nin dual modülü $L^\Psi(G)$ injektif sağ Banach $L^1(G)$ modülüdür.
- (iii) Eğer Φ ve Ψ Young fonksiyonlarının her ikisi de Δ_2 koşulunu sağlarsa $L^\Phi(G)$ dual modül olduğundan hem injektif hem yassı sol Banach $L^1(G)$ modülüdür.

Tanım 5.4.6. $L^\Phi(G)$ uzayının bir C alt kümesi için, eğer her $f \in C$ ve her $x \in G$ için $L_x f \in C$ oluyorsa C ötelemeler altında değişmezdir denir.

G bir yerel kompakt grup olmak üzere, temel olarak $M(G)$ ölçü uzayının aşağıdaki alt kümeleri önemlidir.

- (i) $P(G) = \{\mu \in M(G) : \|\mu\| = 1 \text{ ve } \mu \geq 0\}$,
- (ii) $P_1(G) = \{h \in L^1(G) : \|h\|_1 = 1 \text{ ve } h \geq 0\}$,
- (iii) $E(G) = \{\delta_a : a \in G\}$.

Şimdi $L^\Phi(G)$ Orlicz uzayının kapalı, dışbükey, sol ötelemeler altında değişmez kalan alt kümelerinin karakterizasyonu ile ilgili aşağıdaki sonuçları verelim.

Teorem 5.4.7. G bir yerel kompakt grup, Φ bir Young fonksiyonu ve $C, L^\Phi(G)$ uzayının kapalı, dışbükey bir alt kümesi olsun. Bu durumda, C kümesinin sol ötelemeler altında değişmez olması için gerek ve yeter koşul her $h \in P_1(G)$ için $h * C \subseteq C$ olmasıdır.

Sonuç 5.4.8. G bir yerel kompakt grup, Φ bir Young fonksiyonu olmak üzere $I, L^\Phi(G)$ uzayının kapalı bir alt vektör uzayı olsun. Bu durumda, $L^1(G) * I \subseteq I$ olması için gerek ve yeter koşul I alt vektör uzayının sol ötelemeler altında değişmez olmasıdır.

Teorem 5.4.9. G bir yerel kompakt grup, Φ bir Young fonksiyonu olsun. Bu durumda, G grubunun kompakt olmaması için gerek ve yeter koşul $L^\Phi(G)$ uzayının boştan farklı her kapalı, dışbükey, sol ötelemeler altında değişmez alt kümesinin orijini içermesidir.

Teorem 5.4.10. G bir yerel kompakt grup ve Φ bir Young fonksiyonu olsun. Bu durumda, G grubunun kompakt olmaması için gerek ve yeter koşul $L^\Phi(G)$ uzayının boştan farklı her kompakt, dışbükey, sol ötelemeler altında değişmez alt kümesinin orijin olmasıdır.

$L^\Phi(G)$ Orlicz uzaylarının alt kümelerinde sürekli ve afin dönüşümlerinin karakterize edildiği aşağıdaki sonuçları verelim.

Teorem 5.4.11. G kompakt olmayan bir yerel kompakt grup, Φ bir Young fonksiyonu olmak üzere $C, L^1(G)$ uzayının boştan farklı, kapalı, dışbükey, sol ötelemeler altında değişmez bir alt kümesi ve $B, L^\Phi(G)$ uzayının boştan farklı, zayıf kompakt, kapalı, dışbükey, sol ötelemeler altında değişmez bir alt kümesi olsun. Eğer $T : B \rightarrow C$ dönüşümü sürekli, afin ve her $x \in G$, her $f \in B$ için $T(L_x f) = L_x T f$ koşulunu sağlıyor ise $T(f) = 0$ olur.

Teorem 5.4.12. G bir yerel kompakt grup, Φ bir Young fonksiyonu olmak üzere, $C, L^\Phi(G)$ uzayının zayıf kompakt, kapalı, sınırlı ve sol ötelemeler altında değişmez bir alt kümesi ve $T : P_1(G) \rightarrow C$ sürekli, afin bir dönüşüm olsun. Aşağıdakiler denktir.

(i) T tüm sol öteleme dönüşümleri ile değişmelidir,

(ii) Bir $f \in C$ fonksiyonu her $h \in P_1(G)$, $T(h) = h * f$ koşulunu sağlayacak şekilde vardır.

Son olarak, önceki kısımda yapılanların bir uygulaması olarak $L^\Phi(G)$ Orlicz uzayları için kompakt çarpanlar uzayının karakterize edildiği aşağıdaki sonuçları verelim. Elde edilen sonuçları vermeden aşağıdaki tanımları verelim.

Tanım 5.4.13. G bir yerel kompakt grup, Φ ve Ψ Young fonksiyonları olsun. $T, L^\Psi(G)$ uzayından $L^\Phi(G)$ uzayına giden sürekli, lineer ve öteleme operatörleri ile değişmeli bir dönüşüm ise, yani her $x \in G$ ve $f \in L^\Psi(G)$ için $L_x(Tf) = T(L_x f)$ oluyorsa T operatörüne $L^\Psi(G)$ uzayından $L^\Phi(G)$ uzayına giden bir çarpan denir. $L^\Psi(G)$ uzayından $L^\Phi(G)$ uzayına giden tüm çarpanların oluşturduğu küme $M(L^\Psi(G), L^\Phi(G))$ ile gösterilecektir.

Teorem 5.4.14. G bir yerel kompakt grup, (Φ, Ψ) tamlayan Young fonksiyon çifti ve $\Phi, \Psi \in \Delta_2$ olmak üzere, $T : L^1(G) \rightarrow L^\Phi(G)$ sınırlı, lineer bir operatör olsun. Bu durumda, $T \in M(L^1(G), L^\Phi(G))$ olması için gerek ve yeter koşul bir $f \in L^\Phi(G)$ fonksiyonunun her $h \in L^1(G)$ için $T(h) = h * T(f)$ koşulunu sağlayacak şekilde var olmasıdır.

Teorem 5.4.15. Eğer G kompakt bir grup ise $L^1(G)$ uzayından $L^\Phi(G)$ uzayına giden her T çarpanı kompakttır.

Teorem 5.4.16. G kompakt olmayan bir yerel kompakt grup ve Φ, Ψ Young fonksiyonları olsun. Bu durumda, $L^\Psi(G)$ uzayından $L^\Phi(G)$ uzayına giden tek kompakt çarpan sıfırdır.

Teorem 5.4.17. G kompakt olmayan bir yerel kompakt grup ve $A, L^\Phi(G)$ uzayının zayıf kompakt, kapalı, sol ötelemeler altında değişmez alt uzayı olsun. Eğer $T : A \rightarrow L^1(G)$ sınırlı lineer operatörü sol öteleme dönüşümleriyle değişmeli ise T operatörü sıfırdır.

5.5 AŞIRI GRUPLAR ÜZERİNDE AĞIRLIKLI ORLICZ UZAYLARI

Aşırı gruplar (hypergroup) üzerinde tanımlı Orlicz uzaylarının Banach cebir yapısı [37] çalışmasında kapsamlı olarak incelenmiştir.

K bir aşırı grup, ω bir ağırlık fonksiyonu ve (Φ, Ψ) tamlayan Young fonksiyon çifti olmak üzere $L_\omega^\Phi(K)$ ağırlıklı Orlicz uzayı tanımlanmış ve girişim işlemine göre cebirsel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, bu uzay için yaklaşık birim araştırılmıştır ve bir K değişmeli aşırı grubu için bu uzayın maksimal idealler uzayı belirlenmiştir.

Öncelikle, çalışmada kullanılan bazı temel kavram ve tanımları verelim.

Tanım 5.5.1. K bir yerel kompakt Hausdorff uzayı ve $\mathbf{M}(K)$, K üzerinde tanımlı tüm kompleks değerli Radon ölçülerinin uzayı olsun. Kabul edelim ki, $\mathbf{M}(K) \times \mathbf{M}(K)$ uzayından $\mathbf{M}(K)$ uzayına pozitif ve sürekli $(\mu, \nu) \mapsto \mu * \nu$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde var olsun.

- (i) $(\mathbf{M}(K), +, *)$ bir cebirdir,
- (ii) Her $x, y \in K$ için $\delta_x * \delta_y$ olasılık ölçüsü kompakt desteklidir,
- (iii) Bir $e \in K$ elemanı, her $x \in K$ için $\delta_x * \delta_e = \delta_e = \delta_e * \delta_x$ koşulunu sağlayacak şekilde vardır,
- (iv) Bir $x \mapsto x^-$ topolojik involüsyonu, her $x, y \in K$ ve $f \in C_0(K)$ için $(\delta_x * \delta_y)(f^-) = (\delta_y * \delta_x)(f)$ olacak şekilde vardır. Burada $f^-(t) = f(t^-)$ şeklindedir,
- (v) $e \in \text{supp}(\delta_x * \delta_x)$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul $y = x^-$ olmasıdır,
- (vi) $K \times K$ uzayından $C(K)$ uzayına $(x, y) \mapsto \text{supp}(\delta_x * \delta_x)$ dönüşümü süreklidir. Burada, $C(K)$, K 'nın kompakt alt kümelerinin uzayıdır,

Bu durumda, $K = (K, *, ^-, e)$ bir aşırı grup olarak adlandırılır.

Tanım 5.5.2. Bir K aşırı grubunun merkezi

$$Z(K) := \{x \in K : \delta_x * \delta_{x^-} = \delta_e = \delta_{x^-} * \delta_x\}$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi çalışmanın temel teoremlerini kısaca verelim.

Teorem 5.5.3. Kabul edelim ki $L_\omega^\Phi(K) \subseteq L_\omega^1(K)$ ve her bir $y \in K$, $f \in L_\omega^\Phi(K)$ için

$$\|L_y f\|_{\Phi\omega} \leq \omega(y) \|f\|_{\Phi,\omega}$$

olsun. Bu durumda, $L_\omega^\Phi(K)$ girişim işlemine göre bir Banach cebiridir. Ayrıca, $L_\omega^\Phi(K)$ uzayının değişmeli olması için gerek ve yeter koşul K 'nın değişmeli olmasıdır.

Teorem 5.5.4. $L_\omega^\Phi(K)$ ağırlıklı Orlicz cebiri ve V , K 'da birimin kompakt komşuluğu olsun. $\mathcal{U}$, K 'da birimin koşulluklar tabanı ve her $U \in \mathcal{U}$ için $U \subseteq V$ sağlansın. Bu durumda, $L_\omega^\Phi(K)$ uzayındaki kompakt destekli fonksiyonları içeren bir (e_U) ağı her $f \in C_c(K)$ için $e_U * f \rightarrow f$ olacak şekilde vardır.

Teorem 5.5.5. Eğer K bir ayrık grup ise $L^\Phi_\omega(K) \subseteq L^\infty_\omega(K)$ olur.

Önerme 5.5.6. K değişmeli bir aşırı grup ve $L^\Phi_\omega(K)$ cebir olsun. Her $\xi \in X^\omega_b(K)$ ve $f \in L^\Phi_\omega(K)$ için

$$\psi_\xi(f) := \int_K f(x)\xi(x)dx$$

tanımlayalım. Bu durumda, $\psi_\xi, L^\Phi_\omega(K)$ üzerinde çarpımsal bir fonksiyonel olur.

Önerme 5.5.6'nın hipotezleri geçerli olsun. Aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.5.7. Eğer $\psi, L^\Phi_\omega(K)$ üzerinde sıfırdan farklı çarpımsal bir fonksiyonel ise bir tek $\xi \in X^\omega_b(K)$ vardır ve $\psi = \psi_\xi$ olur.

Teorem 5.5.8. $L^\Phi_\omega(K)$ ağırlıklı Orlicz cebiri olsun. Eğer $I, L^\Phi_\omega(K)$ 'nın sol ötelemeler altında değişmez kapalı bir alt vektör uzayı ise $I, L^\Phi_\omega(K)$ 'nın bir sol idealidir.

Teorem 5.5.9. $I, L^\Phi_\omega(K)$ Orlicz cebirinin bir kapalı sol ideali olsun. Bu durumda, her bir $x \in Z(K)$ ve $f \in I \cap C_c(K)$ için $L_x f \in I$ olur.

5.6 AĞIRLIKLIL ORLICZ UZAYLARINDA AYRIK DİNAMİKLER

Yerel kompakt gruplarda tanımlı ağırlıklı Orlicz uzayları üzerinde aşırı çevrimlik, ayrık geçişlilik gibi lineer dinamikler kavramı Lebesgue uzaylarında yapılan çalışmaları kapsayıcı şekilde [8, 9] çalışmalarında ele alınmıştır. $L^p(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{C}), \ell^p(\mathbb{Z})$ uzayları üzerindeki dönüşümler lineer dinamikler konusunun araştırılmasında önemli rol oynamıştır. Bu uzaylar, yerel kompakt gruplar üzerinde tanımlı Lebesgue uzaylarının özel halleridir.

Ana teoremleri vermeden önce bu konuyla ilgili temel kavram ve tanımları verelim.

Tanım 5.6.1. X ayrılabilir bir Banach uzayı ve $N \geq 2$ olmak üzere, X üzerinde $T_1, T_2, \dots, T_N$ operatörleri için boştan farklı açık $U, V_1, V_2, \dots, V_N \subseteq X$ kümeleri verildiğinde

$$\emptyset \neq U \cap T_1^{-n}(V_1) \cap T_2^{-n}(V_2) \cap \dots \cap T_N^{-n}(V_N)$$

olacak şekilde Bir $n \in \mathbb{N}$ varsa $T_1, T_2, \dots, T_N$ operatörlerine ayrık topolojik geçişli veya köşegensel topolojik geçişli denir.

Eğer yukarıda verilen koşul, bazı n 'lerden sonra sağlanıyorsa $T_1, T_2, \dots, T_N$ operatörlerine ayrık topolojik olarak karıştıran (mixing) denir.

Tanım 5.6.2. X ayrılabilir bir Banach uzayı ve $N \geq 2$ olmak üzere, X üzerinde $T_1, T_2, \dots, T_N$ operatörleri için eğer $X^N = X \times X \times \dots \times X$ köşegenlerinde $(x, x, \dots, x)$ vektörleri

$$\{(x, x, \dots, x), (T_1 x, T_2 x, \dots, T_N x), (T_1^2 x, T_2^2 x, \dots, T_N^2 x)\}$$

X^N 'de yoğun olacak şekilde varsa $T_1, T_2, \dots, T_N$ operatörlerine ayrık aşırı döngüsel veya köşegensel aşırı döngüsel denir. Bu durumda, $x \in X$ elemanına da $T_1, T_2, \dots, T_N$ operatörleri ile ilişkili köşegensel aşırı döngüsel vektör denir.

G bir yerel kompakt grup ve $a \in G$ olmak üzere, her $f \in L_{\omega}^{\Phi}(G)$ için

$$(T_a f)(x) = f(xa^{-1}), \quad x \in G$$

şeklinde tanımlanan $T_a : L_{\omega}^{\Phi}(G) \rightarrow L_{\omega}^{\Phi}(G)$ dönüşümü bir sol öteleme operatörüdür. Eğer $S_a := T_{a^{-1}}$ denirse, $T_a(S_a(f)) = S_a T_a(f) = f$ olur.

Tanım 5.6.3. $a \in G$ olmak üzere, eğer a tarafından üretilen $G(a)$ kapalı alt grubu kompakt ise a elemanı periyodik veya kompakt olarak adlandırılır. G grubunun periyodik olmayan elemanları aperiodyk olarak adlandırılır. Eğer bir $a \in G$ elemanı sonlu sıralı ise torsiyon elemanı olarak adlandırılır.

Teorem 5.6.4. G ikinci sayılabilir bir yerel kompakt grup, ω, G üzerinde bir ağırlık fonksiyonu ve $\Phi \in \Delta_2$ olsun. Bir $N \geq 2$ olmak üzere, $1 \leq l \leq N$ için $a_l \in G$ aperiodyk ve $T_{a_l}, L_{\omega}^{\Phi}(G)$ üzerinde öteleme dönüşümü olsun. Bu durumda, aşağıda verilen (ii) koşulu sağlanıyorsa (i) koşulu da sağlanır.

(i) $T_{a_1}, T_{a_2}, \dots, T_{a_N}, L_{\omega}^{\Phi}(G)$ üzerinde ayrık topolojik geçişlidir.

(ii) Her bir $K \subseteq G$, $\lambda(K) > 0$ alt kümesi için K 'da bir Borel kümeleri dizisi (E_k) ve kesin artan $(n_k) \subset \mathbb{N}$ dizisi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{v \in \Omega} \int_{K \setminus E_k} |v(x)| \omega(x) d\lambda(x) = 0,$$

$1 \leq l \leq N$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{v \in \Omega} \int_{E_k} |v(xa_l^{\pm n_k})| \omega(xa_l^{\pm n_k}) d\lambda(x) = 0$$

ve $1 \leq l, s \leq N, l \neq s$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{v \in \Omega} \int_{E_k} |v(xa_s^{-n_k} a_l^{n_k})| \omega(xa_s^{-n_k} a_l^{n_k}) d\lambda(x) = 0$$

olacak şekilde vardır. Burada, ω, G üzerinde $\int_G \Psi(|v|) d\lambda \leq 1$ koşulunu sağlayan v Borel fonksiyonlarının kümesidir.

Teorem 5.6.4'te (ii) koşulundaki (n_k) alt dizisi tüm (n) dizisiyle değiştirilirse aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.6.5. G ikinci sayılabilir bir yerel kompakt grup, ω, G üzerinde bir ağırlık fonksiyonu ve $\Phi \in \Delta_2$ olsun. $N \geq 2$ olmak üzere, $1 \leq l \leq N$ için $a_l \in G$ aperiodyk ve $T_{a_l}, L_{\omega}^{\Phi}(G)$ üzerinde öteleme dönüşümü olsun. Bu durumda aşağıda verilen (ii) koşulu sağlanıyorsa (i) koşulu da sağlanır.

(i) $T_{a_1}, T_{a_2}, \dots, T_{a_N}, L_{\omega}^{\Phi}(G)$ üzerinde ayrık topolojik olarak karıştırandır.

(ii) Her bir $K \subseteq G$, $\lambda(K) > 0$ alt kümesi için K 'da bir Borel kümeleri dizisi (E_n)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{v \in \Omega} \int_{K \setminus E_n} |v(x)| \omega(x) d\lambda(x) = 0,$$

$1 \leq l \leq N$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{v \in \Omega} \int_{E_n} |v(xa_l^{\pm n})| \omega(xa_l^{\pm n}) d\lambda(x) = 0$$

ve $1 \leq l, s \leq N$, $l \neq s$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{v \in \Omega} \int_{E_n} |v(xa_s^{-n_k} a_l^n)| \omega(xa_s^{-n_k} a_l^n) d\lambda(x) = 0$$

olacak şekilde vardır. Burada, ω, G üzerinde $\int_G \Psi(|v|) d\lambda \leq 1$ koşulunu sağlayan v Borel fonksiyonlarının kümesidir.

Şimdi $L_\omega^\Phi(G)$ üzerinde ayrık geçişli dönüşümler için gerekli koşulları verelim.

Teorem 5.6.6. G ikinci sayılabilir bir yerel kompakt grup, ω, G üzerinde bir ağırlık fonksiyonu ve $\Phi \in \Delta_2$ olsun. $N \geq 2$ olmak üzere $1 \leq l \leq N$ için $a_l \in G$ aperiodyik, $l \neq s$ için $K \cap Ka_s^{-n} a_l^n = \emptyset$ ve $n \in \mathbb{N}$ yeterince büyük olsun. $T_{a_l}, L_\omega^\Phi(G)$ üzerinde öteleme dönüşümü olsun. Bu durumda aşağıda verilen (i) koşulu sağlanıyorsa (ii) koşulu da sağlanır.

(i) $T_{a_1}, T_{a_2}, \dots, T_{a_N}, L_\omega^\Phi(G)$ üzerinde ayrık topolojik geçişlidir.

(ii) Her bir $K \subseteq G$, $\lambda(K) > 0$ alt kümesi için K 'da bir Borel kümeleri dizisi (E_k) ve kesin artan $(n_k) \subset \mathbb{N}$ dizisi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{v \in \Omega} \int_{K \setminus E_k} |v(x)| \omega(x) d\lambda(x) = 0,$$

$1 \leq l \leq N$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{v \in \Omega} \int_{E_k} |v(xa_l^{\pm n_k})| \omega(xa_l^{\pm n_k}) d\lambda(x) = 0$$

ve $1 \leq l, s \leq N$, $l \neq s$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{v \in \Omega} \int_{E_k} |v(xa_s^{-n_k} a_l^{n_k})| \omega(xa_s^{-n_k} a_l^{n_k}) d\lambda(x) = 0$$

olacak şekilde vardır. Burada, ω, G üzerinde $\int_G \Psi(|v|) d\lambda \leq 1$ koşulunu sağlayan v Borel fonksiyonlarının kümesidir.

Sonuç 5.6.7. G ikinci sayılabilir bir yerel kompakt grup, ω, G üzerinde bir ağırlık fonksiyonu ve $\Phi \in \Delta_2$ olsun. $N \geq 2$ olmak üzere $1 \leq l \leq N$ için $a_l \in G$ aperiodyik, $l \neq s$ için

$K \cap K a_s^{-n} a_n^n = \emptyset$ ve $n \in \mathbb{N}$ yeterince büyük ve $T_{a_l}, L_\omega^\Phi(G)$ üzerinde öteleme dönüşümü olsun. Bu durumda, aşağıda verilen (i) koşulu sağlanıyorsa (ii) koşulu da sağlanır.

(i) $T_{a_1}, T_{a_2}, \dots, T_{a_N}, L_\omega^\Phi(G)$ üzerinde ayrık topolojik olarak karıştırandır.

(ii) Her bir $K \subseteq G, \lambda(K) > 0$ alt kümesi için K 'da bir Borel kümeleri dizisi (E_n)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{v \in \Omega} \int_{K \setminus E_n} |v(x)| \omega(x) d\lambda(x) = 0,$$

$1 \leq l \leq N$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{v \in \Omega} \int_{E_n} |v(x a_l^{\pm n})| \omega(x a_l^{\pm n}) d\lambda(x) = 0$$

ve $1 \leq l, s \leq N, l \neq s$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{v \in \Omega} \int_{E_n} |v(x a_s^{-n_k} a_l^n)| \omega(x a_s^{-n_k} a_l^n) d\lambda(x) = 0$$

olacak şekilde vardır. Burada, ω, G üzerinde $\int_G \Psi(|v|) d\lambda \leq 1$ koşulunu sağlayan v Borel fonksiyonlarının kümesidir.

Not edelim ki, $G = \mathbb{R}$ için, Teorem 5.6.4 ve Teorem 5.6.6 birleştirilirse $L_\omega^\Phi(\mathbb{R})$ üzerinde ayrık geçişlilik için gerek ve yeter koşul elde edilir.

5.7 YARI BANACH ORLICZ MODÜLASYON UZAYLARINDA SÜREKLİLİK VE BARGMANN DÖNÜŞÜMLERİ

Modern Fourier Analiz olarak da bilinen zaman frekans analizi son yıllarda matematiksel analizin önemli araştırma alanlarından birisi olmuştur. Modülasyon operatörünün önemli rol oynadığı zaman frekans analizine kısa zamanlı Fourier dönüşümü olarak da bakılabilir. Orlicz uzaylarında ve özellikle yarı Banach Orlicz uzaylarında bu kavramlar [44] çalışmasında kapsamlı olarak incelenmiştir. Yarı Orlicz modülasyon uzaylarında süreklilik, kompaktlık, değişmezlik özellikleri araştırılmıştır. Ayrıca, bu uzayların Gabor açılımları ve Bargmann dönüşümleri altındaki görüntüleri verilmiştir. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ klasik Schwartz uzayını ve $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ distribüsyon uzayını göstermektedir. Ayrıca, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ uzayının $L^p(\mathbb{R}^d)$ Lebesgue uzayında yoğun olduğu kolayca elde edilir.

Öncelikle çalışma boyunca kullanılan temel kavram ve tanımları verelim.

Tanım 5.7.1. $0 < s \in \mathbb{R}$ sabitlensin. Roumieu tip (Beurling tip) $\mathcal{S}_s(\mathbb{R}^d)$ ($\Sigma_s(\mathbb{R}^d)$) Gelfand-Shilov uzayı bazı $h > 0$ için

$$\|f\|_{\mathcal{S}_{s,h}} \equiv \sup \frac{|x^\beta \partial^\alpha f(x)|}{h^{|\alpha+\beta|} (\alpha! \beta!)^s} \quad (5.2)$$

sonlu olacak şekilde $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ fonksiyonlarından oluşur. Burada supremum tüm $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$

ve $x \in \mathbb{R}^{2d}$ üzerinden alınmaktadır. $s > s_0 \geq \frac{1}{2}$ ise

$$S_{s_0}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \Sigma_s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow S_s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow S'_s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \Sigma'_s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow S'_{s_0}(\mathbb{R}^d), \quad (5.3)$$

sürekli gömmeleri sağlar. Burada $A \hookrightarrow B$ ile $A \subseteq B$ sürekli gömmesi gösterilmektedir.

Tanım 5.7.2. $\mathbb{R}^d$ üzerinde bir ağırlık fonksiyonu $\omega_0 \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^d)$ ve $\frac{1}{\omega_0} \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^d)$ koşullarını sağlayan pozitif ω_0 fonksiyonudur. Eğer $\mathbb{R}^d$ üzerinde pozitif bir v_0 ağırlığı ve bir $C \geq 1$ sabiti

$$\omega_0(x+y) \leq C\omega_0(x)v_0(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^d$$

olacak şekilde varsa ω_0 fonksiyonuna v_0 moderate denir. $\mathbb{R}^d$ üzerindeki tüm moderate ağırlıkların kümesi $\mathcal{P}_E(\mathbb{R}^d)$ ile gösterilecektir. $\mathcal{P}_E^0(\mathbb{R}^d)$ ile $r > 0$ olmak üzere

$$\omega_0(x+y) \leq C\omega_0(x)e^{r|y|}, \quad x, y \in \mathbb{R}^d$$

koşulunu sağlayan tüm $\omega \in \mathcal{P}_E(\mathbb{R}^d)$ ağırlıklarının kümesi $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ ile de

$$\omega(x+y) \leq C\omega(x)(1+|y|)^r, \quad x, y \in \mathbb{R}^d$$

olacak şekilde tüm $\omega \in \mathcal{P}_E(\mathbb{R}^d)$ ağırlıklarının kümesi gösterilecektir. Burada,

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{P}_E^0(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{P}_E(\mathbb{R}^d)$$

sağlanır.

Bu çalışma kapsamında aşağıda tanımlayacağımız Pilipović $\mathcal{H}_b(\mathbb{R}^d)$ ve duali olan $\mathcal{H}'_b(\mathbb{R}^d)$ uzayları da kullanılmıştır.

Tanım 5.7.3. Pilipović uzayı $\mathcal{H}_b(\mathbb{R}^d) = \mathcal{H}_{b_1}(\mathbb{R}^d)$ ve bazı $r > 0$ için

$$|c_f(\alpha)| \lesssim r^{|\alpha|} \alpha!^{-\frac{1}{2}} \quad (5.4)$$

koşulunu sağlayan tüm

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} c_f(\alpha) h_\alpha \quad (5.5)$$

Hermit seri açılımlarının kümesidir. Burada h_α , $\alpha > 0$ mertebeden Hermit fonksiyonudur ve aşağıdaki gibidir

$$h_\alpha(x) = \pi^{-\frac{d}{4}} (-1)^{|\alpha|} (2^{|\alpha|} \alpha!)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} \cdot |x|^2} (\partial^\alpha e^{-|x|^2}), \quad \alpha \in \mathbb{N}^d.$$

Benzer şekilde, $\mathcal{H}'_b(\mathbb{R}^d)$, her $r > 0$ için

$$|c_f(\alpha)| \lesssim r^{|\alpha|} \alpha!^{\frac{1}{2}} \quad (5.6)$$

koşulunu sağlayan (5.5) deki tüm Hermit seri açılımlarının kümesidir.

Pilipović uzayları ve Gelfand-Shilov uzayları arasında aşağıdaki ilişki vardır.

$$\mathcal{H}_b(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{S}_{1/2}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \Sigma_s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{S}_s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

ve

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{S}'_s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \Sigma'_s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{S}'_{1/2}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{H}'_b(\mathbb{R}^d), \quad s > \frac{1}{2}.$$

Tanım 5.7.4. Φ_0 bir Young fonksiyonu ve $r_0 \in (0, 1]$ olsun. Bu durumda, $\Phi(t) = \Phi_0(t^{r_0})$, $t \geq 0$ fonksiyonu r_0 Young fonksiyonu veya yarı Young fonksiyonu olarak adlandırılır.

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, (Ω, Σ, μ) Borel ölçü uzayı ve $\omega_0 \in \mathcal{P}_E(\mathbb{R}^d)$ olsun. Φ bir yarı Young fonksiyonu olmak üzere, $L_{\omega_0}^{\Phi}(\mu)$ yarı Orlicz uzayı

$$\|f\|_{L_{(\omega_0)}^{\Phi}} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \Phi_0 \left(\frac{|f(x)\omega_0(x)|}{\lambda} \right) d\mu(x) \leq 1 \right\} < +\infty$$

olacak şekilde tüm μ ölçülebilir $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonlarının uzayıdır.

Tanım 5.7.5. $j = 1, 2$ için $\Omega_j \subseteq \mathbb{R}^{d_j}$ olmak üzere, $(\Omega_j, \Sigma_j, \mu_j)$ Borel ölçü uzayları, $r_0 \in (0, 1]$, Φ_j r_0 Young fonksiyonu ve $\omega \in \mathcal{P}_E(\mathbb{R}^{d_1+d_2})$ olsun. Bu durumda ağırlıklı karışık yarı norm Orlicz uzayı $L_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2} = L_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mu_1 \otimes \mu_2)$

$$\|f\|_{L_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}} \equiv \|f_{1, \omega}\|_{L^{\Phi_2}} < +\infty$$

olacak şekilde tüm $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$, $\mu_1 \otimes \mu_2$ ölçülebilir fonksiyonlarının uzayıdır. Burada

$$f_{1, \omega}(x_2) = \|f(\cdot, x_2)\omega(\cdot, x_2)\|_{L^{\Phi_1}}$$

şeklindeir. Eğer $r_0 = 1$ ise $L_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mu_1 \times \mu_2)$ Banach uzayı elde edilir ve ağırlıklı karışık normlu Orlicz uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 5.7.6. Φ, Φ_1, Φ_2 yarı Young fonksiyonları olsun. Ağırlıklı Orlicz modülasyon uzayı $M_{(\omega)}^{\Phi}(\mathbb{R}^d)$ ve $M_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{R}^d)$

$$M_{(\omega)}^{\Phi}(\mathbb{R}^d) = \{f \in \mathcal{H}'_b(\mathbb{R}^d) : V_{\phi}f \in L_{(\omega)}^{\Phi}(\mathbb{R}^{2d})\} \quad (5.7)$$

ve

$$M_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{R}^d) = \{f \in \mathcal{H}'_b(\mathbb{R}^d) : V_{\phi}f \in L_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{R}^{2d})\} \quad (5.8)$$

ile tanımlanır. $M_{(\omega)}^{\Phi}(\mathbb{R}^d)$ ve $M_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{R}^d)$ üzerindeki yarı normlar, sırasıyla

$$\|f\|_{M_{(\omega)}^{\Phi}} = \|V_{\phi}f\|_{L_{(\omega)}^{\Phi}} \quad (5.9)$$

ve

$$\|f\|_{M_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}} = \|V_{\phi}f\|_{L_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}} \quad (5.10)$$

ile verilir.

Uyarı 5.7.7. $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}, \mathbb{R}^d$ nin standart tabanı olmak üzere

$$\Lambda = \{n_1 e_1 + \dots + n_d e_d : (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d\} \text{ ve } \Lambda^2 = \Lambda \times \Lambda = \{(m, n) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d : m, n \in \Lambda\} \quad (5.11)$$

ile tanımlanır.

Φ_1, Φ_2 yarı Young fonksiyonları olsun. Ağırlıklı karışık yarı norm Orlicz dizi uzayı

$$\ell_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{Z}^{2d}) = \{a = (a_{kn})_{k, n \in \mathbb{Z}^{2d}} : \|a\|_{\ell_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}} < +\infty\}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada

$$\|a\|_{\ell_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \sum_{k, n \in \mathbb{Z}^d} \Phi_2 \left(\frac{\|a_{kn}\|_{\ell_{\omega}^{\Phi_1}}}{\lambda} \right) \leq 1 \right\}$$

şeklindedir.

Tanım 5.7.8. $\omega, v \in \mathcal{P}_E(\mathbb{R}^{2d})$, ω v -moderate, $\phi, \psi \in M_{(v)}^1(\mathbb{R}^d)$, $\varepsilon > 0$ ve $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$ olsun. Bu durumda,

(i) Analiz operatörü: $C_{\phi}^{\varepsilon, \Lambda}, M_{(\omega)}^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ uzayından $\ell_{(\omega)}^{\infty}(\varepsilon \Lambda^2)$ uzayına

$$C_{\phi}^{\varepsilon, \Lambda} f \equiv \{V_{\phi} f(j, \iota)\}_{j, \iota \in \varepsilon \Lambda}$$

bir operatördür.

(ii) Sentez operatörü: $D_{\psi}^{\varepsilon, \Lambda}, \ell_{(\omega)}^{\infty}(\varepsilon \Lambda^2)$ uzayından $M_{(\omega)}^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ uzayına

$$D_{\psi}^{\varepsilon, \Lambda} c \equiv \sum_{j, \iota \in \varepsilon \Lambda} c(j, \iota) e^{i\langle \cdot, \iota \rangle} \psi(\cdot - j)$$

bir operatördür.

(iii) Gabor çerçeve operatörü: $S_{\phi, \psi}^{\varepsilon, \Lambda} M_{(\omega)}^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ üzerinde

$$S_{\phi, \psi}^{\varepsilon, \Lambda} f \equiv \sum_{j, \iota \in \varepsilon \Lambda} V_{\phi} f(j, \iota) e^{i\langle \cdot, \iota \rangle} \psi(\cdot - j)$$

bir operatördür.

Bu kısım ile ilgili temel teoremi aşağıdaki gibi verelim.

Teorem 5.7.9. Her bir $\varepsilon > 0$, Φ_1, Φ_2 yarı Young fonksiyonları, $\omega, v \in \mathcal{P}_E(\mathbb{R}^{2d})$, ω v -moderate ve $\phi, \psi \in M_{(v)}^{r_0}(\mathbb{R}^d)$ Gabor atomları dual kanonik pencereleri $M_{(v)}^{r_0}(\mathbb{R}^d)$ içinde olacak şekilde verilsin. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

(i) Analiz operatörü $C_{\phi}^{\varepsilon}, M_{(v)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{R}^d)$ uzayından $\ell_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\varepsilon \mathbb{Z}^{2d})$ uzayına sürekli ve

$$\|C_{\phi}^{\varepsilon} f\|_{\ell_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}} \leq C \|f\|_{M_{(v)}^{\Phi_1, \Phi_2}}, \quad f \in M_{(v)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{R}^d) \quad (5.12)$$

sağlanır. Burada, $C > 0$ sabiti ε , r_0 , ω ve ϕ 'ye bağlıdır.

(ii) Sentez operatörü D_{ψ}^{ε} , $\ell_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{Z}^{2d})$ uzayından $M_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{R}^d)$ uzayına sürekli ve

$$\|D_{\psi}^{\varepsilon} c\|_{M_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}} \leq C \|c\|_{\ell_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}}, \quad c \in \ell_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{Z}^{2d}) \quad (5.13)$$

sağlanır. Burada, $C > 0$ sabiti ε , r_0 , ω ve ψ 'ye bağlıdır.

Teorem 5.7.10. Φ_1, Φ_2 yarı Young fonksiyonları, $\omega, v \in \mathcal{P}_E(\mathbb{R}^{2d})$, ω v -moderate olsun ve $\phi, \psi \in M_{(v)}^{r_0}(\mathbb{R}^d)$ olmak üzere $\varepsilon > 0$ sayısını

$$\{e^{i\langle \cdot, \kappa \rangle} \phi(\cdot - k)\}_{k, \kappa \in \varepsilon \mathbb{Z}^d} \quad \text{ve} \quad \{e^{i\langle \cdot, \kappa \rangle} \psi(\cdot - k)\}_{k, \kappa \in \varepsilon \mathbb{Z}^d} \quad (5.14)$$

birbirlerinin dual çerçevesi olacak şekilde seçelim. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

(i) Gabor çerçeve operatörü $S_{\phi, \psi}^{\varepsilon} = D_{\psi}^{\varepsilon} \circ C_{\phi}^{\varepsilon}$ $M_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{R}^d)$ üzerinde birim operatördür.

(ii) Eğer $f \in M_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{R}^d)$ ise

$$f = \sum_{k, \kappa \in \varepsilon \mathbb{Z}^d} (V_{\psi} f)(k, \kappa) e^{i\langle \cdot, \kappa \rangle} \phi(\cdot - k) = \sum_{k, \kappa \in \varepsilon \mathbb{Z}^d} (V_{\phi} f)(k, \kappa) e^{i\langle \cdot, \kappa \rangle} \psi(\cdot - k)$$

olur. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$, $L^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{R}^{2d})$ 'de yoğun olduğunda ya da aksi durumda, $M_{(\omega)}^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ 'deki yakınsaklık zayıf $*$ olduğunda $M_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{R}^d)$ üzerinde koşulsuz yakınsaktır.

Ayrıca, eğer $f \in M_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{R}^d)$ ise

$$C^{-1} \|f\|_{M_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}} \leq \|\{(V_{\phi} f)(k, \kappa)\}_{k, \kappa \in \varepsilon \mathbb{Z}^d}\|_{\ell_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}} \leq C \|f\|_{M_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}} \quad (5.15)$$

olur. Burada, $C > 0$ sabiti sadece ε , r_0 , ω ve ϕ 'ye bağlıdır. Benzer durum, ψ yerine ϕ alındığında da geçerlidir.

Şimdi, $M_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{R}^d)$ uzayının ϕ_1 ve ϕ_2 pencere fonksiyonlarının seçiminden bağımsız olduğunu gösteren aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 5.7.11. Φ_1, Φ_2 yarı Young fonksiyonları, $\omega, v \in \mathcal{P}_E(\mathbb{R}^{2d})$, ω v -moderate, ve $\phi \in M_{(v)}^{r_0}(\mathbb{R}^d)$ dual penceresi de $M_{(v)}^{r_0}(\mathbb{R}^d)$ uzayında olan pencere fonksiyonu olsun. Bu durumda, $f \mapsto \|V_{\phi} f\|_{L_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}}$ olur ve $f \mapsto \|V_{\phi} f\|_{W(L_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2})}$ $\Sigma_1'(\mathbb{R}^d)$ üzerinde yarı normdur ve $f \mapsto \|f\|_{M_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}}$ ile denktir.

Teorem 5.7.12. $\omega \in \mathcal{P}_E(\mathbb{R}^{2d})$ olsun ve Φ_k and Ψ_k yarı Young fonksiyonları için $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\Psi_k(t)}{\Phi_k(t)}$, $k = 1, 2$ var ve sonlu olsun. Bu durumda,

$$(i) \quad \ell_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{Z}^{2d}) \hookrightarrow \ell_{(\omega)}^{\Psi_1, \Psi_2}(\mathbb{Z}^{2d}),$$

$$(ii) \quad M_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow M_{(\omega)}^{\Psi_1, \Psi_2}(\mathbb{R}^d)$$

geçerlidir.

Modülasyon uzaylarında kapsamalarla ilgili aşağıdaki sonucu verelim.

Teorem 5.7.13. $\Phi_j, \Psi_j, j = 1, 2$, yarı Young fonksiyonları ve $\omega \in \mathcal{P}_E(\mathbb{R}^{2d})$ olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (i) $M_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{R}^d) \subseteq M_{(\omega)}^{\Psi_1, \Psi_2}(\mathbb{R}^d)$,
- (ii) $\ell_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{Z}^{2d}) \subseteq \ell_{(\omega)}^{\Psi_1, \Psi_2}(\mathbb{Z}^{2d})$,
- (iii) bir $t_0 > 0$ sayısı, her $0 \leq t \leq t_0$ için $\Psi_j(t) \leq C\Phi_j(t)$ olacak şekilde vardır.

Kompaktlıkla ilgili aşağıdaki gerek ve yeter koşulu verelim.

Teorem 5.7.14. $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{P}_E(\mathbb{R}^{2d})$ olsun. Bu durumda, $i : M_{(\omega_1)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow M_{(\omega_2)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{R}^d)$ içermeye dönüşümünün kompakt olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{|X| \rightarrow \infty} \frac{\omega_2(X)}{\omega_1(X)} = 0$ olmasıdır.

Son olarak, Bargmann dönüşümü ve Orlicz modülasyon uzayı ile ilgili aşağıdaki sonuçları vereceğiz. İlk olarak Bargmann dönüşümünü hatırlatalım. d boyutlu Bargmann çekirdeği

$$\mathfrak{A}_d(z, y) = \pi^{-\frac{d}{4}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\langle z, z \rangle + |y|^2) + 2^{\frac{1}{2}}\langle z, y \rangle\right), \quad y \in \mathbb{R}^d, z \in \mathbb{C}^d$$

ile tanımlıdır. Burada,

$$\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^d z_j w_j, \quad z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d \text{ ve } w = (w_1, \dots, w_d) \in \mathbb{C}^d$$

şeklinde dir.

Bir $f \in \mathcal{S}'_{1/2}(\mathbb{R}^d)$ fonksiyonunun $\mathfrak{B}_d f$ Bargmann dönüşümü $(\mathfrak{B}_d f)(z) = \langle f, \mathfrak{A}_d(z, \cdot) \rangle$ şeklinde tanımlıdır.

Tanım 5.7.15. Φ_1 ve Φ_2 yarı Young fonksiyonları olsun. $B_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{C}^d)$, $\mathbb{C}^d$ üzerinde $\|F\|_{B_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}} < \infty$ olacak şekildeki tüm ölçülebilir F fonksiyonlarının kümesi olsun. Burada,

$$\|F\|_{B_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}} \equiv \|F_{\Phi_1, \omega}\|_{L^{\Phi_2}(\mathbb{R}^d)}$$

ve

$$F_{\Phi_1, \omega}(\xi) \equiv (2\pi)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2} \|e^{-\frac{1}{4}|\cdot|^2} F(2^{-\frac{1}{2}}(\cdot - i\xi))\omega(\cdot, \xi)\|_{L^{\Phi_1}(\mathbb{R}^d)}$$

şeklinde dir. Ayrıca, $A_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{C}^d) = B_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{C}^d) \cap A(\mathbb{C}^d)$ olsun. O halde Φ_1 ve Φ_2 yarı Young fonksiyonları $\Phi_1(t) = \frac{t^p}{p}$ ve $\Phi_2(t) = \frac{t^q}{q}$ olarak seçildiğinde $B_{(\omega)}^{p, q} = B_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}$ ve $A_{(\omega)}^{p, q} = A_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}$ olur. Bu ise $L_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2} = L_{(\omega)}^{p, q}$ olmasıdır.

Teorem 5.7.16. $\omega, \mathbb{R}^{2d} \simeq \mathbb{C}^d$ üzerinde bir ağırlık fonksiyonu ve Φ_1, Φ_2 yarı Young fonksiyonları olsun. Bu durumda, aşağıdakiler sağlanır.

- (i) $A_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{C}^d)$, $B_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{C}^d)$ ve $M_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{R}^d)$ yarı Banach uzaylarıdır.
- (ii) Bargmann dönüşümü $M_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{R}^d)$ 'den $A_{(\omega)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{C}^d)$ 'ye izometrik ve biyektif bir dönüşümdür.

5.8 ORLICZ MODÜLASYON UZAYLARINDA SÖZDE DİFERANSİYEL OPERATÖRLER

Yukarıda 5.7 kısmında verilen sonuçların devamı niteliğinde olan [45] çalışmasında Yarı Banach Orlicz modülasyon uzaylarında sözde diferansiyel operatörlerinin sürekliliği incelenmiştir. Verilen sembol ve kavramlar 5.7 kısmında verilen sembollerdir.

Tanım 5.8.1. $\mathbf{M}(d, \Omega)$, bileşenleri Ω dan olan $d \times d$ -matrisler, $s \geq 1/2$, $a \in \mathcal{S}_s(\mathbb{R}^{2d})$ ve $A \in \mathbf{M}(d, \mathbb{R})$ olsun. Bu durumda, sözde diferansiyel operatör $f \in \mathcal{S}_s(\mathbb{R}^d)$ için $\text{Op}_A(a)$ $\mathcal{S}_s(\mathbb{R}^{2d})$ üzerinde

$$(\text{Op}_A(a)f)(x) = (2\pi)^{-d} \int \int a(x - A(x - y), \xi) f(y) e^{i\langle x - y, \xi \rangle} dy d\xi$$

şeklinde tanımlı lineer ve sürekli bir operatördür. $a \in \mathcal{S}'_s(\mathbb{R}^{2d})$ ise sözde diferansiyel operatör $\text{Op}_A(a)$, $\mathcal{S}_s(\mathbb{R}^d)$ uzayından $\mathcal{S}'_s(\mathbb{R}^d)$ uzayına

$$K_{a,A}(x, y) = (2\pi)^{-d/2} (\mathcal{F}_2^{-1} a)(x - A(x - y), x - y)$$

ile verilen distribüsyon çekirdeğiyle tanımlı lineer ve sürekli bir operatördür. Burada, $\mathcal{F}_2 F$, $F(x, y) \in \mathcal{S}'_s(\mathbb{R}^{2d})$ 'nin y değişkenine göre kısmi Fourier dönüşümüdür.

Şimdi, ana teoremi vermeden önce ağırlık fonksiyonları için aşağıdaki koşulu verelim.

$$\frac{\omega_2(x, \xi)}{\omega_1(y, \eta)} \lesssim \omega(x + A(y - x), \eta + A^*(\xi - \eta), \xi - \eta, y - x). \quad (5.16)$$

Burada, A^* , A matrisinin transpozudur.

Teorem 5.8.2. $A \in \mathbf{M}(d, \mathbb{R})$, Φ_1, Φ_2 yarı Young fonksiyonları, $\omega \in \mathcal{P}_E(\mathbb{R}^{4d})$ ve $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{P}_E(\mathbb{R}^{2d})$ (5.16) koşulunu sağlasın ve bir $a \in M_{(\omega)}^{\infty, r_0}(\mathbb{R}^{2d})$ olsun. Bu durumda $\text{Op}_A(a)$, $\Sigma_1(\mathbb{R}^d)$ uzayından $\Sigma'_1(\mathbb{R}^d)$ uzayına operatörü $M_{(\omega_1)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{R}^d)$ uzayından $M_{(\omega_2)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{R}^d)$ uzayına tek şekilde sürekli olarak genişletilebilir ve

$$\|\text{Op}_A(a)\|_{M_{(\omega_1)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow M_{(\omega_2)}^{\Phi_1, \Phi_2}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|a\|_{M_{(\omega)}^{\infty, r_0}}$$

sağlanır.

Teorem 5.8.3. $A \in \mathbf{M}(d, \mathbb{R})$, Φ_0 Young fonksiyonu, Φ_0^* , Φ_0 ın tamlayan Young fonksiyonu ve Φ , $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\Phi(t)} < +\infty$ koşulunu sağlayan yarı Young fonksiyonu, $\omega \in \mathcal{P}_E(\mathbb{R}^{4d})$ ve $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{P}_E(\mathbb{R}^{2d})$ (5.16) koşulunu sağlayan ağırlık fonksiyonları olsun. Bu durumda, aşağıdakiler geçerlidir.

- (i) Eğer bir $a \in M_{(\omega)}^{\Phi_0}(\mathbb{R}^{2d})$ ise $\text{Op}_A(a)$, $M_{(\omega_1)}^1(\mathbb{R}^d)$ uzayından $M_{(\omega_2)}^\infty(\mathbb{R}^d)$ uzayına operatörü $M_{(\omega_1)}^{\Phi_0^*}(\mathbb{R}^d)$ uzayından $M_{(\omega_2)}^{\Phi_0}(\mathbb{R}^d)$ uzayına tek türlü sürekli olarak genişletilebilir ve

$$\|\text{Op}_A(a)\|_{M_{(\omega_1)}^{\Phi_0^*}(\mathbb{R}^d) \rightarrow M_{(\omega_2)}^{\Phi_0}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|a\|_{M_{(\omega)}^{\Phi_0}(\mathbb{R}^{2d})}$$

sağlanır.

- (ii) Eğer $a \in M_{(\omega)}^\Phi(\mathbb{R}^{2d})$ ise $\text{Op}_A(a)$, $M_{(\omega_1)}^1(\mathbb{R}^d)$ uzayından $M_{(\omega_2)}^\infty(\mathbb{R}^d)$ uzayına operatörü $M_{(\omega_1)}^\infty(\mathbb{R}^d)$ uzayından $M_{(\omega_2)}^\Phi(\mathbb{R}^d)$ uzayına tek türlü sürekli olarak genişletilebilir ve

$$\|\text{Op}_A(a)\|_{M_{(\omega_1)}^\infty(\mathbb{R}^d) \rightarrow M_{(\omega_2)}^\Phi(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|a\|_{M_{(\omega)}^\Phi(\mathbb{R}^{2d})}$$

sağlanır.

5.9 YEREL KOMPAKT GRUP ÜZERİNDE TANIMLI AĞIRLIKLI ORLICZ UZAYLARININ AMALGAM UZAYLARI

Wiener amalgam uzayları, yerel ve evrensel bileşen olarak adlandırılan iki Banach uzayının harmanlanmasıyla elde edilen karışık norma sahip bir fonksiyon uzayıdır. İlk amalgam uzayları, N. Wiener'in harmonik analiz alanındaki çalışmalarında ortaya çıkmıştır [54, 55, 56]. Bu çalışmalarda, $\mathbb{R}$ reel sayıları üzerinde tanımlı yerel ve evrensel bileşenleri L^1, L^2, L^∞ Lebesgue uzayları olan $W(L^1, L^2), W(L^2, L^1), W(L^1, L^\infty)$ ve $W(L^\infty, L^1)$ uzayları çalışılmıştır.

Literatürde, amalgam uzaylarına ait pek çok çalışma mevcuttur ve çoğunlukla Lebesgue uzayları için çalışıldığı görülmektedir. Bu çalışmalar, Wiener tarafından verilen sonuçların genelleştirilmesi üzerine olmuştur. Ancak, bu uzaylara ait en genel tanım ve kapsamlı çalışmalar H. G. Feichtinger tarafından 1980 yılında yapılmıştır [14]. Böylece, Wiener amalgam uzayları, zaman-frekans analizi, örneklem teorisi ve dalgacık teorisi gibi matematiksel analiz ve mühendislik alanlarında oldukça kullanışlı bir araç olmuştur.

Wiener amalgam uzayları, Lebesgue uzaylarından daha zengin ve karmaşık bir yapıya sahip olan Orlicz uzaylarına genelleştirilmesi olan kapsamlı yapı [2] çalışmasında incelenmiştir. Bu çalışmada, G bir yerel kompakt grup olmak üzere, Φ_1, Φ_2 Young fonksiyonları ve G üzerinde tanımlı ω ağırlıklı fonksiyonu ile belirlenen, yerel bileşeni $L^{\Phi_1}(G)$ Orlicz uzayı ve evrensel bileşeni $L_\omega^{\Phi_2}(G)$ ağırlıklı Orlicz uzayı olan $W(L^{\Phi_1}(G), L_\omega^{\Phi_2}(G))$ Wiener amalgam uzaylarının girişim çarpımına göre Banach cebiri, Banach modülü yapısı ve soyut harmonik analizi ayrıntılı olarak çalışılmıştır.

Öte yandan, zaman-frekans analizinde önemli yere sahip olan afin gruplar özel bir yerel kompakt grup örneğidir. Bir $\mathbb{A} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ afin grubu üzerinde tanımlı $W(L^\Phi(\mathbb{A}), L^1(\mathbb{A}))$ ve $W(L^\infty(\mathbb{A}), L^\Phi(\mathbb{A}))$ Orlicz amalgam uzaylarına ilişkin yapı [3] çalışmasında incelenmiştir.

Bu çalışmada, $\mathbb{A} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ afin grup üzerindeki çarpma işlem

$$(a, b)(x, y) = \left(ax, \frac{b}{x} + y\right)$$

şeklinde dir. Buna göre, $\mathbb{A}$ afin grubun birim elemanı ve terslenebilir elemanları, $(a, b) \in \mathbb{A}$

için

$$e = (1, 0), \quad (a, b)^{-1} = \left(\frac{1}{a}, -ab \right)$$

ile verilir. Bu çarpma işlemine göre $\mathbb{A}$ afin grubu değişmeli olmayan bir gruptur. Ayrıca, $\mathbb{A}$ üzerindeki sol Haar ölçüsü $d\mu = \frac{dx}{x} dy$ olur.

$W(L^\Phi(\mathbb{A}), L^1(\mathbb{A}))$ ve $W(L^\infty(\mathbb{A}), L^\Phi(\mathbb{A}))$ Orlicz amalgam uzayları aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 5.9.1. $Q \subseteq \mathbb{A}$ içi boştan farklı kompakt bir alt küme olsun. Bu durumda, $W(L^\Phi(\mathbb{A}), L^1(\mathbb{A}))$ afin grup üzerinde tanımlı Orlicz amalgam uzayı, her $(x, y) \in \mathbb{A}$ için $f\chi_{(x,y)Q} \in L^\Phi(\mathbb{A})$ ve kontrol fonksiyonu $F_f(x, y) = F_f^Q(x, y) = \|f\chi_{(x,y)Q}\|_{L^\Phi(\mathbb{A})} \in L^1(\mathbb{A})$ olacak şekildeki $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C}$ ölçülebilir fonksiyonların uzayıdır. $W(L^\Phi(\mathbb{A}), L^1(\mathbb{A}))$ uzayı üzerinde

$$\|f\|_{W(L^\Phi(\mathbb{A}), L^1(\mathbb{A}))} := \|F_f^Q\|_{L^1(\mathbb{A})} = \left\| \|f\chi_{(x,y)Q}\|_{L^\Phi(\mathbb{A})} \right\|_{L^1(\mathbb{A})}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir normdur.

Benzer şekilde tanımlanan $W(L^\infty(\mathbb{A}), L^\Phi(\mathbb{A}))$ uzayı üzerindeki norm

$$\|f\|_{W(L^\infty(\mathbb{A}), L^\Phi(\mathbb{A}))} := \|F_f^Q\|_{L^\Phi(\mathbb{A})} = \left\| \|f\chi_{(x,y)Q}\|_{L^\infty(\mathbb{A})} \right\|_{L^\Phi(\mathbb{A})}$$

ile verilir. Burada, kontrol fonksiyonu $F_f^Q(x, y) = \|f\chi_{(x,y)Q}\|_{L^\infty(\mathbb{A})} \in L^\Phi(\mathbb{A})$ şeklindedir.

Bu çalışmada elde edilen sonuçlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

Teorem 5.9.2. Φ bir Young fonksiyonu olsun. Bu durumda, $W(L^\Phi(\mathbb{A}), L^1(\mathbb{A}))$ ve $W(L^\infty(\mathbb{A}), L^\Phi(\mathbb{A}))$ uzayları yukarıda tanımlanan normlara göre sırasıyla bir Banach uzayıdır.

Teorem 5.9.3. Φ bir Young fonksiyonu ve $Q \subseteq \mathbb{A}$ içi boştan farklı kompakt bir alt küme olsun. Bu durumda, $W(L^\Phi(\mathbb{A}), L^1(\mathbb{A}))$ ve $W(L^\infty(\mathbb{A}), L^\Phi(\mathbb{A}))$ uzayları Q kompakt kümelerin seçiminden bağımsızdır.

Önerme 5.9.4. Φ bir Young fonksiyonu olsun. Her $f \in W(L^\Phi(\mathbb{A}), L^1(\mathbb{A}))$ ve $g \in W(L^\infty(\mathbb{A}), L^\Phi(\mathbb{A}))$ için aşağıdakiler geçerlidir.

(i) $L_{(a,b)}f \in W(L^\Phi(\mathbb{A}), L^1(\mathbb{A}))$ olur ve

$$\|L_{(a,b)}f\|_{W(L^\Phi(\mathbb{A}), L^1(\mathbb{A}))} = \|f\|_{W(L^\Phi(\mathbb{A}), L^1(\mathbb{A}))}.$$

(ii) $L_{(a,b)}g \in W(L^\infty(\mathbb{A}), L^\Phi(\mathbb{A}))$ olur ve

$$\|L_{(a,b)}g\|_{W(L^\infty(\mathbb{A}), L^\Phi(\mathbb{A}))} = \|g\|_{W(L^\infty(\mathbb{A}), L^\Phi(\mathbb{A}))}.$$

Burada, her $(x, y) \in \mathbb{A}$ için $L_{(a,b)}f(x, y) = f((a, b)^{-1}(x, y))$ şeklindedir.

Teorem 5.9.5. (Φ, Ψ) tamlayan Young fonksiyon çifti olsun. Eğer $\Phi'_+(0) > 0$ ve $\Psi'_+(0) > 0$ ise

$$W(L^\Phi(\mathbb{A}), L^\Phi(\mathbb{A})) = L^\Phi(\mathbb{A})$$

olur.

Şimdi, literatürde BUPU adı ile var olan, amalgam uzaylarına ilişkin önemli bir kavramı verelim.

Tanım 5.9.6. [14, 17] Bir G yerel kompakt grup üzerinde tanımlı $\{\psi_i\}_{i \in J}$ fonksiyon ailesi verilsin. Eğer bu aile

$$(i) \sum_{i \in J} \psi_i \equiv 1,$$

$$(ii) \sup_{i \in J} \|\psi_i\|_{L^\infty} < \infty,$$

(iii) bir $U \subseteq G$ içi boştan farklı kompakt alt kümesi ve $x_i \in G$ elemanları vardır ki, her $i \in J$ için

$$\text{supp}(\psi_i) \subseteq x_i U,$$

(iv) her bir $K \subseteq G$ kompakt kümesi için

$$\sup_{x \in G} \#\{i \in J \mid x \in x_i K\} = \sup_{i \in J} \#\{j \mid x_i K \cap x_j K \neq \emptyset\} < +\infty$$

koşullarını sağlıyorsa, $\{\psi_i\}_{i \in J}$ ailesine U büyüklüğünde ve $\{x_i\}_{i \in J}$ noktaları ile ilişkili birimin sınırlı düzgün parçalanması (BUPU) denir.

$W(L^\Phi(\mathbb{A}), L^1(\mathbb{A}))$ ve $W(L^\infty(\mathbb{A}), L^\Phi(\mathbb{A}))$ amalgam uzayları üzerinde afin gruba ilişkin aşağıdaki yapıya ihtiyacımız olacaktır.

Bir $h > 0$ verilsin. O halde, $k, j \in \mathbb{Z}$ için, afin grubun kompakt alt kümeleri

$$B_{jk} = (e^{2jh}, 2khe^{-h})Q_h,$$

$$B'_{jk} = (e^{2jh}, 2khe^{-h})Q_{2h}$$

ile verilsin. Burada, $Q_h = [e^{-h}, e^h) \times [-h, h)$ şeklindedir.

Teorem 5.9.7. Φ bir Young fonksiyonu olsun. $\{\psi_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ bir BUPU olmak üzere, $W(L^\Phi(\mathbb{A}), L^1(\mathbb{A}))$ ve $W(L^\infty(\mathbb{A}), L^\Phi(\mathbb{A}))$ amalgam uzayları üzerinde denk normlar, sırasıyla

$$\|f\|_{W(L^\Phi(\mathbb{A}), L^1(\mathbb{A}))} \asymp \left\| \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \|f\psi_{jk}\|_{L^\Phi(\mathbb{A})} \chi_{B'_{jk}} \right\|_{L^1(\mathbb{A})},$$

$$\|f\|_{W(L^\infty(\mathbb{A}), L^\Phi(\mathbb{A}))} \asymp \left\| \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \|f\psi_{jk}\|_{L^\infty(\mathbb{A})} \chi_{B'_{jk}} \right\|_{L^\Phi(\mathbb{A})}$$

olur.

Ayrıca, $\{B_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ ailesinin $\mathbb{A}$ afin grubunun bir parçalanması olduğu düşünülürse, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.9.8. Φ bir Young fonksiyonu olsun. Bu durumda, $W(L^\Phi(\mathbb{A}), L^1(\mathbb{A}))$ ve $W(L^\infty(\mathbb{A}), L^\Phi(\mathbb{A}))$ uzayları üzerinde, sırasıyla aşağıdaki norm denklikleri elde edilir.

$$\begin{aligned}\|f\|_{W(L^\Phi(\mathbb{A}), L^1(\mathbb{A}))} &\asymp \|(\|f\chi_{B_{jk}}\|_{L^\Phi(\mathbb{A})})_{j,k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^1(\mathbb{A})}, \\ \|f\|_{W(L^\infty(\mathbb{A}), L^\Phi(\mathbb{A}))} &\asymp \|(\|f\chi_{B_{jk}}\|_{L^\infty(\mathbb{A})})_{j,k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^\Phi(\mathbb{A})}.\end{aligned}$$

Teorem 5.9.9. Φ bir Young fonksiyonu ve $\Phi'_+(0) > 0$ olsun. Bu durumda, $W(L^\Phi(\mathbb{A}), L^1(\mathbb{A}))$ ve $W(L^\infty(\mathbb{A}), L^\Phi(\mathbb{A}))$ uzayları, girişim işlemine göre birer $L^1(\mathbb{A})$ modülü olur.

5.10 ORLICZ UZAYINDA HARDY-LITTLEWOOD MAKSİMAL OPERATÖRLERİ

Harmonik analizin önemli operatörlerinden olan Hardy-Littlewood maksimal operatörleri Orlicz uzaylarında [46] çalışmasında kapsamlı olarak incelenmiştir.

Tanım 5.10.1. Bir $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ Lebesgue ölçülebilir fonksiyonu her $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt kümesinde sonlu ise yerel integrallenebilir fonksiyon denir. Böylece, yerel integrallenebilir fonksiyon uzayı $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

$$L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ ölçülebilir ve } \forall K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ için } \int_K |f(x)| dx < +\infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 5.10.2. $f, \mathbb{R}^n$ uzayında lokal integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Keyfi $x \in \mathbb{R}^n$ için Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^n} \int_{|y|<r} |f(x-y)| dy \quad (5.17)$$

şeklinde verilir. Ayrıca, her $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$M_1f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(Q(x,r))} \int_{Q(x,r)} |f(y)| dy \quad (5.18)$$

merkezi Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonudur. Burada $Q(x,r)$, x merkezli r yarıçaplı yuvarı temsil etmektedir. Daha genel olarak

$$M_2f(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(y)| dy \quad (5.19)$$

merkezi olmayan Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonudur.

Yukarıda verilen maksimal fonksiyonlar göz önüne alınırsa, aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 5.10.3. Bir $c_i, i \in \{0, 1, 2, 3\}$ sayıları, her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$c_0 Mf(x) \leq c_1 M_1 f(x) \leq c_2 M_2 f(x) \leq c_3 Mf(x)$$

koşulunu sağlayacak şekilde vardır.

Önerme 5.10.4. $f, \mathbb{R}^n$ uzayında ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Aşağıdakiler geçerlidir.

(i) Bir $c_1 > 0$ sayısı vardır öyle ki her $\lambda > 0$ ve $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ için

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > 2\lambda\}) \leq \frac{c_1}{\lambda} \int_{x:|f(x)|>\lambda} |f(x)|dx$$

olur.

(ii) Bir $c_2 > 0$ sayısı vardır öyle ki her $\lambda > 0$ ve $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ için

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : M_2 f(x) > \lambda\}) \leq \frac{c_2}{\lambda} \int_{x:|f(x)|>\lambda} |f(x)|dx$$

olur.

Önerme 5.10.5. $(X, \mathcal{A}, \mu), \sigma$ sonlu bir ölçü uzayı ve f pozitif ölçülebilir bir fonksiyon olsun. O halde $0 < p < \infty$ için

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) d\lambda$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlik **Cavalieri ilkesi** olarak adlandırılır.

Sonuç 5.10.6. Φ sürekli bir Young fonksiyonu olmak üzere

$$\int_X \Phi \circ |f(x)| d\mu(x) = \int_0^\infty \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) \phi(t) dt$$

ifadesi geçerlidir.

Teorem 5.10.7. (Φ, Ψ) tamlayan Young fonksiyon çifti olmak üzere sırasıyla ϕ ve ψ fonksiyonları ile üretilsinler. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) Bir $c_1 > 0$ sayısı vardır öyle ki her $s \geq 1$ için

$$\int_1^s \frac{\phi(t)}{t} dt \leq c_1 \psi(c_1 s),$$

(ii) bir $c_2 > 0$ sayısı vardır öyle ki her $f \in L^1(X)$ için

$$\int_0^{2\pi} \Phi(Mf(x))dx \leq c_2 + c_2 \int_0^{2\pi} \Psi(c_2|f(x)|)dx.$$

Teorem 5.10.8. (Φ, Ψ) tamlayan Young fonksiyon çifti olmak üzere, sırasıyla ϕ ve ψ fonksiyonları ile üretilsinler. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) Bir $c_3 > 0$ sayısı vardır öyle ki $s_0 > 1$ ve her $s \geq s_0 > 1$ için

$$\int_0^s \frac{\phi(t)}{t} dt \geq c_4 \psi(c_3 s),$$

(ii) bir $c_4 > 0$ ve $c_5 > 0$ sayısı vardır öyle ki her $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ için

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(c_4|f(x)|)dx \leq c_5 \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx + c_5 \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(Mf(x))dx,$$

(iii) herhangi bir $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ için eğer $Mf \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ ise $f \in L^\Psi(\mathbb{R}^n)$ olur.

5.11 ORLICZ UZAYININ GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Bu kısımda, Φ fonksiyonu bir Orlicz fonksiyonu olmak üzere atomsuz $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçü uzayı üzerinde tanımlanmış $L^\Phi(\mu)$ Orlicz uzayları için bazı geometrik özellikler verilmiştir. Notasyonda kolaylık açısından Luxemburg normu ile donatılmış Orlicz uzayını, yani $(L^\Phi(\mu), \|\cdot\|_\Phi)$ ikilisi kısaca L^Φ ile Orlicz normu ile donatılmış Orlicz uzayını yani $(L^\Phi(\mu), \|\cdot\|_\Phi^\circ)$ ikilisi ise kısaca L_ϕ^Φ ile gösterilmiştir. Yine, L^Φ Orlicz uzayının kapalı birim yuvarı için $B(L^\Phi)$, birim küresi için $S(L^\Phi)$ notasyonu kullanılmıştır. Ayrıca, Φ Orlicz fonksiyonunun kesin dışbükey olduğu noktaların kümesi ise SC_Φ ile gösterilmiştir.

Banach uzaylarının geometrisi fonksiyonel analizin önemli araştırma konularından biridir. Bu kapsamda Orlicz uzaylarında tanımlanan farklı normlara göre dışbükeylik, yuvarlaklık gibi geometrik özellikleri [4, 5, 47, 51] çalışmalarında bütüncül bir bakış açısıyla ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

Uyarı 5.11.1. $\mathbb{R} \setminus SC_\Phi$ kümesi en fazla sayılabilir sayıda açık aralığın birleşimi halinde olduğundan, SC_Φ kümesi kapalıdır.

Uç noktalar kavramı, bir Banach uzayının yuvarlaklık, pürüzsüzlük gibi bazı geometrik özelliklerini çalışmak için önemli bir rol oynar. Bu kısımda, Orlicz uzaylarının uç noktaları için bir ölçüt Luxemburg normu ve Orlicz normu için ayrı ayrı verilmiştir.

Uyarı 5.11.2. Bir X Banach uzayı için, eğer $x \in \text{Ext } B(X)$ ise $x \in S(X)$ olur.

Tanım 5.11.3. $k^* : L^\Phi \rightarrow [0, +\infty)$ ve $k^{**} : L^\Phi \rightarrow (0, +\infty]$ fonksiyonları

$$(i) \ k^*(f) = \inf\{k \geq 0 : I_\Phi(kf) \geq 1\},$$

$$(ii) \ k^{**}(f) = \sup\{k \geq 0 : I_\Phi(kf) \leq 1\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 5.11.4. $k^* : L_o^\Phi \rightarrow [0, +\infty)$ ve $k^{**} : L_o^\Phi \rightarrow (0, +\infty]$ fonksiyonları

$$(i) \ k^*(f) = \inf\{k \geq 0 : I_\Psi(\varphi(k|f|)) \geq 1\},$$

$$(ii) \ k^{**}(f) = \sup\{k \geq 0 : I_\Psi(\varphi(k|f|)) \leq 1\}$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 5.11.5. Burada herhangi bir $f \in L^\Phi$ (veya $f \in L_o^\Phi$) için $k^*(f) \leq k^{**}(f)$ olduğu açıktır. Dolayısıyla, bir $f \in L^\Phi$ (veya $f \in L_o^\Phi$) için $K(f) := [k^*(f), k^{**}(f)] \neq \emptyset$ olur.

Şimdi, L^Φ ve L_o^Φ uzaylarının uç noktalarının karakterizasyonlarını elde etmek için yardımcı olacak sonuçları verelim.

Lemma 5.11.6. Aşağıdakiler geçerlidir.

- (i) Eğer $f \in \text{Ext } B(L^\Phi)$ ise, $k^*(f) < \infty$ sağlanır.
- (ii) Eğer $f \in B(L^\Phi)$ ve $\mu(\{t \in X : |f(t)| = c_\Phi\}) > 0$ ise $f \in S(L^\Phi)$, $k^*(f) = k^{**}(f) = 1$ ve $I_\Phi(f) \leq 1$ olur.
- (iii) Eğer $I_\Phi(f) = 1$ ve $\mu(\{t \in X : f(t) \in SC_\Phi\}) > 0$ ise $f \in S(L^\Phi)$ ve $k^*(f) = k^{**}(f) = 1$ olur.

Lemma 5.11.7. Aşağıdakiler geçerlidir.

- (i) Eğer $f \in \text{Ext } B(L_o^\Phi)$ ise, yine $k^*(f) < \infty$ sağlanır.
- (ii) Eğer $f \in B(L_o^\Phi)$ ve $\mu(\{t \in X : |f(t)| = c_\Phi\}) > 0$ ise $f \in S(L_o^\Phi)$, $k^*(f) = k^{**}(f) = 1$ ve $I_\Phi(f) = 0$ olur.

Önerme 5.11.8. $2f = g + h$ olacak şekilde $f \in S(L_o^\Phi)$ ve $g, h \in B(L_o^\Phi) \setminus \{0\}$ olsun. Eğer $k^{**}(g) = +\infty$ ve $k^{**}(h) = +\infty$ ise $k^{**}(f) = +\infty$ olur.

L^Φ ve L_o^Φ uzaylarının uç noktaları için karakterizasyonlar, aşağıdaki teoremlerle verilmiştir.

Teorem 5.11.9. Bir $f \in S(L^\Phi)$ alındığında $f \in \text{Ext } B(L^\Phi)$ olması için gerek ve yeter koşul

- (i) hemen hemen her $t \in X$ için $|f(t)| = c_\Phi < +\infty$,
- (ii) $I_\Phi(f) = 1$ ve hemen hemen her $t \in X$ için $f(t) \in SC_\Phi$

durumlarından birinin sağlanmasıdır.

Teorem 5.11.10. Bir $f \in S(L_o^\Phi)$ verildiğinde $f \in \text{Ext } B(L_o^\Phi)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$(i) \quad k^*(f) = k^{**}(f) < +\infty,$$

$$(ii) \quad \text{hemen hemen her } t \in X \text{ için } k^*(f)f(t) \in SC_\Phi$$

olmasıdır.

Bir Z kompakt Hausdorff uzayı üzerinde tanımlı reel değerli ve sürekli fonksiyonların uzayı $C(Z)$ olsun. X bir Banach uzayı olmak üzere $K(X, C(Z))$ ile X uzayından $C(Z)$ uzayına giden lineer kompakt operatörlerin uzayını gösterelim. Yine, X Banach uzayının duali olan X^* için $B(X^*)$ kümesinin uç noktalarının kümesi $\text{Ext } B(X^*)$ ile gösterelim. Bir $T \in K(X, C(Z))$ için, $x \in X$ ve $z \in Z$ olmak üzere $(T'z)(x) = (Tx)(z)$ şeklinde tanımlanan $T' : Z \rightarrow X^*$ sürekli dönüşümünün varlığı biliniyor [12]. O halde aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 5.11.11. Eğer $T'(Z) \subseteq \text{Ext } B(X^*)$ ise T uygun operatör olarak adlandırılır.

$C(Z, X^*)$ ve $K(X, C(Z))$ uzayları izometrik olduğundan bir $T \in K(X, C(Z))$ uygun operatörü, bir uç operatördür yani, bir başka deyişle $B(K(X, C(Z)))$ birim yuvarının bir uç noktasıdır [12]. Öte yandan, $\text{Ext } B(X^*)$ kümesi kapalı ise, her bir $z \in Z$ için

$$f \in \text{Ext } B(C(Z, X^*)) \iff f(z) \in \text{Ext } B(X^*)$$

denkliği gerçekleşeceğinden her bir uç operatör de uygun operatör olur [10]. Ancak, $\text{Ext } B(X^*)$ kümesi her zaman kapalı olmak zorunda değildir.

Örnek 5.11.12. $\mathbb{R}^3$ uzayını ele alalım. $C = \text{co}(\{(\pm 1, 0, \pm 1)\} \cup \{(0, y, z) : y^2 + z^2 = 1\})$ olmak üzere bir $x \in \mathbb{R}^3$ için $\|x\| = \inf\{r > 0 : x \in rC\}$ olsun. Eğer $(0, \sin \frac{1}{n}, \cos \frac{1}{n}) \subseteq \text{Ext } B(\mathbb{R}^3)$ dizisi alınırsa, $n \rightarrow \infty$ iken $(0, \sin \frac{1}{n}, \cos \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0, 1)$ olur. Ancak $(0, 0, 1) = \frac{1}{2}((1, 0, 1) + (-1, 0, 1))$ olarak yazıldığı için $(0, 0, 1)$ noktası $B(\mathbb{R}^3)$ kümesinin bir uç noktası değildir. O halde, $\text{Ext } B(\mathbb{R}^3)$ kümesi kapalı değildir.

L^Φ uzayının uç noktalar kümesinin kapallılığı için ölçüt verirken kullanacağımız bir diğer büyüme özelliği aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 5.11.13 (Γ_a Koşulu). Eğer her $u \in SC_\Phi \cap [0, cv]$ ve $v \in SC_\Phi$ için $\gamma\mu(X) < \infty$ ve $\Phi(u) \leq K\Phi(v) + \gamma$ olacak şekilde $c > 1$, $K > 1$ ve $\gamma \geq 0$ sabitleri varsa, Φ Orlicz fonksiyonuna Γ_a koşulunu sağlıyor denir ve $\Phi \in \Gamma_a$ şeklinde gösterilir.

Önerme 5.11.14. Bir Φ Orlicz fonksiyonu Γ_a koşulunu sağlamasın ve $\text{Ext } B(L^\Phi)$ kümesi kapalı olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a = \min\{\mu(\Omega), 1\}$, $K_n = \frac{2^{n+2}}{a}$, $c_n = 1 + 2^{-(n+2)}$ olmak üzere $\Phi(u_n) > K_n\Phi(v_n)$ koşulunu sağlayan $(v_n) \subset SC_\Phi$ ve $(u_n) \subset SC_\Phi \cap [0, c_nv_n]$ dizileri verilsin. Bu durumda, $\mu(X) = +\infty$ koşulu altında (v_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç $\Phi(v_n) > 0$ eşitsizliği sağlanır.

Teorem 5.11.15. Bir Φ Orlicz fonksiyonu verilsin. $\text{Ext } B(L^\Phi)$ kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul Φ fonksiyonunun Γ_a koşulunu sağlamasıdır.

Aşağıdaki teorem ise L^Φ uzayının uç noktalar kümesinin kapallılığı için bir ölçüt verir.

Teorem 5.11.16. $\text{Ext } B(L_o^\Phi)$ kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul her $f \in L_o^\Phi$ için $k^*(f) = k^{**}(f) < +\infty$ olmasıdır.

Son olarak, geometrik özelliklerden biri olan yuvarlaklık kavramını verelim.

Tanım 5.11.17. Bir X Banach uzayı için $\text{Ext } B(X) = S(X)$ eşitliği sağlanıyorsa, X Banach uzayına yuvarlak uzay denir.

Örnek 5.11.18.

- (i) $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ kendi üzerlerinde yuvarlak Banach uzaylarıdır.
- (ii) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olmak üzere $1 < p < \infty$ için $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Lebesgue uzayı yuvarlak iken $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ ve $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ uzayları yuvarlak değildir.
- (iii) Z kompakt Hausdorff uzayı üzerinde tanımlı reel değerli ve sürekli fonksiyonların uzayı $C(Z)$ yuvarlak değildir.

Lemma 5.11.19. $\Phi(c_\Phi) < +\infty$ olacak şekilde, $(-c_\Phi, c_\Phi)$ aralığı üzerinde kesin dışbükey olmayan bir Φ Orlicz fonksiyonu alınsın. Bu durumda, eğer $\mu(X) < \infty$ ve her $f \in L^\Phi \setminus \{0\}$ için $k^{**}(f) = c_\Phi \|f\|_\infty^{-1}$ ise L^Φ (veya L_o^Φ) Orlicz uzayı yuvarlak değildir.

Önerme 5.11.20. Eğer $\Phi \in \Delta_2$ ise $f \in S(L^\Phi)$ olması için gerek ve yeter koşul $I_\Phi(f) = 1$ olmasıdır.

Şimdi, Luxemburg ve Orlicz normlarıyla donatılmış Orlicz uzaylarında yuvarlaklık için ayrı ayrı ölçütler verelim.

Teorem 5.11.21. L^Φ Orlicz uzayının yuvarlak olması için gerek ve yeter koşul

- (i) her $f \in L^\Phi \setminus \{0\}$ için $k^*(f) = k^{**}(f) < \infty$,
- (ii) $SC_\Phi = (-c_\Phi, c_\Phi)$,
- (iii) $\Phi \in \Delta_2$

olmasıdır.

Teorem 5.11.22. L_o^Φ Orlicz uzayının yuvarlak olması için gerek ve yeter koşul

- (i) her $f \in L^\Phi \setminus \{0\}$ için $k^*(f) = k^{**}(f) < \infty$,
- (ii) $SC_\Phi = (-c_\Phi, c_\Phi)$

olmasıdır.

SİMGE DİZİNİ

Bölüm 1

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi

$\mathbb{Z}$: Tam sayılar kümesi

$\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi

$\mathbb{C}$: Kompleks sayılar kümesi

$\mathbb{K}$: $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ cismi

$\mathbb{C}^*$: $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ kümesi

$\mathbb{R}^*$: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ kümesi

$\mathbb{T}$: $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ kümesi

$X \setminus Y$: X fark Y kümesi

$\mathcal{P}(X)$: Bir X kümesinin tüm alt kümelerinin ailesi

$X \times Y$: X ve Y kümelerinin kartezyen çarpımı

$\text{co } A$: A kümesinin dışbükey zarfı

$\bigcap_{i=1}^n A_i, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i, \bigcap_{i \in I} A_i$: Sonlu kesişim, sayılabilir kesişim, keyfi kesişim

$\bigcup_{i=1}^n A_i, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \bigcup_{i \in I} A_i$: Sonlu birleşim, sayılabilir birleşim, keyfi birleşim

$\text{maks } A$: $A \subseteq \mathbb{R}$ kümesinin en büyük elemanı

$\text{min } A$: $A \subseteq \mathbb{R}$ kümesinin en küçük elemanı

$\sup A$: $A \subseteq \mathbb{R}$ kümesinin en küçük üst sınırı

$\inf A$: $A \subseteq \mathbb{R}$ kümesinin en büyük alt sınırı

$\#A$: A kümesinin eleman sayısı

A° : A kümesinin içi

$\overline{A}$: A kümesinin kapanış kümesi

$f(A)$: A kümesinin f fonksiyonu altında görüntü kümesi

$f^{-1}(B)$: B kümesinin f fonksiyonu altında ters görüntü kümesi

$g \circ f$: f ve g fonksiyonlarının bileşkesi

$\text{sgn } f$: f fonksiyonunun işareti

$f * g$: f ve g fonksiyonlarının girişim işlemi

$\hat{f}$: f fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$\text{supp } f$: f fonksiyonunun desteği

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$: (a_n) dizisinin limiti

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$: f fonksiyonunun a noktasındaki limiti

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$: f fonksiyonunun a noktasındaki sol limiti

- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$: f fonksiyonunun a noktasındaki sağ limiti
 $(X, \|\cdot\|)$: Normlu uzay
 (X, d) : Metrik uzay
 (X, τ) : Topolojik uzay
 $B(x_0, r)$: x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar
 $B[x_0, r]$: x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar
 $S(x_0, r)$: x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar yüzeyi
 $(X, \mathcal{A}, \mu)$: Ölçü uzayı
 $\mathfrak{B}(X)$: X Hausdorff uzayı üzerindeki Borel σ -cebiri
 $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$: Lebesgue uzayı ($1 \leq p < \infty$)
 $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$: X üzerinde tanımlı esasen sınırlı fonksiyonların uzayı
 $C(X)$: X üzerinde tanımlı $\mathbb{K}$ değerli sürekli fonksiyonların uzayı
 $C_c(X)$: X üzerinde tanımlı kompakt destekli sürekli fonksiyonların uzayı
 $C_0(X)$: X üzerinde tanımlı sonsuzda sıfır fonksiyonların uzayı
 $C_b(X)$: X üzerinde tanımlı sürekli ve sınırlı fonksiyonların uzayı

Bölüm 2

- $f'(u)$: f fonksiyonunun u noktasındaki türevi
 $f'_+(u)$: f fonksiyonunun u noktasındaki sağ türevi
 $f'_-(u)$: f fonksiyonunun u noktasındaki sol türevi

Bölüm 3

- $a_n \nearrow a$: (a_n) dizisi a 'ya artarak yakınsar
 $a_n \searrow a$: (a_n) dizisi a 'ya azalarak yakınsar
 $\bar{\mathbb{R}}$: $[-\infty, +\infty]$ kümesi
 $\mathbb{R}^+$: $[0, +\infty)$ kümesi
 $\mathbb{R}^-$: $(-\infty, 0]$ kümesi
 Φ : Young fonksiyonu
 Ψ : Φ fonksiyonunun tamlayanı
 φ : Φ fonksiyonunun sağ türevi
 ψ : Ψ fonksiyonunun sağ türevi
 $\Phi_2 < \Phi_1$: Φ_1 fonksiyonu Φ_2 fonksiyonundan daha kuvvetlidir
 $\Phi_2 \ll \Phi_1$: Φ_1 fonksiyonu Φ_2 fonksiyonundan esasen kuvvetlidir
 $\Phi_2 \lll \Phi_1$: Φ_1 fonksiyonu Φ_2 fonksiyonundan tamamen kuvvetlidir
 $\Phi_2 \leq \Phi_1$: Φ_1 fonksiyonu Φ_2 fonksiyonundan daha hızlı artar
 $\Phi_1 \sim \Phi_2$: $\Phi_2 < \Phi_1$ ve $\Phi_1 < \Phi_2$

$\tilde{\Phi}$: Normalleştirilmiş Young fonksiyonu

Bölüm 4

$\tilde{L}^\Phi$: $\int_X \Phi(|f|) < +\infty$ koşulunu sağlayan $\mathcal{A}$ -ölçülebilir f fonksiyonlarının kümesi

B_Φ : $\int_X \Phi(g) \leq 1$ koşulunu sağlayan $g \in \tilde{L}^\Phi$ elemanlarının kümesi

$L^\Phi(\mu)$: Orlicz uzayı

$\|f\|_\Phi$: $f \in L^\Phi(\mu)$ elemanının Luxemburg (Gauge) normu

$\|f\|_\Phi^\circ$: $f \in L^\Phi(\mu)$ elemanının Orlicz normu
x

Bölüm 5

$\mathbb{A} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$: Afin grup

$\{\psi_i\}_{i \in J}$: BUPU fonksiyon ailesi

$f \otimes g$: f ve g fonksiyonlarının bükülmüş girişim işlemi

Mf : Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

M_1f : Merkezi Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

M_2f : Merkezi olmayan Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

L_x : x ile sol öteleme operatörü

$\mathfrak{B}_d f$: Bargmann dönüşümü

$\text{Op}_A(a)f$: Sözde diferansiyel operatör

$L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$: $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı yerel integrallenebilir fonksiyonların uzayı

L^Φ_ω : Orlicz normu ile donatılmış Orlicz uzayı

$L^\Phi_\omega(G)$: Ağırlıklı Orlicz uzayı

ℓ^Φ_ω : Ağırlıklı Orlicz dizi uzayı

$L^{\Phi_1, \Phi_2}_{(\omega)}(\mathbb{R}^{2d})$: Ağırlıklı karışık yarı norm Orlicz uzayı

$\ell^{\Phi_1, \Phi_2}_{(\omega)}(\mathbb{Z}^{2d})$: Ağırlıklı karışık yarı norm Orlicz dizi uzayı

$M^{\Phi_1, \Phi_2}_{(\omega)}(\mathbb{R}^d)$: Ağırlıklı Orlicz modülasyon uzayı

$W(L^{\Phi_1}(G), L^{\Phi_2}(G))$: Orlicz uzaylarının Wiener amalgam uzayı

$M(L^\Psi(G), L^\Phi(G))$: $L^\Psi(G)$ uzayından $L^\Phi(G)$ uzayına giden çarpanlar uzayı

SC_Φ : Φ Orlicz fonksiyonunun kesin dışbükeylik noktalarının kümesi

$B(L^\Phi)$: L^Φ Orlicz uzayının kapalı birim yuvarı

$S(L^\Phi)$: L^Φ Orlicz uzayının birim küresi

$(L^\Phi(G), \otimes)$: Bükülmüş Orlicz cebiri

$\mathcal{Z}^2(G, \mathbb{C}^*)$: Normalleştirilmiş 2-eş çevrim fonksiyonların uzayı

$\mathcal{Z}^2_b(G, \mathbb{C}^*)$: G üzerinde tanımlı $\mathbb{C}^*$ değerli sınırlı eş çevrim fonksiyonların uzayı

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$: Schwartz uzayı

$\mathcal{S}_s(\mathbb{R}^d)$: Roumieu tip Gelfand-Shilov uzayı

$\Sigma_s(\mathbb{R}^d)$: Beurling tip Gelfand-Shilov uzayı

$\mathcal{H}_b(\mathbb{R}^d)$: Pilipović uzayı

$K(X, C(Z))$: X uzayından $C(Z)$ uzayına giden lineer kompakt operatörlerin uzayı

DİZİN

- A ikili modülü, 34
 Δ' koşulu, 76
 Δ^2 koşulu, 86
 Δ_2 koşulu, 71
 Δ_3 koşulu, 83
 Γ_a koşulu, 144
 μ hemen hemen her yerde, 10
 ∇' koşulu, 76
 ∇^2 koşulu, 87
 ∇_2 koşulu, 71
 ∇_3 koşulu, 83
 σ cebiri, 8
 σ kompakt uzay, 6
 σ sonlu ölçü, 9
 σ_Φ sabiti, 117
 a_Φ sabiti, 74
 b_Φ sabiti, 74
 c_Φ sabiti, 117

açık küme, 4
açık yuvar, 7
açık komşuluk, 3
afin grubu, 137
ağırlık fonksiyonu, 112
ağırlıklı karışık yarı norm Orlicz uzayı, 132
ağırlıklı Orlicz modülasyon uzayı, 132
ağırlıklı Orlicz uzayı, 112
alt vektör uzayı, 15
alt yarı sürekli fonksiyon, 6
analiz operatörü, 133
aperiyodik eleman, 128
aşırı grubun merkezi, 126
aşırı grup (hypergroup), 126
atom, 10
atomsuz ölçü uzayı, 10
ayrık (veya köşegenel) aşırı döngüsel
operatör, 127
ayrık (veya köşegenel) topolojik geçişli, 127
ayrık topolojik karıştırın, 127
ayrılabilir uzay, 5
Banach cebiri, 33
Banach modülü, 34
Banach uzayı, 16
Bargmann dönüşümü, 135
Beppo-Levi Teoremi, 11
Beurling tip Gelfand-Shilov uzayı, 130
birim küre, 16
birimin sınırlı düzgün parçalanması, 139
birimli cebir, 33
birinci sayılabilir uzay, 4
Borel σ cebiri, 10
Borel kümesi, 10
Borel ölçüsü, 10
BUPU, 139
bükülmüş girişim, 122
bükülmüş Orlicz cebiri, 122

Cauchy dizisi, 7
Cavalieri ilkesi, 141
cebir, 33
çarpan, 125
çarpım topolojisi, 5

daha hızlı artan Young fonksiyonu, 65
daha kuvvetli Young fonksiyonu, 65
değişmeli cebir, 33
dengeli küme, 14
denk norm, 139
dış ölçü, 10
dışbükey bileşen, 14
dışbükey fonksiyon, 37
dışbükey küme, 14
dışbükey zarf, 14
Dirac ölçüsü, 9
distribüsyon çekirdeği, 136
dual grubu, 29
düzgün integrallenebilirlik, 51
düzgün sürekli, 42

esasen kuvvetli Young fonksiyonu, 65

esasen sınırlı ve ölçülebilir fonksiyonlar
kümesi, 17
evrensel bileşeni, 137

Fatou Lemması, 11
fonksiyonun desteği, 11
Fourier dönüşümü, 32
Fubini Teoremi, 12

Gabor çerçeve operatorü, 133
Genelleştirilmiş Hölder Eşitsizliği, 20
Girişim için Young Eşitsizliği, 29

Haar ölçüsü, 27
Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu, 140
Hausdorff uzayı, 3
Hermit seri açılımı, 131
homeomorfik uzaylar, 5
homeomorfizma, 5
Hölder Eşitsizliği, 18

iç nokta, 4
iç ölçü, 10
içbükey fonksiyon, 37
iki noktadan geçen doğru parçası, 14
iki noktayı birleştiren doğru parçası, 14
ikinci sayılabilir uzay, 4
injektif modül, 124
izometri, 7
izometrik metrik uzaylar, 7
izometrik normlu uzaylar, 15

Jensen Eşitsizliği, 49

kapalı küme, 4
kapalı yuvar, 16
kapanış, 4
katı (solid) uzay, 25
kesin dışbükey fonksiyon, 37
kompakt, 5
kompakt destekli sürekli fonksiyonların uzayı,
11
komşuluk tabanı, 4
kontrol fonksiyonu, 138

Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi, 12
Lebesgue uzayı, 16
limit (yığılma) noktası, 4

Lipschitz koşulu, 42
logaritmik dışbükey (log-dışbükey) fonksiyon,
45

Luxemburg (gauge) normu, 102

metrik, 6
metrik uzayı, 6
metriklenebilir uzay, 7
Minkowski Eşitsizliği, 21
moderate fonksiyon, 131
modular fonksiyon, 27
Monoton Yakınsaklık Teoremi, 11
mutlak dışbükey küme, 14

N fonksiyonu, 61
norm, 14
norma göre yakınsama, 15
normalleştirilmiş 2 eş çevrim fonksiyon, 121
normlu cebir, 33
normlu uzay, 15
normlu uzay izometrisi, 15

olasılık ölçüsü, 9
Orlicz amalgam uzayları, 137
Orlicz fonksiyonu, 117
Orlicz normu, 103
Orlicz uzayı, 95
ortalamalı (amenable) grup, 121
ortalamalı cebir, 122
Öklit metriği, 7
Öklit uzayı, 7
ölçü, 9
ölçülebilir dönüşüm, 117
ölçülebilir fonksiyon, 10
ölçülebilir küme, 8
ölçülebilir uzay, 8

periyodik (veya kompakt) eleman, 128
Pilipović uzayı, 131
projektif modül, 123

Radon ölçülerinin uzayı, 126
regüler Δ (veya ∇) koşulu, 91
regüler ölçü, 10
Riesz Temsil Teoremi, 11
Roumieu tip Gelfand-Shilov uzayı, 130
sağ A modülü, 34

sağ Banach modülü, 34
 sayma ölçüsü, 9
 sentez operatörü, 133
 sıfır kümesi, 10
 sınırlı fonksiyon, 39
 singüler olmayan dönüşüm, 118
 skaler değerli sürekli fonksiyonların uzayı, 15
 sol A modülü, 34
 sol Banach modülü, 34
 sonlu ölçü, 9
 sonsuzda sıfır fonksiyon, 25
 sözde diferansiyel operatör, 136
 sürekli fonksiyon, 5
 sürekli ve sınırlı fonksiyonların uzayı, 33
 sınırlı eş çevrim fonksiyonların grubu, 121

 taban, 4
 tam metrik uzay, 7
 tamamen kuvvetli Young fonksiyonu, 65
 tamlayan Young fonksiyon çifti, 57
 tamlayan Young fonksiyonu, 57
 Tietze Teoremi, 6
 Tonelli Teoremi, 12
 topoloji, 3
 topolojik grup, 26
 topolojik uzay, 3

torsiyon eleman, 128
 tümüyle atomik ölçü, 10

 uç nokta, 14
 unimodular grup, 27
 Urysohn Lemması, 5
 uygun operatör, 144
 üst yarı sürekli fonksiyon, 6

 Wiener amalgam uzayları, 137

 yaklaşık birim, 33
 yarı norm, 15
 yarı Orlicz uzayı, 132
 yarı Young fonksiyonu, 132
 yerel bileşeni, 137
 yerel integrallenebilir fonksiyon, 140
 yerel integrallenebilir fonksiyon uzayı, 140
 yerel kompakt değişmeli grup, 26
 yerel kompakt grup, 26
 yerel kompakt topolojik uzay, 6
 yoğun küme, 5
 Young Eşitsizliği, 17
 Young fonksiyonları için Young eşitsizliği, 57
 Young fonksiyonu, 56
 yuvarlak Banach uzayı, 145

KAYNAKÇA

- [1] Ando, T., On product of Orlicz Spaces, *Mathematische Annalen*, 40(3), 174–186, 1960.
- [2] Arıs, B., Yerel Kompakt Gruplarda Tanımlı Orlicz Uzaylarının Amalgam Uzayları ve Özellikleri, Doktora Tezi, Tez Danışmanı: Prof. Dr. Serap Öztıp Kaptanoğlu, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul Üniversitesi, 2023.
- [3] Arıs, B., Öztıp, S., Wiener amalgam spaces with respect to orlicz spaces on the affine group, *J. Pseudo-Differ. Oper. Appl.*, 14 (23), 2023.
- [4] Başar, E., Orlicz uzaylarında p -Amemiya normuna göre birim yuvarların incelenmesi, Yüksek lisans Tezi, Tez Danışmanı: Prof. Dr. Serap Öztıp Kaptanoğlu, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul Üniversitesi, 2021.
- [5] Başar, E., Öztıp, S., Uysal, B.H. and Yaşar, Ş., Extreme Points in Orlicz Spaces equipped with s -norms and its Closedness, *Math. Nachr.*, doi: 10.1002/mana.202200374, 2023.
- [6] Blasco, O., Üster, R., Transference and restriction of Fourier multipliers on Orlicz spaces. *Math. Nachr.*, doi: 10.1002/mana.202200315, 2023.
- [7] Chen, S., *Geometry of Orlicz spaces*, *Dissertationes Math.*, 356 1996.
- [8] Chen C., Chen K., Öztıp S., Tabatabaie S. M., Chaotic translations on weighted Orlicz spaces, *Annales Polonici Mathematici*, 122, 129–142, 2019.
- [9] Chen C., Chen K., Öztıp S., Tabatabaie S. M., Disjoint Dynamics on Weighted Orlicz Spaces, *Complex Analysis and Operator Theory*, 14, 2020.
- [10] Chen, S., Wis la, M., Extreme compact operators from Orlicz spaces to $C(\Omega)$, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 34, 63–77, 1993.
- [11] Cohn, D. L., *Measure Theory*, 2nd ed., Birkhäuser/Springer, New York, 2013.
- [12] Dunford, N., Schwarz, J.T., *Linear Operators I: General Theory*, Interscience, New York, 1958.
- [13] Erbay, F., Orlicz uzaylarında bileşke operatörleri, Yüksek lisans Tezi, Tez Danışmanı: Prof. Dr. Serap Öztıp Kaptanoğlu, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul Üniversitesi, 2012.
- [14] Feichtinger, H. G., Banach convolution algebras of Wiener type, in *Functions, Series, Operators*, *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, vol. 35, North-Holland, Amsterdam, 509–524, 1983.
- [15] Folland, G. B., *Real Analysis*, 2nd ed., A Wiley-Interscience Publication, 1999.
- [16] Halmos, P. R., *Measure Theory*, Springer, New York, 1974.
- [17] Heil, C., An introduction to weighted Wiener amalgams, in *Wavelets and Their Applications*, Allied Publishers, New Delhi, 183–216, 2003.
- [18] Hewitt, E., Ross, B., *Abstract Harmonic Analysis: Volume 1*, Springer, New York, 1994.
- [19] Hewitt, E., Ross, B., *Abstract Harmonic Analysis: Volume 2*, Springer, New York, 1997.
- [20] Kaniuth, E., *A course in commutative Banach algebras*, Springer, 2009.
- [21] Kelley, J. L. *General Topology*, Springer, New York, 1975.
- [22] Kita, H., On maximal functions in Orlicz spaces, *Proceeding of the American mathematical society*, 124(10), 1996.

- [23] Kita, H., On Hardy-Littlewood Maximal Functions in Orlicz Spaces, *Math. Nachr.* 183, 135–155, 1997.
- [24] Krasnosel'skii, M.A., Rutickii, Ja.B., *Convex Functions and Orlicz Spaces*, Noordhoff, 1961.
- [25] Kufner, A., John, O., Fucik, S. *Function Spaces*, Springer, 1977.
- [26] Orlicz, W., Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B, *Bull. Int. Acad. Polon. Sér. A*, 207–220, 1932.
- [27] Osançlıol, A., Lp uzayları ve çarpanları, Yüksek lisans Tezi, Tez Danışmanı: Prof. Dr. Serap Öztop Kaptanoğlu, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul Üniversitesi, 2007.
- [28] Osançlıol, A., Ağırlıklı Orlicz uzaylarının soyut harmonik analizi, Doktora Tezi, Tez Danışmanı: Prof. Dr. Serap Öztop Kaptanoğlu, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul Üniversitesi, 2013.
- [29] Osançlıol, A., Inclusion between weighted Orlicz spaces, *J. Inequal. Appl.*, 390, 1–8, 2014.
- [30] Osançlıol, A., Öztop, S., Weighted Orlicz algebras on locally compact groups, *J. Aust. Math. Soc.*, 99, 399–414, 2015.
- [31] Öztop S., *Analiz I*, Nobel Akademik Yayıncılık, 2022.
- [32] Öztop S., *Fonksiyonel Analiz Ders Notları*, İstanbul Üniversitesi, 2021.
- [33] Öztop S., Samei E., Twisted Orlicz algebras, I, *Studia Mathematica*, 236, 271–296, 2017.
- [34] Öztop S., Samei E., Twisted Orlicz algebras, II, *Mathematische Nachrichten*, 292, 129–142, 2019.
- [35] Öztop S., Samei E., Shepelska V., Weak amenability of weighted Orlicz algebras , *Archiv der mathematik*, 110, 363–376, 2018.
- [36] Öztop S., Samei E., Shepelska V., Twisted Orlicz algebras and complete isomorphism to operator algebras, *Journal of mathematical analysis and applications*, 477, 1114–1132, 2019.
- [37] Öztop S., Tabatabaie S. M., Weighted Orlicz Algebras on Hypergroups, *Filomat*, 34, 2991–3002, 2020.
- [38] Rao, M. M., Ren, Z. D., *Theory of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker, New York, 1991.
- [39] Rao, M. M., Ren, Z. D., *Applications Of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker, New York, 2002.
- [40] Reiter, H., Stegeman, Jan D., *Classical harmonic analysis and locally compact groups*, Oxford Univ. Press, 2001.
- [41] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, 3rd ed. McGraw-Hill, New York, 1987.
- [42] Rudin, W., *Functional Analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1991.
- [43] Suarez-Granero, A., Wis la, M., Closedness of the set of extreme points in Orlicz spaces, *Math. Nachr.*, 157, 319–334, 1992.
- [44] Toft, J., Üster, R., Nabizadeh Morsalfard, E. and Öztop, S., Continuity properties and Bargmann mappings of quasi-Banach Orlicz modulation spaces, *Forum Mathematicum*, 34, 1205–1232, 2022.
- [45] Toft, J., Üster, R., Pseudo-differential operators on Orlicz modulation spaces, *J. Pseudo-Differ. Oper. Appl.*, 14, 2023.
- [46] Uçar, S., Orlicz Uzayında Maksimal Operatörler, Yüksek lisans Tezi, Tez Danışmanı: Prof. Dr. Serap Öztop Kaptanoğlu, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul Üniversitesi, 2023.
- [47] Uysal, B.H., Orlicz uzaylarında p-amemiya normuna göre bazı geometrik özellikler, Yüksek lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Tez Danışmanı: Prof. Dr. Serap Öztop Kaptanoğlu, İstanbul Üniversitesi, 2021.

- [48] Üster, R., Orlicz uzaylarının bazı homolojik özellikleri, Doktora Tezi, Tez Danışmanı: Prof. Dr. Serap Öztıp Kaptanoğlu, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul Üniversitesi, 2019.
- [49] Üster, R., Multipliers for the weighted Orlicz spaces of a locally compact abelian group, *Results in Mathematics*, 76(4), 2021.
- [50] Üster, R., Öztıp, S., Invariant subsets and homological properties of Orlicz modules over group algebras, *Taiwanese J. Math.*, 24, 959–973, 2020.
- [51] Yaşar, Ş., Orlicz uzaylarının s-normuna göre incelenmesi, Yüksek lisans Tezi, Tez Danışmanı: Prof. Dr. Serap Öztıp Kaptanoğlu, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul Üniversitesi, 2021.
- [52] Yoon Jae Yoo, Hardy-Littlewood Maximal Functions In Orlicz Spaces, *Bull. Korean Math. Soc.*, 36, 225-231, 1999.
- [53] Vakhtang, K., Krbec, M., *Weighted inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces*, World Scientific, 1991.
- [54] Wiener, N., On the representation of functions by trigonometric integrals, *Math. Z.*, 24, 575—616, 1926.
- [55] Wiener, N., Tauberian theorems, *Ann. of Math.*, 33, 1—100, 1932.
- [56] Wiener, N., *The Fourier integral and certain of its applications*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1933.

